# O JEDNOM ZADATKU S DRŽAVNOG NATJECANJA – SUKLADNOST TROKUTA

Sanja Stilinović, Zagreb

Matka 30 (2021./2022.) br. 117

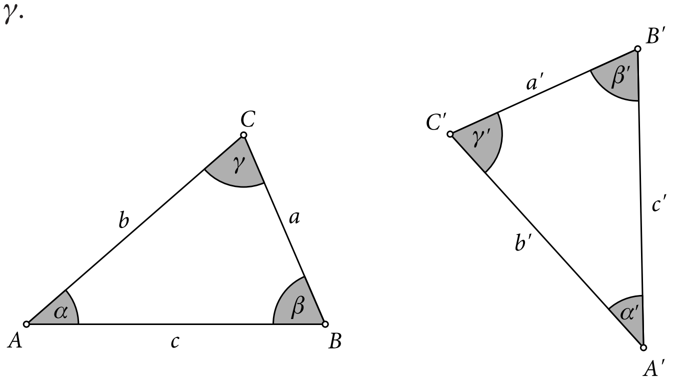
Na Državnom natjecanju iz matematike održanom 11. svibnja 2021. u 8. razredu zadan je i ovaj zadatak:

Neka je $\Delta ABK$ trokut sa šiljastim kutovima u vrhovima $A$ i $B$. Na stranici $\overline{KA}$ odabrane su točke $D$ i $N$, a na stranici $\overline{KB}$ točke $C$ i $M$ tako da su pravci $DC$, $NM$ i $AB$ usporedni. Pravci $AB$ i $DC$ udaljeni su od pravca $NM$ 4 cm. Polovište dužine $\overline{NM}$ od pravca $AK$ je udaljeno 4 cm, a od pravca $BK$ 3 cm. Ako površina četverokuta $ABCD$ iznosi 80 cm$^2$, odredi površinu trokuta $\Delta ABK$.

Osim službenog rješenja zadatak se mogao riješiti i na drugačije načine, no u svakom od njih bilo je potrebno uočiti i dokazati sukladnost ili sličnost nekih trokuta.

S obzirom na to da je najviše pogrešaka bilo kod dokazivanja sukladnosti, podsjetimo se najprije sukladnosti trokuta.

Trokutu $\Delta ABC$ označimo duljine stranica $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$, a veličine kutova s vrhom nasuprot tim stranicama $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle CBA| = \beta$ i $|\angle BCA| = \gamma$.




Neka su dani trokuti $\Delta ABC$ i $\Delta A'B'C'$. Kažemo da su ti trokuti **sukladni** i označavamo $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, ako postoji preslikavanje između njihovih vrhova tako da se $A$ preslika u $A'$, $B$ se preslika u $B'$ i $C$ se preslika u $C'$ i da vrijedi:

$$a = a',\ b = b',\ c = c',\ \alpha = \alpha',\ \beta = \beta' \text{ i } \gamma = \gamma'.$$

Drugim riječima, trokuti su sukladni ako im odgovarajuće stranice imaju iste duljine i ako im odgovarajući kutovi imaju iste veličine.

Primjeri takvih preslikavanja su osna simetrija, centralna simetrija, translacija, rotacija...

U šestom razredu, osim pojma sukladnosti, aktivnostima na satu matematike otkrivaju se i minimalni uvjeti koji moraju biti ispunjeni da bi dva trokuta bila sukladna. Izriču se poučci (teoremi) sukladnosti, ali ih se formalno ne dokazuje. U redovnoj nastavi uglavnom se koriste tri poučka koje kraće zapisujemo S-S-S, S-K-S i K-S-K, a u rješavanju dodatnih zadataka, koji se pojavljuju i na matematičkim natjecanjima, koristi se i poučak S-S-K.

Uz navedene poučke dani su jednostavni primjeri, upute što treba zapisati kod dokazivanja sukladnosti ili napomene o čemu treba voditi brigu primjenom poučka.

