Matka 30 (2021./2022.) br. 117

MATEMAGIČAR

Petar Mladinić, Zagreb

TABLIČNO RAČUNANJE

Stari su Kinezi poznavali metodu rješavanja sustava linearnih jednadžbi koje su bile predočene koeficijentima nepoznanica pomoću bambusovih štapića. Na taj način rješavanje sustava linearnih jednadžbi bio je preteča ili prapočetak danas poznatog tabličnog računa – računa s determinantama i matricama.

Kad su japanski matemagičari upoznali tu kinesku metodu determinanti (čiji se naziv tek 1812. godine uveo u matematiku), ideja je odmah prihvaćena. Najveći japanski matemagičar 17. stoljeća **Seki Kowa** (1642. – 1708.) godine 1683. napisao je rad *Kai Fukudai no Ho* u kojemu razmatra determinante i metode uporabe tog pojma.

Pojam i uporabu determinanti razrađivali su matemagičari: 1693. godine **G. W. Leibniz** (1646. – 1716.), godine 1750. **G. Kramer** (1704. – 1752.), godine 1771. **A. Vandermonde** (1735. – 1796.), godine 1772. **P. S. Laplace** (1749. – 1827.), godine 1773. **J. L. Lagrange** (1736. – 1813.), a godine 1801. **K. F. Gauss** (1777. – 1855.). Godine 1812. **A. L. Cauchy** (1789. – 1857.) prvi je u povijesti matematike uporabio naziv *determinanta*. Razradio je teoriju determinanti kao nezavisnu granu moderne matematike.

Tek u radovima **W. R. Hamiltona** (1805. – 1865.) i **J. J. Sylvestera** (1814. – 1897.) nakon 1850. godine počinje se javljati novi pojam nazvan *matrica*. Temeljni rad o matricama godine 1855. objavio je **A. Cauchy**.

1. Uvod

Matrice, i u manjoj mjeri determinante, nalaze primjenu u fizici i srodnim znanostima – u inženjerstvu, ekonomiji, društvenim znanostima i drugim područjima gdje se obrađuje ogromna količina podataka. U školskoj matematici rabe se u rješavanju sustava linearnih jednadžbi te u rješavanju niza drugih problema.

Što je to *matrica*, a što *determinanta*?

To su *tablično zapisani podatci*. Svaka se tablica sastoji od redaka i stupaca, tj. svaka je tablica pravokutnog oblika i u njoj se zapisuju podatci.

Primjer 1. Evo pravokutne tablice koja ima 2 retka i 3 stupca.

5	2	0
7	1	4

Brojevi 5, 2, 0, 7, 1 i 4 zovu se *elementima tablice* i matemagičari ih ovako pojedinačno zapisuju: $a_{11} = 5$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 7$, $a_{22} = 1$ i $a_{23} = 4$. Element $a_{12} = 2$ označava da se broj 2 nalazi u prvom retku i drugom stupcu.

Primjer 2. Dana je kvadratna tablica drugog reda koja se inače u matematici zapisuje ovako:

$$\begin{vmatrix} 15 & 7 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Izračunajmo broj koji se pridružuje ovoj tablici i koji se zove *determinanta*. Broj $15 \cdot 10 - 8 \cdot 7 = 150 - 56 = 94$ tražena je vrijednost.

Općenito, ako je zadana kvadratna tablica $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, onda se njoj pridružuje broj $a \cdot d - b \cdot c$, a kvadratnoj tablici trećeg reda

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h) - (g \cdot e \cdot c + h \cdot f \cdot a + i \cdot d \cdot b).$$

Zadatak 1. Izračunajte vrijednost determinante:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$,   b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

Rješenje: a) 3; b) -15.)

Dakle, *determinanta* je brojčana vrijednost tabličnog zapisa brojeva (podataka).

Matrica nema to svojstvo. Naime, matrica nije jednaka nekom broju, tj. matrici se ne pridružuje broj kao što se pridružuje determinanti. *Matrica* je pravokutna tablica s m redaka i n stupaca kojom su prikazani podatci tako da je broj a_{ij} zapisan na mjestu u i-tom retku i j-tom stupcu.

Primjer 3 Napišimo matricu sa sljedećim elementima: $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 3$, $a_{14} = 2$, $a_{21} = 5$, $a_{22} = 7$, $a_{23} = 8$, $a_{24} = -5$.

