

PANDEMIJA I EKSPONENCIJALNI RAST

Tvrtko Tadić, Microsoft, Redmond, SAD

Tijekom prethodnih godinu dana susreli smo se s mnogo podataka i grafova o broju oboljelih i umrlih tijekom pandemije koronavirusa. Mnogi su imali priliku slušati o modelima ili eksponencijalnom rastu gledajući u razne grafičke prikaze podataka. U ovom ćemo članku pokušati objasniti što je eksponencijalni rast, kako ga uočiti, kako se njime modelira te koji su izazovi njegova korištenja.

Broj zaraženih

Kad kažemo da nešto ima obilježje eksponencijalnog rasta, obično se misli na neočekivano brz rast. Tijekom pandemije koronavirusa svijet je ostao zatečen brojem zaraženih iz dana u dan. Pogledajmo tablicu (ukupnog) broja zaraženih u SAD-u tijekom prvih 10 dana ožujka.

Dan u mjesecu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Broj zaraženih	42	72	114	243	304	434	578	751	1016	1408

Tablica 1. Ukupan broj zaraženih do određenog dana u ožujku 2020. u SAD-u

Ono što možemo zamijetiti je da se u ovom nizu podataka svaka dva dana broj zaraženih skoro **udvostruči**. Određeni broj zaraženih trebat će liječničku pomoć, neće moći ići na posao ili u školu. Vrlo brzo pojavila se potreba za matematičkim modelima koji bi na temelju trenutno dostupnih podataka u nadolazećem razdoblju procijenili:

- broj zaraženih;
- broj ljudi koji će trebati bolnički smještaj;
- broj onih koji će, nažalost, preminuti.

Na temelju tih procjena oni koji donose odluke planiraju koliko bolesničkih kreveta trebaju, kako organizirati pokop mrtvih te, ako postoji opasnost za društvo, koje odluke donijeti da bi se suzbila pandemija (matematičkim rječnikom, usporio rast broja zaraženih).

Što je eksponencijalni rast

U idealnom slučaju, kažemo da niz brojeva **raste eksponencijalno** ako je omjer *trenutnog* i *prethodnog* člana niza pozitivna konstanta veća od 1.

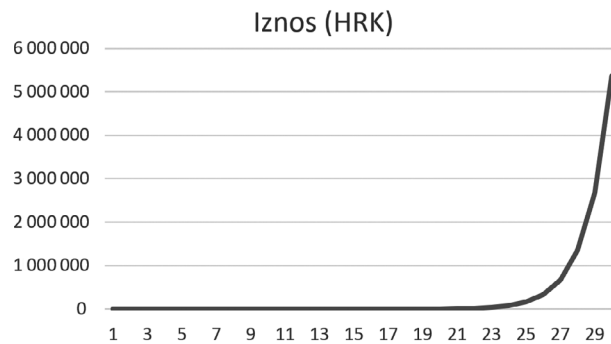


Jednostavan primjer

Obećate bratu da ćete tijekom cijeloga mjeseca svaki dan čistiti njegovu sobu. Prvi dan naplatit ćete 1 lipu za svoje usluge, drugi ćete tražiti dvostruko više, i tako svaki sljedeći dan dvostruko više nego prethodni. Koliko će vam brat novca morati platiti zadnji dan čišćenja?

Kako bismo odgovorili na to pitanje, koristit ćemo proračunske tablice u *Microsoft Excelu*¹, a možemo i grafički prikazati kako taj iznos raste.

Dan	Iznos (HRK)
1	0.01
2	0.02
3	0.04
4	0.08
5	0.16
6	0.32
7	0.64
8	1.28
9	2.56
10	5.12
11	10.24
12	20.48
13	40.96
14	81.92
15	163.84
16	327.68
17	655.36
18	1310.72
19	2621.44
20	5242.88
21	10485.76
22	20971.52
23	41943.04
24	83886.08
25	167772.16
26	335544.32
27	671088.64
28	1342177.28
29	2684354.56
30	5368709.12



Slika 1. Rast cijene čišćenja sobe



Tablica 2. Proračun u Excelu cijene čišćenja bratove sobe

¹Microsoft Excel dio je Microsoft Office alata koji su besplatno dostupni svim zaposlenicima i učenicima u Hrvatskoj. Više informacija dostupno je na <https://office365.skole.hr>





Pretpostavimo da mjesec ima 30 dana. Prema ovome dogovoru samo za zadnji dan čišćenja sobe brat će trebati platiti **5.3 milijuna kuna**. Eksponencijalnim smo rastom od 1 lipa došli do 5 milijuna kuna u samo 30 dana.