## 1. Poučak (S-S-S)

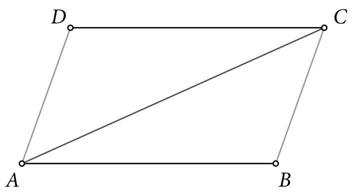
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri odgovarajuće stranice.

**Primjer 1:** Dokažimo da dijagonala paralelograma dijeli paralelogram na dva trokuta istih površina.

***Dokaz:*** S obzirom na to da sukladni trokuti imaju jednake površine, pokažimo da dijagonala dijeli paralelogram na dva sukladna trokuta.

Dijagonala $\overline{AC}$ paralelograma dijeli paralelogram na dva trokuta, $\Delta ABC$ i $\Delta ACD$. Za te trokute vrijedi da je

$$|AB| = |CD| \text{ i } |BC| = |AD|$$




jer su nasuprotne stranice paralelograma jednakih duljina, a stranica $\overline{AC}$ im je zajednička pa su sukladni prema poučku S-S-S jer se podudaraju u sve tri odgovarajuće stranice.

Analogno se dobiva ako promatramo dijagonalu $\overline{BD}$.

Kako je $\Delta ABC \cong \Delta ACD$, onda je $p_{\Delta ABC} = p_{\Delta ACD}$.

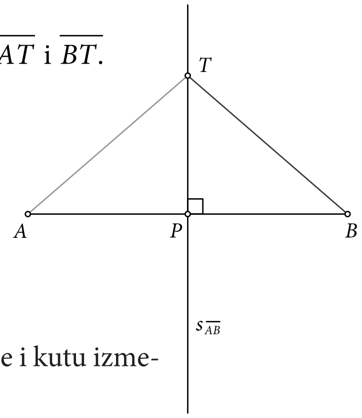
## 2. Poučak (S-K-S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije odgovarajuće stranice i kutu između njih.

Napomena: Važno je istaknuti da je kut „između tih stranica", odnosno da se radi o unutarnjem kutu trokuta čiji je vrh zajednička krajnja točka tih stranica. U 4. će poučku biti komentirani slučajevi kad se radi o nekom od preostala dva kuta trokuta.

**Primjer 2:** Dokažimo da je svaka točka simetrale dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine.

***Dokaz:*** Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i njena simetrala $s_{\overline{AB}}$.
Označimo na simetrali proizvoljnu točku $T$ i istaknimo dužine $\overline{AT}$ i $\overline{BT}$.
Treba dokazati da je $|AT| = |BT|$.
Za trokute $\Delta APT$ i $\Delta BPT$ vrijedi da je
$|AP| = |PB|$ jer simetrala raspolavlja dužinu
$|\angle TPA| = |\angle BPT| = 90°$
$\overline{PT}$ im je zajednička stranica.




Kako se ovi trokuti podudaraju u dvije odgovarajuće stranice i kutu između njih, prema poučku S-K-S sukladni su.

Iz sukladnosti $\Delta APT \cong \Delta BPT$ slijedi: trokuti se podudaraju i u ostalim odgovarajućim elementima pa je $|AT| = |BT|$.

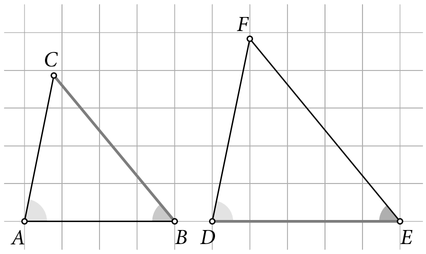
## 3. Poučak (K-S-K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz nju.

Za ovaj poučak naveden je primjer kojim pokazujemo zašto je važno da se trokuti podudaraju u dva kuta uz odgovarajuću stranicu, a ne u bilo koja dva kuta jer je uočena pogrešna primjena baš tog poučka i kod učenika na redovnoj nastavi i kod natjecatelja.