Rješenje. Pravokutna tablica ima 2 retka i 4 stupca.

	1. stupac	2. stupac	3. stupac	4. stupac
1. redak	0	1	3	2
2. redak	5	7	8	-5

Matemagičari za ovu tablicu kažu da je dimenzije ili tipa 2×4 i zovu *matricom*. Matrice matemagičari uobičajeno zapisuju ovako

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3 & 2\\ 5 & 7 & 8 & -5\end{pmatrix}$$

2. Računanje s matricama

Brojeve možemo zbrajati, množiti, kvadrirati itd. Možemo li nešto slično činiti i s matricama?

Matrice možemo množiti nekim brojem, možemo ih zbrajati i možemo ih međusobno množiti.

a) Zbrajanje matrica

Zbrajati se mogu samo matrice **istog** tipa.

Primjer 4. Zbrojimo matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 7\\ 0 & 6 & 4\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 4 & 6 & 0\\ 1 & 7 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Rješenje. Matrice **A** i **B** su tipa 4×3 i mogu se zbrojiti tako da zbrojimo elemente na istome mjestu u obje matrice. Dakle imamo

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3+2 & -2+4 & 7+3\\ 0+4 & 6+6 & 4+0\\ 4+1 & 1+7 & 1+4\\ 1+2 & 3+3 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 10\\ 4 & 12 & 4\\ 5 & 7 & 5\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}.$$

b) Množenje matrice nekim brojem

Matrica se množi nekim brojem k tako da se tim brojem pomnože **svi** elementi zadane matrice.

Primjer 5. Zadana je matrica $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 7\\ 0 & 6 & 4\end{pmatrix}$. Pomnožimo matricu **A** brojem 2.

Rješenje. Rezultat zadatka je nova matrica istoga tipa. Svaki element matrice **A** pomnožimo s 2. Dakle vrijedi

$$2\cdot\begin{pmatrix}3 & -2 & 7\\ 0 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -4 & 14\\ 0 & 12 & 8\end{pmatrix}.$$

c) Množenje matrica

Matrice se mogu množiti ako su im tipovi *ulančani*, tj. ako druga matrica ima toliko redaka koliko prva ima stupaca. Ako je prva matrica tipa $m \times n$, onda druga mora biti tipa $n \times s$. Rezultat množenja tih dviju matrica bit će nova matrica tipa $m \times s$.

Primjer 6. Pomnožimo matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Rješenje. Matrica **A** je tipa 2×3, a matrica **B** tipa 3×2 i ulančane su pa ih možemo množiti. Rezultat će biti matrica **C** tipa 2×2. Njezini se elementi dobivaju kao zbroj umnožaka elemenata matrica **A** i **B**, tj. kao zbroj umnožaka elemenata retka i stupca. Elementi matrice **C** su:

$$c_{11} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 14,$$

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8,$$

$$c_{21} = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 3 = 38,$$

$$c_{22} = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 20.$$

Dakle dobivamo matricu $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 38 & 20 \end{pmatrix}$.

3. Primjena matrica

Riješimo sljedeći problem.

Primjer 7. Građevinsko poduzeće dobilo je posao izgradnje 3 stambene zgrade, 5 dječjih vrtića i 9 domova umirovljenika. Potreban građevinski materijal je: cement, drvo, staklo i željezo. Količina materijala i potreban rad u jedničnim mjerama dani su tablicom, odnosno matricom A:

	cement	drvo	staklo	željezo	radna snaga
stambena zgrada	10	17	8	5	11
dječji vrtić	7	12	4	3	8
dom umirovljenika	5	15	10	4	9

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 17 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Jedinica cementa stoji 12 novčanih jedinica, jedinica drva 7 novčanih jedinica, jedinica stakla 5 novčanih jedinica, jedinica željeza 4 novčane jedinice i jedinica radne snage 10 novčanih jedinica.

Odredimo:

a) Kolika je ukupna količina potrebnih materijala i radne snage?

b) Kolika je vrijednost materijala i radne snage za svaki tip gradnje?

c) Kolika je ukupna vrijednost posla?

