Matka 30 (2021./2022.) br. 118

ČETIRI RJEŠENJA NEJEDNAKOSTI ZA PRAVOKUTNI TROKUT

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac

Posebnu pozornost zavrjeđuju zadatci čijem se rješavanju može pristupiti s različitih pozicija. Uspoređivanjem rješenja uočavamo koje je od njih kraće, efektnije, elegantnije. Time se stječe i izgrađuje vještina u rješavanju zadataka.

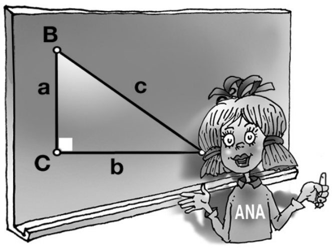
Neka je ABC pravokutni trokut, s pravim kutom pri vrhu C. Za duljinu hipotenuze c i duljinu visine na hipotenuzu h vrijedi nejednakost $\frac{c}{h}+\frac{h}{c}\geq\frac{5}{2}$.

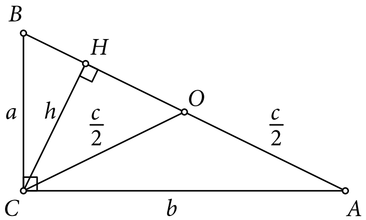
Ovdje ćemo dati četiri dokaza te nejednakosti.

Dokaz 1. Nacrtat ćemo pravokutni trokut ABC s katetama duljina $|BC| = a$, $|AC| = b$ te hipotenuzom duljine $|AB| = c$. Iz vrha C pravoga kuta nacrtat ćemo visinu $\overline{CH}$ duljine $|CH| = h$ i težišnicu $\overline{CO}$. U pravokutnom trokutu polovište hipotenuze (toka O) središte je trokutu opisane kružnice, pa vrijedi $|CO|=|AO|=|BO|=\frac{c}{2}$ (Slika 1.).

Trokut COH je pravokutan, pa je $|CO| > |CH|$ ili $\frac{c}{2}>h$, tj. $c > 2h$. U slučaju da se točke H i O poklapaju, tj. ako je trokut ABC i jednakokračan ($a = b$), vrijedi jednakost $c = 2h$. Zaključujemo da u danom trokutu vrijedi nejednakost:

$$c\geq 2h$$

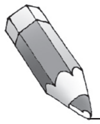




Slika 1.

Zbog $c\geq 2h$ je $\frac{c}{2}\geq h$, pa je $c-2h\geq 0$ i $c-\frac{h}{2}>0$. Množenjem posljednjih dviju nejednakosti dobivamo da je $(c-2h)\left(c-\frac{h}{2}\right)\geq 0$, odakle je $c^2+h^2\geq\frac{5}{2}ch$.

Dijeljenjem lijeve i desne strane ove nejednakosti s ch dobivamo $\frac{c^2+h^2}{ch}\geq\frac{5}{2}$, ili $\frac{c}{h}+\frac{h}{c}\geq\frac{5}{2}$. Jednakost vrijedi samo ako je $c = 2h$, tj. samo ako je trokut ABC jednakokračan i pravokutan ($a = b$).



Dokaz 2. Iz $2h \leq c$ slijedi $h \leq c - h$, ali i $c \leq 2\,(c - h)$. Poslije množenja posljednje dvije nejednakosti dobivamo $ch \leq 2\,(c - h)^2$. Odatle slijedi $ch \leq 2c^2 - 4ch + 2h^2$, odnosno $5ch \leq 2(c^2 + h^2)$. Dijeljenjem s $2ch$ konačno dobivamo traženu nejednakost.

Dokaz 3. Iz $c \geq 2h$ slijedi $c - 2h \geq 0$, pa je$(c - 2h)^2 \geq 0$. Dalje je $c^2 - 4ch + 4h^2 \geq 0$, što možemo zapisati u obliku $c^2 + h^2 \geq 4ch - 3h^2 = 4ch + 3h \cdot (-h)$. Kako iz $c \geq 2h$ slijedi $-h \geq -\dfrac{c}{2}$, dobivamo

$$c^2 + h^2 \geq 4ch + 3h \cdot \left(-\frac{c}{2}\right) = 4ch - \frac{3}{2}ch, \text{ tj. } c^2 + h^2 \geq \frac{5}{2}ch\,.$$

Odatle lako dobivamo željenu nejednakost.

Dokaz 4. Na temelju nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dvije pozitivne veličine je

$$\frac{c}{2h} + \frac{2h}{c} \geq \sqrt{\frac{c}{2h} \cdot \frac{2h}{c}} = 2,$$

pri čemu jednakost vrijedi samo ako je $\dfrac{c}{2h} = \dfrac{2h}{c}$, tj. samo ako je $c = 2h$. Nadalje, imamo

$$\frac{c}{h} + \frac{h}{c} \geq 2 - \frac{h}{c} + \frac{c}{2h},$$

pa zbog $c \geq 2h$ vrijedi

$$\frac{c}{h} + \frac{h}{c} \geq 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

Zadatak za vježbu

Dokažite na najmanje četiri različita načina sljedeću nejednakost za pravokutni trokut:

$$a + b \leq c\sqrt{2},$$

gdje su a i b duljine kateta i c duljina hipotenuze toga trokuta.