**Primjer 3:** Promotrimo trokute $\Delta ABC$ i $\Delta DEF$ (na slici) za koje vrijedi:

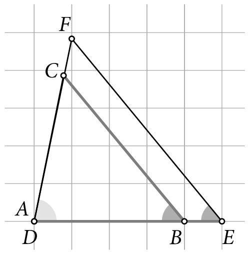
$$|BC| = |DE|$$
$$|\angle BAC| = |\angle EDF|$$
$$|\angle CBA| = |\angle FED|$$




Iako se ta dva trokuta **podudaraju u jednoj stranici i dva kuta** (a time i u trećem jer je zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta 180°), **oni nisu sukladni**.

Naime, ako trokut $\Delta ABC$ translatiramo za vektor $\overrightarrow{AD}$, točka $A$ preslika se u točku $D$, kut $\angle BAC$ preslika se u kut $\angle EDF$, ali točka $B$ ne preslika se u točku $E$, točka $C$ ne preslika se u točku $F$ jer dužine $\overline{AB}$ i $\overline{DE}$ nisu sukladne, kao ni dužine $\overline{AC}$ i $\overline{DF}$.

No za ove trokute vrijedi: $\Delta DEF$ sličan je $\Delta ABC$ s koeficijentom sličnosti $\frac{5}{4}$.




Dakle, prilikom primjene ovog poučka, važno je promatrati odgovarajuće kutove jer se u protivnom može dogoditi ovakva ozbiljna pogreška koja će u daljnjem tekstu još jednom biti komentirana u kontekstu rješavanja 4. zadatka s ovogodišnjeg Državnog natjecanja iz matematike za 8. razred.

## 4. Poučak (S-S-K)

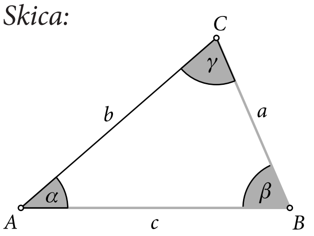
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije odgovarajuće stranice i kutu nasuprot većoj.

Za ovaj poučak naveden je primjer kojim pokazujemo zašto je važno da se trokuti podudaraju u kutu nasuprot većoj stranici jer inače trokuti ne moraju biti sukladni.

**Primjer 4:** Konstruirajmo trokut $\Delta ABC$ ako je zadano

$$|AB| = 5 \text{ cm}, \ |BC| = 4 \text{ cm}, \ |\angle BAC| = 45°.$$

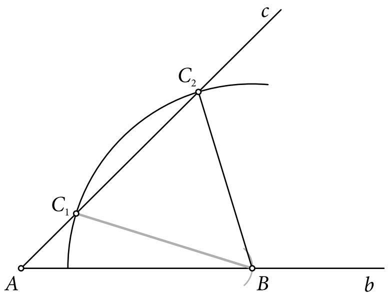
*Skica:*




Koraci konstrukcije:

1. $\angle BAC$
2. $\overline{AB}$
3. $C = AC \cap k(B, 4 \text{ cm})$
4. $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$

*Konstrukcija:*




Zadatak nema jedinstveno rješenje jer kružnica sa središtem u točki $B$ radijusa $|BC| = 4$ cm siječe krak $Ac$ kuta $\angle BAC$ u dvije točke, $C_1$ i $C_2$, a trokuti $\Delta ABC_1$ i $\Delta ABC_2$ nisu sukladni.

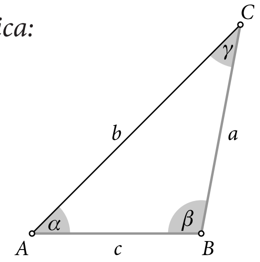
Ovim primjerom pokazali smo da trokuti koji se podudaraju u dvije odgovarajuće stranice i kutu nasuprot manjoj od njih ne moraju biti sukladni.