Rješenje. Definirajmo matricu **B** iz tablice s brojem zgrada (stambenih zgrada, dječjih vrtića i domova umirovljenika), tj. vrijedi tablica

stambena zgrada	dječji vrtić	dom umirovljenika
	5	9

i njezina odgovarajuća matrica B

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \end{pmatrix},$$

dok je iz tablice novčanih jedinica (cementa, drva, stakla, željeza i radne snage)

cement	12
drvo	7
staklo	5
željezo	4
radna snaga	10

pripadna matrica $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

a) Ukupna količina potrebnih materijala i radne snage dobiva se množenjem $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Matrica **B** je tipa 1×3 , a matrica **A** tipa 3×5 i očito su ulančane pa se mogu pomnožiti. Umnožak je matrica tipa 1×5 .

Imamo $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 17 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 246 & 134 & 66 & 154 \end{pmatrix}$.

b) Vrijednost materijala i radne snage za svaki tip gradnje dobiva se množenjem $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$. Matrica **A** tipa je 3×5, a matrica **C** tipa 5×1. Umnožak je matrica tipa 3×1.

Imamo $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}10 & 17 & 8 & 5 & 11\\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8\\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\7\\5\\4\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}409\\280\\321\end{pmatrix}$.

c) Ukupna vrijednost posla jednaka je umnošku matrica **B**, **A** i **C**, tj. vrijedi

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=\begin{pmatrix}3 & 5 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}409\\280\\321\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5516\end{pmatrix}.$$

Odavde zaključujemo da je ukupna vrijednost posla 5516 novčanih jedinica.

4. Zadatci

1. Množenje i zbrajanje matrica je distributivno i asocijativno, ali nije komutativno, tj. općenito vrijedi:

(a) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$,

(b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$,

(c) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$,

(d) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

Za vježbu provjerite ova svojstva za matrice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 2\end{pmatrix},\mathbf{C}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 7\end{pmatrix}.$$

2. Pekar isporučuje jednu vrstu kruha. Vrećicu s jednim kruhom naplaćuje 6.30 kn, a vrećicu s dvostrukim kruhom 10.20 kn. Prvi tjedan prodavaonici isporučuje 160 vrećica s jednim kruhom i 72 vrećice s dvostrukim kruhom, drugi tjedan 190 vrećica s jednim kruhom i 80 vrećica s dvostrukim kruhom, a treći tjedan 184 vrećica s jednim kruhom i 100 vrećica s dvostrukim kruhom.

Isporuku kruhova prikažite primjenom matrica za svaki od tjedana, kao i njihovu ukupnu vrijednost.

Rješenje: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6.30 & 10.20\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}160 & 190 & 184\\ 72 & 80 & 100\end{pmatrix},\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}304 & 350 & 384\\ 1742.4 & 2013 & 2179.2\end{pmatrix}.$

tjedan	1.	2.	3.
ukupan broj kruhova	304	350	384
ukupna vrijednost u kunama	1742.4	2013	2179.2

3. Udruga potrošača izračunala je srednje cijene maloprodajnih proizvoda poznate robne marke i generičkih proizvoda u tri različite trgovine u nekom gradu. Cijene su prikazane u sljedećoj tablici koja definira matricu tipa 3×2.

	poznata marka	generička marka
prodavaonica A	3.97	3.64
prodavaonica B	3.78	3.69
prodavaonica C	3.75	3.67

Država ima porez na promet od 25 %. Matrično prikažite usporedne cijene proizvoda s uključenim porezom na promet. (Uputa: Pomnoži izvornu matricu brojem 1.25. Zašto s 1.25 a ne s 0.25?)

4. Cvjećarnice I., II. i III. za Majčin dan izrađuju tri različita buketa cvijeća, a svaki uključuje ruže, karanfile i ljiljane. Tablica prikazuje broj svake vrste cvijeća koji se koristi u svakom aranžmanu.

	I.	II.	III.
ruže	5	8	3
karanfili	6	6	7
ljiljani	4	4	3

Cvjećarnice svoje cvijeće mogu nabaviti kod dva različita veletrgovaca V_1 i V_2, ali cijelu svoju nabavku željele bi obaviti samo s jednim od njih. Cijena svake vrste cvijeća kod dva veletrgovaca prikazane su u tablici.

	V_1	V_2
ruža	15	13.50
karanfil	9.50	10
ljiljan	13	13.50

Prikažite matricom troškove izrade svakog od tri cvjetna aranžmana od cvijeća koje isporučuju dvije veletrgovine.