JBMO 2021.

Luka Duplančić, Nikola Vujica, XV. gimnazija, Zagreb

Juniorska balkanska matematička olimpijada ili, skraćeno, JBMO matematičko je natjecanje koje se održava svake godine tijekom ljeta. Organizira je MASSEE (Mathematical Society of SouthEastern Europe). Prvi put održala se 1997. godine i od tada je svake godine druga država članica MASSEE-a domaćin. Godine 2017. JBMO postaje otvoren za sve države (ne samo za članice MASSEE-a) pa riječ „balkanska" u nazivu natjecanja počinje gubiti smisao jer u njoj sudjeluju i države kao što su Francuska, Indonezija i dr., pa i Hrvatska, te natjecanje postaje više internacionalnog oblika.

JBMO je „najviša stepenica" na koju može dospjeti mladi matematičar koji je učenik osnovne škole u Hrvatskoj. Naime, ako si dobar na Općinskome natjecanju, ideš na Županijsko, ako si dobar i tamo, ideš na Državno, a ako i tamo postigneš zapažen rezultat, pozivaju te na Hrvatsku juniorsku matematičku olimpijadu (HJMO). Ako pak i tu uspiješ biti u prvih nekoliko natjecatelja, ideš na JBMO. Ako postigneš dobar rezultat na JBMO-u, dobiješ medalju i ideš doma na zaslužen odmor.

Natjecanje je ove godine bilo online, kao i prošle, pa je, budući da nije trebalo biti organizirano putovanje za učenike, šest natjecatelja umjesto njih četiri išlo na JBMO. Dakle, prvih šest natjecatelja na konačnom poretku HJMO-a ove je godine predstavljalo Hrvatsku na JBMO-u: Lana Milani, Luka Duplančić, Nikola Vujica, Marko Hrenić, Kristijan Šimović i Fabijan Cikač. Pripreme su se održavale na FER-u tijekom 2 tjedna lipnja pod vodstvom prof. Ilka Brnetića, prof. Mee Bombardelli, Vlatka Crnkovića, mag. math., prof. Matije Bašića i drugih.

Natjecanje je održano od 29. lipnja do 5. srpnja 2021. godine, a država domaćin bila je Moldavija. Zadatci su se rješavali 1. srpnja. Natjecanje se sastojalo od 4 zadatka od kojih jedan spada u područje teorije brojeva, jedan u kombinatoriku, jedan u geometriju te jedan u algebru. Svaki zadatak nosio je 10 bodova. Medalje su dodijeljene tako da u gornjoj polovici učenika svatko dobije neku od medalja, a pri tome su brojevi učenika koji su dobili zlatnu, srebrnu i brončanu medalju u omjeru 1:2:3. Dakle, da je na natjecanju bilo 120 učenika, prvih 10 dobilo bi zlatnu, sljedećih 20 srebrnu i sljedećih 30 brončanu. U konkurenciji od 128 učenika naši su natjecatelji osvojili dvije srebrne i dvije brončane medalje. Fabijan Cikač i Luka Duplančić osvojili su srebrne, a Nikola Vujica i Kristijan Šimović brončane medalje.

Zadatak 1. Izračunajte koliko je učenika ove godine dobilo zlatnu, srebrnu i brončanu medalju ako se brojevi zaokružuju na više.

Evo jednog zadatka koji je bio zadan na natjecanju.

Zadatak 2. Za bilo koji skup $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, koji se sastoji od pet različitih prirodnih brojeva, neka je S_A zbroj njegovih elemenata. Neka je T_A broj trojki (i, j, k) takvih da je $1 \leq i < j < k \leq 5$, a za koje broj $x_i + x_j + x_k$ dijeli S_A. Odredi najveću moguću vrijednost broja T_A.

Promotrimo na jednom primjeru pojmove i objekte koji se pojavljuju u zadatku.

Primjer: Neka je $A = \{1, 3, 4, 5, 11\}$. Koristeći oznake iz zadatka 2, odgovorite na pitanja:

a) Koliko je S_A

b) Ako je $i = 2$, koliko je x_i?

c) Reći ćemo da je trojka (i, j, k) uz $1 \leq i < j < k \leq 5$ *dobra* ako $x_i + x_j + x_k$ dijeli S_A. Je li trojka (1, 2, 3) dobra? Zašto? A trojka (1, 3, 5)?

d) Koliko ukupno ima trojki (i, j, k) uz $1 \leq i < j < k \leq 5$?

e) Koliko ih je dobrih? Koliko je T_A za ovaj skup A?