Ujedno, ovaj primjer pokazuje zašto je važno u primjeni poučka S-K-S promatrati kut između odgovarajućih stranica, a ne bilo koji kut trokuta.

Promijenimo uvjete zadatka tako da je zadan kut nasuprot duljoj stranici.

Konstruirajmo trokut $\Delta ABC$ ako je zadano $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|\angle BAC| = 45°$.

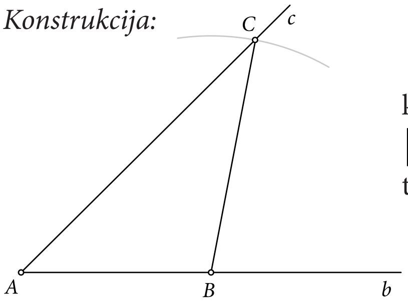
*Skica:*




Koraci konstrukcije:

1. $\angle BAC$
2. $\overline{AB}$
3. $C = AC \cap k\left(B, 5 \text{ cm}\right)$
4. $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$

*Konstrukcija:*



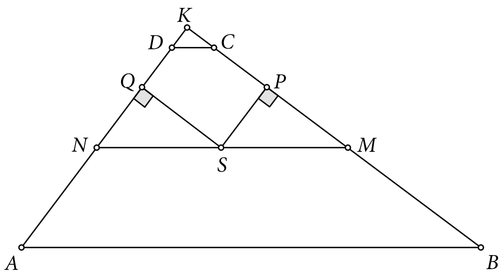

Zadatak ima jedinstveno rješenje jer kružnica sa središtem u točki $B$ radijusa $\left|BC\right| = 5$ cm siječe krak $Ac$ kuta $\angle BAC$ u točno jednoj točki.

***Rješenje zadatka s natjecanja***

Pogledajmo jedan od mogućih načina rješavanja navedenog zadatka s Državnog natjecanja u kojemu su se pojavile pogreške u primjeni poučka K-S-K.

Označimo polovište dužine $\overline{NM}$ sa $S$, a nožišta okomica iz $S$ na stranice $\overline{KA}$ i $\overline{KB}$ s $Q$ i $P$ redom.

Označimo duljine dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, $\left|AB\right| = a$ i $\left|CD\right| = b$.




Kako je $AB \parallel CD$, četverokut $ABCD$ je trapez, a kako je pravac $NM$ jednako udaljen od $AB$ i $DC$, dužina $\overline{NM}$ srednjica je tog trapeza. Njegova visina iznosi 8 cm, a površina 80 cm$^2$, pa vrijedi:

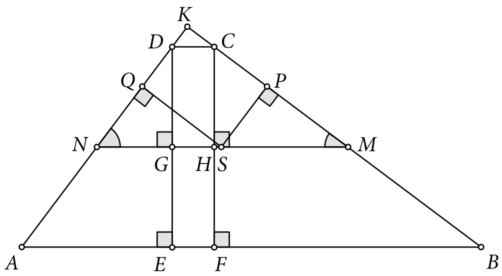
$$\frac{a+b}{2}\cdot 8=80 \;\Rightarrow\; a+b=20\text{ cm}.$$

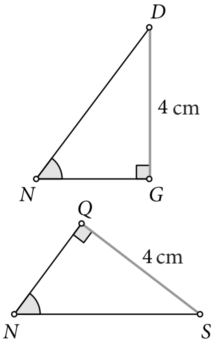
Stoga je duljina srednjice trapeza $ABCD$ jednaka 10 cm, tj. $|NM|=10\text{ cm} \Rightarrow |NS|=|SM|=5\text{ cm}$.

