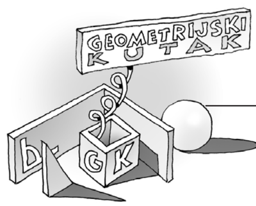
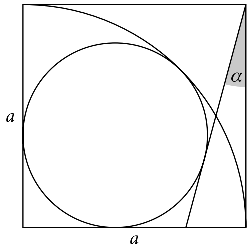


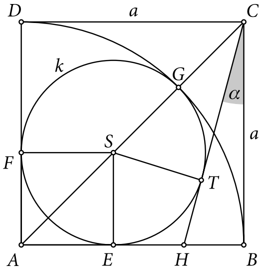
TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

Nastavljamo se baviti primjerima i zadatcima o trokutu, četverokutu i krugu. Tekst započinjemo rješenjem zadatka koji je postavljen u prošlom broju Matke.

Primjer 1. Zadan je kvadrat sa stranicom duljine a. Kolika je veličina kuta α?



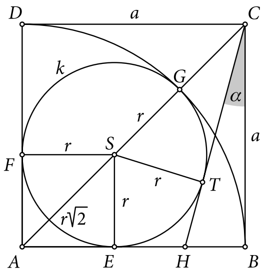


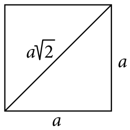
Rješenje: Označimo vrhove zadanoga kvadrata $ABCD$, a zadanu kružnicu označimo s k (crtež lijevo).

Istaknimo dijagonalu kvadrata $\overline{AC}$. Na toj se dijagonali nalazi središte S kružnice k koja dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ te luk radijusa a sa središtem u vrhu A. Dijagonala $\overline{AC}$ istaknuti luk siječe u točki G.

Točka T dirałište je odsječka tangente $\overline{CH}$ i kružnice k. Stoga je $\angle CTS$ pravi kut.

Označimo s r duljinu polumjera kružnice k. Označimo li točke u kojima kružnica k dira dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ s E i F, možemo uočiti da je četverokut $AESF$ kvadrat sa stranicom duljine r. Dijagonala toga kvadrata je dužina $\overline{AS}$ čija je duljina $r\sqrt{2}$ prema formuli za duljinu dijagonale kvadrata kojemu je poznata duljina stranice.





Sa slike možemo zaključiti da je $|AG|=|AS|+|SG|=r\sqrt{2}+r=r\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Također vrijedi $|AG|=|AB|=a$, iz čega slijedi da je $a=r\left(\sqrt{2}+1\right)$.

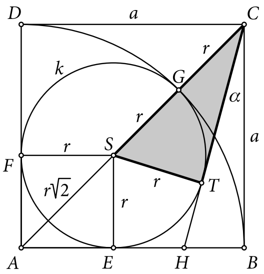
Dijagonala $\overline{AC}$ kvadrata $ABCD$ ima duljinu $a\sqrt{2}$, stoga vrijedi

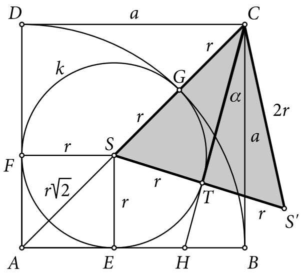
$$|AC|=a\sqrt{2}=r\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\sqrt{2}=r\left(\sqrt{2}\right)^2+r\sqrt{2}=2r+r\sqrt{2}\,.$$

Pomoću ovoga rezultata možemo izračunati duljinu dužine $\overline{GC}$.

$$|GC|=|AC|-|AG|=\left(2r+r\sqrt{2}\right)-r\left(\sqrt{2}+1\right)=2r+r\sqrt{2}-r\sqrt{2}-r=r\,.$$

Istaknimo trokut STC.

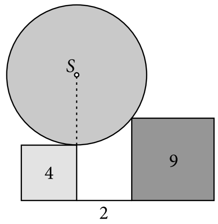




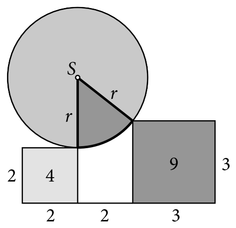
Trokut STC je pravokutan, s pravim kutom pri vrhu T. Hipotenuza $\overline{SC}$ dvostruko je dulja od kraće katete $\overline{ST}$, što znači da je trokut STC polovina jednakostraničnoga trokuta $SS'C$ koji se dobiva zrcaljenjem trokuta STC s obzirom na pravac HC. Trokut ABC je pravokutan i jednakokračan pa je $|\angle ACB| = 45°$, a $|\angle SCT| = \frac{1}{2}|\angle SCS'| = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

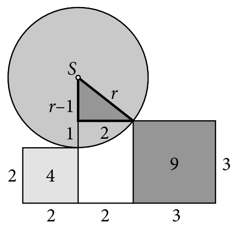
Slijedi da je $\alpha = |\angle ACB| - |\angle SCT| = 45° - 30° = 15°$.