Cijena čišćenja u ovome slučaju raste eksponencijalno jer je omjer cijene u dva uzastopna dana konstantan.

n	1	2	3	...	28	29	30
$\frac{\text{cijena čišćenja u danu } n}{\text{cijena čišćenja u danu } n - 1}$	2	2	2		2	2	2

Tablica 3. Omjer cijene čišćenja sobe u dva uzastopna dana

Rast broja zaraženih

Pogledajmo podatke o broju zaraženih:

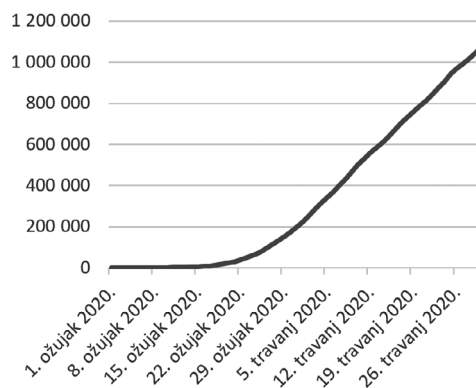
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\text{zaraženi u danu } n}{\text{zaraženi u danu } n - 1}$	1.71	1.58	2.13	1.25	1.42	1.33	1.29	1.35	1.38

Tablica 4. Omjer ukupnog broja zaraženih u dva uzastopna dana.

30. travanj 2020.	1 073 216
29. travanj 2020.	1 043 198
28. travanj 2020.	1 016 930
27. travanj 2020.	991 739
26. travanj 2020.	969 347
25. travanj 2020.	942 051
24. travanj 2020.	906 291
23. travanj 2020.	872 083
22. travanj 2020.	840 119
21. travanj 2020.	810 932
20. travanj 2020.	784 893
19. travanj 2020.	758 946
18. travanj 2020.	731 416
17. travanj 2020.	703 456
16. travanj 2020.	671 496
15. travanj 2020.	639 926
14. travanj 2020.	610 024
13. travanj 2020.	584 158

Prvo što Matkači mogu uočiti jest da u ovome primjeru omjer *varira* između vrijednosti 1.25 i 2.13. U stvarnosti, eksponencijalan rast će rijetko biti *idealno* te će spomenuti omjer rijetko imati stalnu vrijednost.

Međutim, ovaj omjer uvijek je veći od 1.25, što znači da bi, kad bi se ovo nastavilo, ukupan broj zaraženih svaki dan bio barem za četvrtinu veći od prethodnog dana, tako da možemo reći da je ovaj rast brži



Slika 2. Rast broja zaraženih u SAD-u



od eksponencijalnog. Kada bi se ovakav trend nastavio, na 47. dan imali bismo sigurno **preko milijun zaraženih**.

30. travnja (60. dan) zabilježeno je 1 073 216 slučajeva zaraze u SAD-u. U 61 dan od 42, broj zaraženih narastao je na preko milijun.

Neodrživost eksponencijalnog rasta

Iz priloženih podataka možemo zaključiti nekoliko stvari:

- broj zaraženih, kao i cijena čišćenja sobe, došli su do iznimno velikih vrijednosti u kratkome roku;
- grafovi na Slici 1. i 2. očito se razlikuju, pitanje je kako.

Kao što smo vidjeli na primjeru čišćenja sobe, eksponencijalni je rast strahovito brz. Toliko brz da si vaš brat za 20 dana teško može priuštiti vaše usluge, a za 30 dana neće ih nikad moći otplatiti, tako da taj novac sigurno nikada nećete vidjeti.

Slično je i u prirodi; eksponencijalni rast obično je **kratkotrajan**. Kada bi koronavirus rastao jednako kao na početku, zarazio bi sve ljude na svijetu i onda više ne bilo moguće nikakvo povećanje. Zato obično takav tip rasta traje jedno vrijeme, nakon čega možda imamo nešto sporiji eksponencijalni rast ili dođe do još jačeg usporavanja zbog raznih mjera kako bi se pojava suzbila.

Zato vidimo da je i u slučaju koronavirusa u SAD-u došlo do usporavanja.

Procjena eksponencijalnog rasta na početku

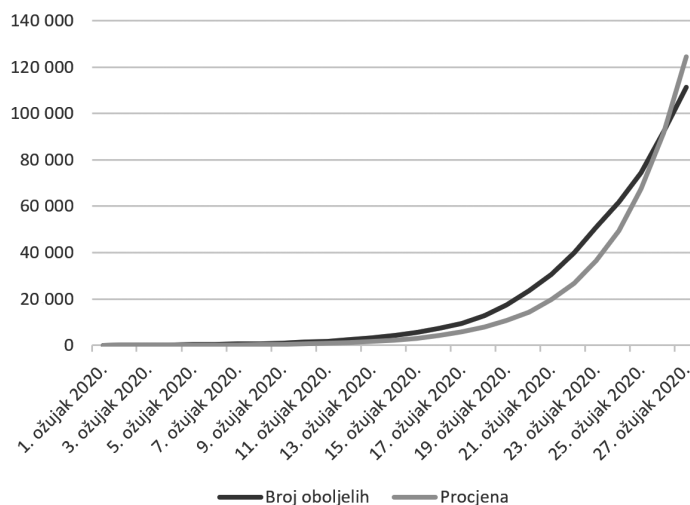
Od 1. do 27. ožujka ukupan broj zaraženih rastao je svaki dan za bar 20 % u odnosu na prethodni, a u prosjeku 36.45 %. Napravimo mali eksperiment u Excelu:

- Neka u pokusu broj zaraženih prvi dan bude 42.
- Svaki dan neka broj zaraženih u pokusu raste za 36 %, tj. omjer zaraženih u trenutnom danu i prethodnom danu neka je 1.36.

