KUP MATEMATIČKE GIMNAZIJE U BEOGRADU 2021.

Lara Semeš, Luka Protulipac i David Lang, XV. gimnazija, Zagreb

Kup Matematičke gimnazije međunarodno je natjecanje iz matematike, fizike i informatike, a organizira ga Matematička gimnazija u Beogradu od 2013. godine. Ove godine održan je 9. Kup u razdoblju od 23. do 25. lipnja 2021. godine, a države sudionici bile su: Bosna i Hercegovina, Bugarska, Hrvatska, Sjeverna Makedonija, Rumunjska, Srbija i Slovenija. Na natjecanju su sudjelovali učenici rođeni 2005. godine ili kasnije, tj. oni koji pohađaju prvi razred srednje škole, a ove godine sudjelovalo ih je ukupno 104. Hrvatski tim činili su učenici XV. gimnazije u Zagrebu: **Adrian Grbac Lacković**, **David Lang**, **Luka Protulipac** i **Lara Semeš**. Naš tim postigao je izvrsne rezultate te smo ukupno osvojili 8 medalja, od čega 2 zlatne. Lara je osvojila čak 3 medalje: zlatnu iz informatike, srebrnu iz matematike te brončanu iz fizike; David je osvojio zlatnu medalju iz informatike te brončanu iz matematike; Luka je osvojio 2 srebrne medalje: iz matematike i informatike, a Adrian srebrnu medalju iz fizike. Uz to, hrvatski tim je u ukupnom poretku ostvario drugo mjesto na natjecanju iz informatike.

Iskustvo

Ove godine natjecanje je proteklo u sasvim drugačijoj atmosferi jer je održano u online okružju. Nismo, nažalost, imali priliku upoznati nove prijatelje te nismo mogli razgledati Beograd kao što su to običavali timovi koji su se natjecali prijašnjih godina, ali smo i dalje uživali u natjecanju.

Natjecanje iz matematike

Natjecanje iz matematike sastojalo se od 12 zadataka grupiranih u 2 skupine, a svi zadatci nosili su ukupno 100 bodova. U prvoj skupini trebalo je riješiti osam zadataka višestrukog izbora, a svaki zadatak nosio je 5 bodova. Drugi dio činila su četiri složenija zadatka od kojih je svaki nosio 15 bodova. Zadatci te druge skupine bili su podijeljeni na podzadatke, a svaki podzadatak bio je zasebno bodovan te ih je trebalo rješavati redom (bodovi na pojedinom podzadatku priznati su samo ako su svi prijašnji podzadatci istoga zadatka točno riješeni). Pokušajte sami riješiti neke od zadataka s natjecanja.

Prva skupina:

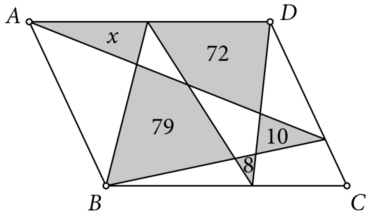
1. Neka su x, y i z različiti realni brojevi, tako da je $x^2 - yz = y^2 + xz = z^2 + xy = 7$. Tada je $x^2 + y^2 + z^2$ jednako:

A) 15 B) 14 C) 12 D) 21 E) 7 F) 9

2. Koliko postoji prirodnih brojeva od 1 do 2021, koji su djeljivi brojem 6 ili brojem 9, ali nisu djeljivi s oba broja?

A) 486 B) 560 C) 392 D) 336 E) 523 F) 448

3. Na slici desno je *ABCD* paralelogram s dužinama koje ga dijele na različite dijelove. Površina nekih dijelova je napisana. Tada je x jednak:



A) 12 B) 10 C) 13
D) 8 E) 11 F) 9

4. Jednom davno tim učenika otišao je u drugu državu na matematičko natjecanje. Bili su smješteni u hotelu u kojemu je svaki kat imao deset soba koje su bile označene uzastopnim prirodnim brojevima, počevši od 10. Sobe od 10 do 19 bile su na prvom katu, sobe od 20 do 29 na drugom, sobe od 30 do 39 na trećem, i tako dalje. Dva člana tima, Igor i Pavle, saznali su da je Pavle smješten na n-tom katu, a n je također Igorov broj sobe i zbroj brojeva njihovih soba je 260. Koja je apsolutna razlika brojeva njihovih soba?

A) 198 B) 292 C) 258 D) 214 E) 246 F) 310

5. Aleksa želi obojiti svaki jedinični kvadrat pravokutnika dimenzija 2×2021 jediničnim kvadratima tako da vrijedi:

(a) svaki je od 4042 kvadrata obojen žutom, crvenom ili plavom bojom; i

(b) kada god dva kvadrata horizontalno ili vertikalno međusobno graniče, oni moraju biti različitih boja. Na koliko različitih načina Aleksa može ovo postići?