Kako su trokuti $\Delta NSQ$ i $\Delta SMP$ pravokutni, primjenom Pitagorina poučka odredimo duljine nepoznatih kateta tih trokuta.

$$|NS|=5\text{ cm},\ |SQ|=4\text{ cm} \Rightarrow |NQ|=3\text{ cm i}$$
$$|SM|=5\text{ cm},\ |SP|=3\text{ cm} \Rightarrow |MP|=4\text{ cm}.$$

Nacrtajmo okomice iz $D$ i $C$ na stranicu $\overline{AB}$ i označimo nožišta okomica $E$ i $F$ redom. Dužine $\overline{ED}$ i $\overline{FC}$ okomite su i na dužinu $\overline{NM}$ pa sjecišta označimo $G$ i $H$ redom.



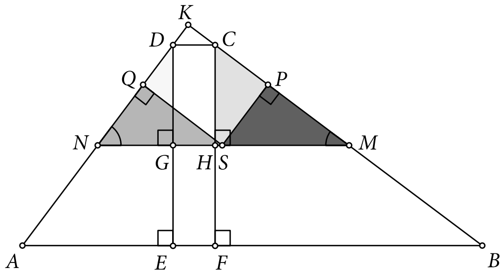

$\Delta NGD \cong \Delta NSQ$ prema poučku K-S-K, jer se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz nju:

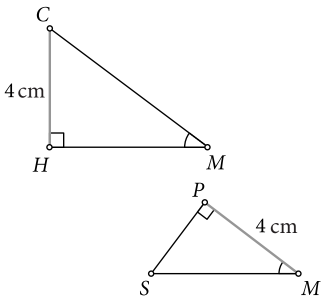
$$|\angle DGN| = |\angle NQS| = 90°$$
$$|GD|=|SQ|=4\text{ cm}$$

$|\angle GDN| = |\angle QSN| = 90° - |\angle SNQ|$, jer su trokuti pravokutni i imaju zajednički kut $\angle SNQ$.

Iz te sukladnosti dobijemo $|ND|=|NS|=5\text{ cm}$ i $|NG|=|NQ|=3\text{ cm}$.

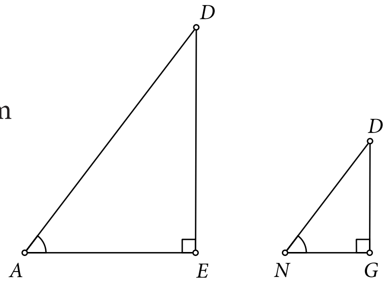
Analogno zaključivanje ne može se primijeniti na trokute $\Delta HMC$ i $\Delta SMP$ jer ta dva trokuta nisu sukladna nego slična. Upravo u ovom dijelu zadatka uočena je pogreška u primjeni poučka K-S-K.



Naime, s obzirom na to da oba trokuta imaju po jednu stranicu duljine 4 cm, oba su pravokutna i imaju zajednički kut $\angle CMH$, učenici su primijenili poučak K-S-K ne razmišljajući o tome koje su odgovarajuće stranice tih trokuta.

No, odgovarajuće su stranice $\overline{HC}$ i $\overline{SP}$, a kako je $|HC| = 4$ cm, a $|SP| = 3$ cm, ovi trokuti nisu sukladni.




Za te trokute vrijedi:

$\Delta HMC \sim \Delta SMP$ prema poučku K-K jer su im dva odgovarajuća kuta sukladna:

$|\angle MHC| = |\angle MPS| = 90°$

$\angle CMH$ zajednički im je kut.

Iz te sličnosti dobijemo

$|HC| : |SP| = |HM| : |MP| \Rightarrow 4 : 3 = |HM| : 4 \Rightarrow |HM| = \frac{16}{3}$ cm.

Sad odredimo duljine dužina $\overline{AE}$ i $\overline{FB}$.