Za bilo koji skup A ukupan je broj trojki 10. U našem su primjeru bile dvije dobre. Za različite skupove A broj dobrih trojki će se mijenjati. Pokušajte napisati neki drugi skup A pa odredite koliko je dobrih trojki za taj primjer. Ako ste uspjeli dobiti više od dvije dobre trojke, pitanje je je li to najbolje moguće? Zadatak traži da se odredi najveći mogući broj dobrih trojki.

Isprobavanjem primjera možemo pronaći vrlo dobar ili čak najbolji primjer, ali ne možemo dokazati da ne postoji bolji, osim ako ne isprobamo sve primjere.

U ovom zadatku očito ne možemo isprobati sve primjere jer ih ima beskonačno (beskonačno je mnogo mogućnosti za odabir elemenata skupa A). Zato moramo naći neki bolji način da dođemo do rješenja. Pogledajmo rješenje zadatka.

Napomena: U rješenju ćemo koristiti dvije poznate tvrdnje. Pokušajte ih i sami dokazati:

– ako $a \mid b$, onda i $a \mid (b - a)$

– ako za prirodne brojeve a i b vrijedi $a \mid b$, nužno je $a \leq b$,

gdje zapis $a \mid b$ (a dijeli b) znači da je b djeljiv s a.

Rješenje: Neka je $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ skup koji se sastoji od pet različitih prirodnih brojeva takav da je $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Reći ćemo da je trojka (i, j, k) uz $1 \leq i < j < k \leq 5$ *dobra* ako $x_i + x_j + x_k$ dijeli S_A. Nijedna od trojki (3, 4, 5), (2, 4, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 5), (1, 3, 5) nije dobra jer je, na primjer,

$$x_1 + x_3 + x_5 \mid S_A \Rightarrow x_1 + x_3 + x_5 \mid S_A - (x_1 + x_3 + x_5) \Rightarrow$$

$$x_1 + x_3 + x_5 \mid x_2 + x_4$$

što je nemoguće jer je $x_5 > x_4$ i $x_3 > x_2$. Analogno možemo pokazati da nijedna trojka oblika $(x, y, 5)$, gdje je $y > 2$, nije dobra.

Zbog toga može biti najviše 5 dobrih trojki i samo trojke (1, 2, 5), (2, 3, 4), (1, 3, 4), (1, 2, 4), (1, 2, 3) mogu biti dobre. Ali ako su trojke (1, 2, 5) i (2, 3, 4) istovremeno dobre, onda imamo:

$$x_1 + x_2 + x_5 \mid x_3 + x_4 \Rightarrow x_5 < x_3 + x_4$$

a vrijedi i:

$$x_2 + x_3 + x_4 \mid x_1 + x_5 \Rightarrow$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq x_1 + x_5 < x_1 + x_3 + x_4 < x_2 + x_3 + x_4$$

što je nemoguće. Zbog toga zaključujemo da trojke (1, 2, 5) i (2, 3, 4) ne mogu biti istovremeno dobre pa je $T_A \leq 4$.

Ostaje nam još pronaći primjer za koji je $T_A = 4$. Kada bismo stavili $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ i $x_4 = 4$, uvrštavanjem u trojke (2, 3, 4), (1, 3, 4), (1, 2, 4) i (1, 2, 3) dobili bismo $9 \mid x_5 + 10$, $8 \mid x_5 + 10$, $7 \mid x_5 + 10$ i $6 \mid x_5 + 10$. Brojevi 6, 7, 8 i 9 dijele $x_5 + 10$. Primjer takvog broja je 504. Dobivamo $x_5 = 494$ i petorku $\{1, 2, 3, 4, 494\}$.

Najveća moguća vrijednost broja T_A je četiri.

Uočite da se dokaz sastoji od dva dijela. Pokazali smo da broj dobrih trojki ne može biti veći od 4. No, to još ne znači da je 4 rješenje. Potrebno je pronaći barem jedan primjer za koji je broj dobrih trojki jednak 4.