A) 2^{2020} B) 3^{2021} C) $2 \cdot 3^{2021}$ D) $3 \cdot 2^{2020}$ E) 3^{2020} F) $3 \cdot 2^{2021}$

6. Za koliko je cijelih brojeva n broj $\dfrac{n}{150-n}$ kvadrat cijelog broja?

A) 6 B) 4 C) 7 ili više D) 2 ili manje E) 5 F) 3

7. Duljine stranica trokuta *ABC* su 1.2 cm, 1.6 cm i 2 cm, a F je skup svih točaka P ravnine *ABC* koje su udaljene 1 cm ili manje od barem dvije točke iz skupa $\{A, B, C\}$. Površina skupa F jednaka je (u cm^2):

A) $\dfrac{\pi}{4}+0.96$ B) $\dfrac{\pi}{4}+0.92$ C) $\pi-1.8$

D) $\dfrac{\pi}{2}-0.9$ E) $\pi-1.92$ F) $\dfrac{\pi}{2}-0.96$

8. Za pozitivni cijeli broj n, s *neparni*(n) označen je najveći neparni djelitelj broja n. Na primjer, *neparni*$(16) = 1$ i *neparni*$(30) = 15$. Tada je zbroj *neparni*(119) + *neparni*(120) + *neparni*(121) + ... + *neparni*(235) + *neparni*(236) jednak:

A) 13 689　　B) 14 161　　C) 13 924

D) 13 790　　E) 13 456　　F) 14 120

Druga skupina

Od zadataka druge skupine odabrali smo kombinatorni zadatak čiji tekst i rješenje možete pročitati u nastavku.

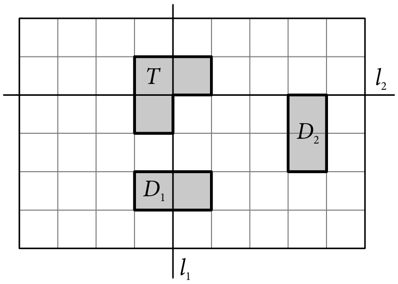
Zadatak 10. *Popločivanje* je postavljanje jedne ili više pločica na neku veću ploču tako da cijela ploča bude prekrivena, ali pločice trebaju u potpunosti ležati na ploči i ne smiju se međusobno preklapati. Pločice je dopušteno rotirati. U ovom ćemo zadatku za popločivanje koristiti dvije vrste pločica: *domino* pločice (▭) i *tromino* pločice L-oblika (⊞).

a) Koliko ima različitih popločivanja ploče dimenzija 2×10 ako koristimo samo *domino* pločice?

b) Koliko ima različitih popločivanja ploče 3×100 ako koristimo samo *tromino* pločice?

c) Pravokutna ploča $n \times m$ $(2 \leq n \leq m)$ najmanja je ploča (ona s najmanjom površinom) koju je moguće popločiti *domino* pločicama tako da vrijedi sljedeći uvjet: svaki pravac paralelan s nekom od stranica ploče, koji siječe unutrašnjost ploče, mora sjeći i unutrašnjost barem jedne *domino* pločice (za više detalja pogledajte sliku i objašnjenje uz nju). Odredite n i m.

d) Nacrtajte barem jedno popločivanje ploče 4×9 *tromino* pločicama tako da bude zadovoljen uvjet: svaki pravac paralelan s nekom od stranica ploče, koji siječe unutrašnjost ploče, mora sjeći i unutrašnjost barem jedne *tromino* pločice.

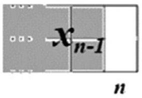


Na slici iznad, pravac l_1 siječe unutrašnjost domino pločice D_1 i tromino pločice T, dok pravac l_2 siječe samo tromino pločicu T.

Rješenje:

a) Neka je x_n broj popločivanja ploče $2 \times n$ *domino* pločicama. Vidimo da je $x_1 = 1$ jer ploču 2×1 možemo popločiti korištenjem jedne *domino* pločice koju je moguće postaviti samo na jedan način. Također, $x_0 = 1$ (površina ploče je 0, pa je jedino rješenje da koristimo 0 pločica). Za veće vrijednosti broja n, vrijednosti x_n možemo računati po redu (od manjih prema većim n) koristeći prethodno izračunate vrijednosti. Promotrimo dva slučaja s kojima se susrećemo kod popločivanja ploče $2 \times n$ (za $n \geq 2$):

1. Zadnji stupac ploče prekrivamo jednom *domino* pločicom (Slika 1). Primijetimo da je broj takvih popločivanja jednak x_{n-1} jer smo na sva popločivanja ploče $2 \times (n-1)$ samo dodali jednu *domino* pločicu.