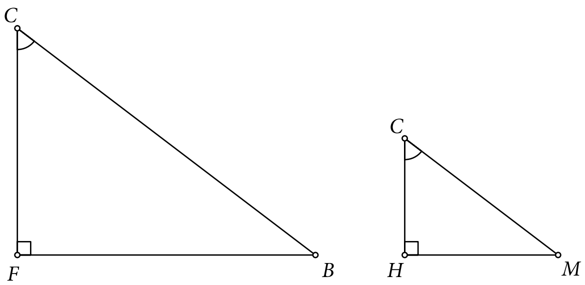
$\Delta AED \sim \Delta NGD$ prema poučku K-K jer su im dva odgovarajuća kuta sukladna:

$|\angle DEA| = |\angle DGN| = 90°$

$|\angle EAD| = |\angle GND|$ jer su to kutovi uz presječnicu $AK$ paralela $AB$ i $NM$.

Iz te sličnosti dobijemo

$|AE| : |NG| = |ED| : |GD| \Rightarrow |AE| : 3 = 8 : 4 \Rightarrow |AE| = 6$ cm.




$\Delta FBC \sim \Delta HMC$ prema poučku K-K jer su im dva odgovarajuća kuta sukladna:

$|\angle BFC| = |\angle MHC| = 90°$

$|\angle FBC| = |\angle HMC|$ jer su to kutovi uz presječnicu $BK$ paralela $AB$ i $NM$.

Iz te sličnosti dobijemo

$$|FB|:|HM|=|FC|:|HC| \Rightarrow |FB|:\frac{16}{3}=8:4 \Rightarrow |FB|=\frac{32}{3} \text{ cm}.$$

Sada je

$|AB|=|AE|+|EF|+|FB| \Rightarrow a=6+b+\frac{32}{3} \Rightarrow a-b=\frac{50}{3}$, a $a+b=20$, pa je iz dobivenog sustava

$|AB|=a=\frac{55}{3}$ cm, a $|DC|=b=\frac{5}{3}$ cm.

Konačno:

Označimo s $x$ duljinu visine trokuta $\Delta DCK$. Onda je $8+x$ duljina visine trokuta $\Delta ABK$.

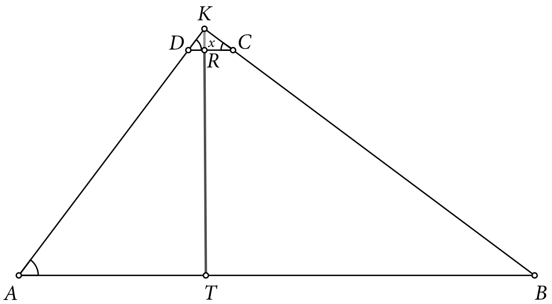
$\Delta ABK \sim \Delta DCK$ prema poučku K-K jer su im dva odgovarajuća kuta sukladna:

$|\angle BAK| = |\angle CDK|$ jer su to kutovi uz presječnicu $AK$ paralela $AB$ i $DC$.

$|\angle KBA| = |\angle KCD|$ jer su to kutovi uz presječnicu $BK$ paralela $AB$ i $CD$.

Iz te sličnosti dobijemo:

$|AB|:|DC|=|TK|:|RK| \Rightarrow \frac{55}{3}:\frac{5}{3}=(8+x):x \Rightarrow x=\frac{4}{5}$ cm.




Dakle, duljina osnovice $\Delta ABK$ je $\frac{55}{3}$ cm, a duljina je pripadne visine $8+x=8+\frac{4}{5}=\frac{44}{5}$ cm, pa mu je površina

$$p_{\Delta ABK}=\frac{1}{2}\cdot\frac{55}{3}\cdot\frac{44}{5}=\frac{242}{3} \text{ cm}^2.$$

Ovo je samo jedan primjer koji ilustrira važnost zapisivanja i provjere uvjeta prilikom primjene poučaka jer često se dogodi da učenici ne navode elemente na osnovi kojih se dokazuje sukladnost ili sličnost trokuta pa tako zaključuju posve pogrešne tvrdnje.

**Literatura:**


1. B. Pavković, D. Veljan: Elementarna matematika 1, Školska knjiga, Zagreb, 2004., 424 str.
2. https://natjecanja.math.hr/drzavno2021/