Primjer 2. Izračunajmo površinu kruga na slici koji dira kvadrate u vrhovima ako su zadane površine kvadrata i njihova međusobna udaljenost.



Rješenje: Iz zadanih površina kvadrata možemo izračunati duljine njihovih stranica. Manji kvadrat ima stranice duljine 2, a veći stranice duljine 3. Spojimo li središte kruga s vrhovima kvadrata u kojima diraju krug, istaknut ćemo kružni isječak kako je prikazano na slici. Unutar kružnoga isječka možemo istaknuti pravokutni trokut kojemu katete imaju duljine 2 i $r-1$, a hipotenuza ima duljinu r, gdje je r duljina polumjera kruga.





Primjenom Pitagorina poučka na istaknuti pravokutni trokut dobivamo

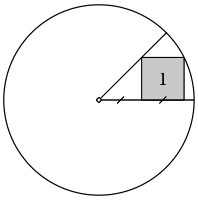
$$(r-1)^2 + 2^2 = r^2$$

$$r^2 - 2r + 1 + 4 = r^2$$

$$r = \frac{5}{2}.$$

Dakle, površina je kruga $p = r^2\pi = \frac{25\pi}{4}$.

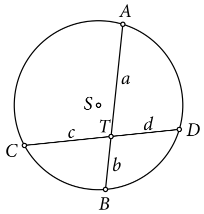
Primjer 3. Izračunajmo površinu kruga na slici ako istaknuti kvadrat ima površinu 1.



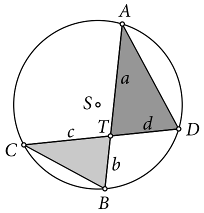
Rješenje: Za rješenje ovoga problema poslužit ćemo se jednom poznatom tvrdnjom koju nije teško dokazati.

Pomoćna tvrdnja:

Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ po volji odabrane tetive kružnice koje se međusobno sijeku u točki T. Ako točka T tetivu $\overline{AB}$ dijeli na dijelove duljina a i b, a tetivu $\overline{CD}$ na dijelove duljina c i d, onda vrijedi $ab = cd$.



Dokaz pomoćne tvrdnje: Istaknimo trokute ATD i CTB.



Za ova dva trokuta vrijedi:

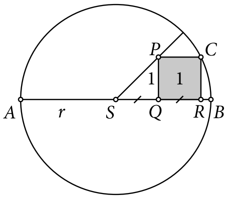
$|\angle DTA| = |\angle CTB|$ jer su oni vršni kutovi sa zajedničkim vrhom u točki T;

$|\angle TAD| = |\angle BCT|$ jer su to obodni kutovi nad istim kružnim lukom $\overset{\frown}{BD}$.

Prema KK poučku o sličnosti trokuta vrijedi da su ATD i CTB međusobno slični trokuti pa su i njihove odgovarajuće stranice proporcionalne, tj. vrijedi

$\frac{|AT|}{|CT|} = \frac{|DT|}{|BT|} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{b} \Rightarrow ab = cd$. Ovime je dokazana pomoćna tvrdnja.

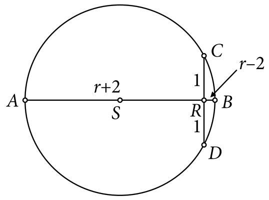
Prijeđimo sada na rješavanje zadanoga primjera. Uvedimo oznake istaknutih točaka, a duljinu polumjera kružnice označimo s r.



Najprije uočimo da prema uvjetima zadatka uz uvedene oznake vrijedi $|SQ| = |QR| = |RC| = 1$.

Također vrijedi $|AR| = r + 2$ i $|RB| = r - 2$.

Zrcaljenjem točke C s obzirom na pravac AB dobiva se točka D koja pripada zadanoj kružnici.



Očigledno vrijedi da je $|DR| = |RC| = 1$ jer su točke C i D međusobno osnosimetrične s obzirom na pravac AB.

Prema pomoćnoj tvrdnji vrijedi

$$|AR| \cdot |RB| = |CR| \cdot |RD|$$
$$(r+2) \cdot (r-2) = 1 \cdot 1$$
$$r^2 - 4 = 1$$
$$r^2 = 5.$$

Iz formule za površinu kruga slijedi $p = r^2\pi = 5\pi$.

Zadatak. Kolika je veličina kuta α?