Slika 1.

Slika 1. Osjenčano područje predstavlja prvih $n-1$ stupaca, koji mogu biti popločeni na x_{n-1} načina. Bijelom je bojom označen zadnji stupac koji je popločen jednom pločicom.

2. Zadnja 2 stupca ploče prekrivamo dvjema vodoravno položenim pločicama (Slika 2). Broj takvih popločivanja je x_{n-2} jer smo na sva popločivanja ploče $2 \times (n-2)$ samo dodali ove dvije pločice.

Slika 2.

Slika 2. Osjenčano područje predstavlja prvih $n-2$ stupaca koji mogu biti popločeni na x_{n-2} načina. Bijelom su bojom označene 2 pločice u zadnja 2 stupca.

Spajanjem ovih slučajeva dolazimo do jednakosti $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Sada samo preostaje izračunati x_{10} jer je to rješenje za ploču 2×10.

Brojevi od x_0 do x_{10} su redom 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 i 89. Dakle, rješenje je $x_{10} = 89$.

Napomena: za svaki n, $n \geq 1$, vrijedi $x_n = F_{n+1}$, pri čemu je F poznati Fibonaccijev niz.

b) Slično kao u zadatku a), definirajmo x_n kao broj popločivanja ploče $3 \times n$ *tromino* pločicama. Znamo da je $x_0 = 1$ i ponovno možemo vrijednosti x_n računati od manjih prema većim n. Promotrimo dva slučaja do kojih dolazimo kod popločivanja ploče $3 \times n$ (za $n \geq 2$):

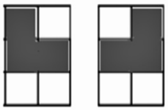
1. Zadnja dva stupca prekrivamo dvjema pločicama kao na Slici 3. Broj ovakvih popločivanja je x_{n-2} jer smo na popločivanja ploče dimenzija $3 \times (n-2)$ samo dodali ove dvije pločice.

Slika 3.

Slika 4.

2. Zadnja dva stupca prekrijemo pločicama kao na Slici 4. Broj ovakvih popločivanja je, kao i u 1. slučaju, x_{n-2}.

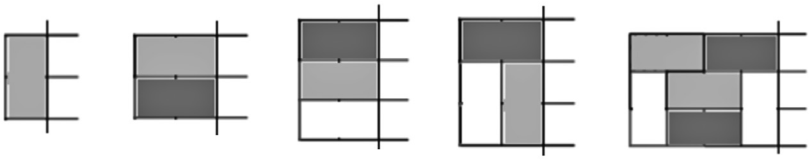
Primijetimo da *tromino* pločice nije moguće postaviti drugačije (ako ih postavimo u neki od položaja prikazanih na Slici 5, nije moguće postaviti ostale pločice tako da popločivanje bude pravilno).



Slika 5.

Dakle, pomoću ovih slučajeva dolazimo do jednakosti $x_n = 2x_{n-2}$. To znači da za svaki paran broj n (tj. za $n = 2k$) vrijedi $x_n = 2^k$, pa slijedi da je $x_{100} = 2^{50}$, i to je rješenje koje se traži u zadatku.

c) Za $n \leq 4$ ne postoji ploča koja zadovoljava zadani uvjet. Najjednostavniji način da se to dokaže je isprobavanje raznih popločivanja za ploče malih dimenzija (za dimenzije do 4×4 nema puno različitih popločivanja, a neka od njih su prikazana na slikama:



Ovo su neki primjeri popločivanja manjih ploča koji ne zadovoljavaju uvjet. Vertikalne crne linije na slikama primjeri su linija koje ne prolaze kroz unutrašnjost pločica.

Pogledajmo sada slučaj kad je $n = 5$. Zbog uvjeta da je $m \geq n$, najmanji je mogući m upravo 5. Ali, ploča 5×5 ne može se popločiti *domino* pločicama jer 5×5 nije djeljivo brojem 2 (površina ploče nije djeljiva površinom pločice), pa je najmanji mogući $m = 6$. Zaista, za ploču 5×6 postoje popločivanja koja zadovoljavaju uvjet, a jedno od njih je na slici ispod.

Ovo je jedno od pravilnih popločivanja ploče 5×6.

d) Jedno od mogućih popločivanja prikazano je na slici:

Literatura:

1. https://www.cup.mg.edu.rs/

Rješenja zadataka prve skupine:

1. B) 14 2. D) 336 3. E) 9 4. D) 214

5. C) $2 \cdot 3^{2021}$ 6. E) 5 7. E) $\pi - 1.92$ 8. C) 13 924