Pogledajmo rezultat na slici. Stvarni su brojevi iznad onih u pokusu, dok ih brojevi iz pokusa preteknu tek pred kraj.

U ožujku 2020. američki političari nisu se mogli dogovoriti oko točne procjene broja respiratora potrebnih u bolnicama u New Yorku. Grad New York, gusto naseljeno područje, imao je iznimno brz rast slučajeva i mnogi su trebali bolničko liječenje. Tadašnji guverner države New York procijenio je broj potrebnih respiratora na 30 000, dok je predsjednik SAD-a u intervjuu





Slika 3. Eksponencijalni rast s omjerom 1.36 i rast broja zaraženih

jednoj televiziji rekao da je ta brojka pretjerana: *Ne vjerujem da treba 40 000 ili 30 000 respiratora. Imate velike bolnice koje imaju samo 2 respiratora.*

Treba imati na umu da je i uz pretpostavku eksponencijalnog rasta teško predvidjeti točne brojke. Kao što smo vidjeli u Tablici 1., omjer nikad nije konstantan pa male promjene u procjeni rasta mogu dovesti do ogromnih razlika u procjeni.

Osvrt

Kao što smo vidjeli, eksponencijalni rast može biti nezamislivo brz pa u slučaju iznimno zarazne bolesti može dovesti do toga da velik broj ljudi bude zaražen u kratkome roku. Modeliranje i predviđanje broja zaraženih nije lagan posao.

Izazova je više:

- Eksponencijalni rast, kao što je već navedeno, nije održiv. Za dugoročnija predviđanja treba koristiti složenije i naprednije modele.
- Koliko je zaraženih zaista evidentirano? Kao što je poznato, mnogi su preboljeli koronavirus bez ikakvih simptoma pa nisu ni znali da su zaraženi.
- Ljudska intervencija, kao što je povećana svjesnost o problemu, ograničavanje nekih događaja, ... mogu dovesti do neočekivane promjene trenda, pa čak i do, u najboljem slučaju, potpunog zaustavljanja širenja bolesti.

Dodatak

Podake u ovome članku prikupio je Centar za kontrolu i prevenciju bolesti SAD-a. Čitatelji ih mogu naći na web-stranici <https://covid.cdc.gov/covid-data-tracker>. Mnoge ih publikacije obrađuju, tako su podatci za ukupan broj obolje-



lih u SAD-u korišteni u ovom članku preuzeti sa stranice <https://covidtracking.com/data/national>.

Excel dokument korišten za izradu ovoga članka dostupan je na lokaciji web.math.hr/~tvrtko/Matka/Covid2.

Izračun eksponencijalnog rasta – primjer u Excelu

Pokazat ćemo primjer izračuna troška čišćenja bratove sobe. Otvorite Excel i pratite sljedeće korake.

D	E
Dan	Iznos (HRK)
1	0.01
2	

Korak 1. Stupce nazovite *Dan* i *Iznos (HRK)*. Stavite redne brojeve dana i početni iznos od 0.01 (1 lipa)

D	E
Dan	Iznos (HRK)
1	0.01
2	=E2*2

Korak 2. U polje ispod početnog iznosa upišite $=$, kliknite na početno polje i pomnožite brojem 2.

D	E
Dan	Iznos (HRK)
1	0.01
2	0.02

Korak 3. Odaberite prva dva polja i proširite tako da vaš odabir pokrije 30 redova u stupcu.

D	E
Dan	Iznos (HRK)
1	0.01
2	0.02
...	
30	

Korak 4. Odaberite polje u kojem smo izračunali iznos za drugi dan, pritisnite CTRL+C (*copy*) i odaberite sve prazne ćelije za preostalih 28 dana i pritisnite CTRL+P (*paste*).

Dobili smo tablicu u kojoj je svaki red dvostruko veći od prethodnog.

D	E	F
Dan	Iznos (HRK)	
1	0.01	
2	0.02	
3	0.04	
4	0.08	
5	0.16	
6	0.32	
7	0.64	
8	1.28	
9	2.56	
10	5.12	
11	10.24	
12	20.48	
13	40.96	
14	81.92	
15	163.84	
16	327.68	
17	655.36	
18	1310.72	
19	2621.44	
20	5242.88	
21	10485.76	
22	20971.52	
23	41943.04	
24	83886.08	
25	167772.16	
26	335544.32	
27	671088.64	
28	1342177.3	
29	2684354.6	
30	5368709.1	

