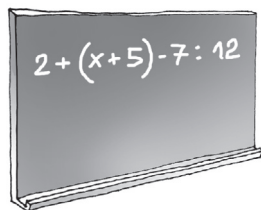


Matea Dvorščak, Zagreb

REDOSLIJED RAČUNSKIH OPERACIJA

Nakon što su tijekom prvog i drugog razreda usvojili četiri osnovne računske operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje), hrvatski će se školari susresti s prvim pravilom u matematici, pravilom o redoslijedu izvođenja računskih operacija. Prema pravilu, u aritmetičkom ili algebarskom izrazu prvo ćemo provesti računske operacije množenja i dijeljenja, a potom zbrajanja i oduzimanja. Naravno, ukoliko izraz sadrži zagrade, prioritet će imati računske operacije unutar zagrada. U mnogim se zemljama ovo pravilo uči pomoću mnemotehnike pamćenja izraza, kao što je npr. PEMDAS, izraz koji se koristi na engleskom govornom području. Na hrvatskom jeziku koristili bismo akronim ZPMDSO, sa značenjem Zagrade – Potenciranje – Množenje – Dijeljenje – Sumiranje¹ – Oduzimanje. Mnemotehnike su vrijedan alat, ali ponekad mogu stvarati i pomutnju. S obzirom na to da u akronimu M stoji ispred D, često dolazi do pogrešnog tumačenja da množenje u matematičkom izrazu ima prioritet ispred dijeljenja. Također, za razliku od lako izgovorljive engleske inačice, hrvatski akronim nije lako izgovoriti, a time ni zapamtiti i koristiti. Možda je to i razlog zašto se ovakav način zapamćivanja pravila o redoslijedu izvođenja računskih operacija ne prakticira u hrvatskoj nastavnoj praksi. Zato nam ne preostaje ništa drugo, nego da ovo pravilo dobro razumijemo. A kako bismo što bolje razumjeli priču o redoslijedu računskih operacija, bacit ćemo pogled u prošlost i vidjeti kako je i zašto do njega došlo.

PAZI NA PEMDAS!



Prvo pitanje koje možemo postaviti je tko je izmislio ovo matematičko pravilo. Odgovor na pitanje je jednostavan: nitko! Pravilo se prirodno razvilo među matematičarima tijekom 16. stoljeća. Naime, u 16. stoljeću se, razvojem algebarskih izraza, počelo uvoditi simboličko zapisivanje (do tada su se matematički izrazi zapisivali riječima). Međutim, nije postojao univerzalno prihvaćen sustav simbola, nego je svaki matematičar koristio svoj osobni zapis, što znači da je na početku rada morao izdati legendu koja bi pomogla čitateljima da informirano sagledaju matematičke izraze ispred njih. Ilustrirat ćemo ovu situaciju na primjeru dvojice matematičara koji su djelovali u isto vrijeme, sredinom 16. stoljeća, jedan u Italiji, a drugi u Njemačkoj. Pa krenimo s Talijanom, matematičarom Francescom Ghaligajem. Iako je pola stoljeća ra-

¹Odobrana je tudica „sumiranje” kako bi se izbjeglo dvostruko pojavljivanje slova Z u akronimu (zagrade i zbrajanje).



nije njemački matematičar Widman počeo koristiti suvremene znakove „+” i „-” kako bi simbolički prikazao računске operacije zbrajanja i oduzimanja, Ghaligai se služio oznakama „ \bar{p} ” odnosno „ m° ”, a ponekad čak i riječima „piu” i „meno”. Znak za jednako bile su tri uzastopne crtice „— — —”, dok je samo jedna takva crtica označavala razmak između faktora. Ghaligai bi, primjerice, izraz $x^3 - x^2$ zapisao na sljedeći način: $\square\square m^\circ \square$.

Ghaligaiev njemački suvremenik Johannes Scheubel izraze je, na prvi pogled, zapisivao na nešto jednostavniji način. Primjerice, izraz $3x + 4$ Scheubel bi zapisao kao $3ra. + 4N$, dok bi izraz $8x^4 - 4x$ zapisao kao $8ter. - 4ra$. Problem kod Scheubela bilo je dvoznačno služenje nekim simbolima kao što je to, primjerice, simbol „ ra .” koji označava x (kao što je to u gore navedenom primjeru), ali ujedno može označavati i *radix*, odnosno drugi korijen.

Nedovoljno jasno razvijen simbolički zapis, ali i korištenje različitih zapisa, stvarao je dovoljno veliku zbrku i bez dodatnog označavanja prioriteta računskih operacija različitog stupnja. Pogotovo jer je široka upotreba zagrada ušla u primjenu tek dva stoljeća kasnije. Kako bi olakšali komplicirane simboličke zapise, matematičari su sasvim prirodno prihvatili da u algebarskim i aritmetičkim izrazima množenje i dijeljenje imaju prioritet ispred zbrajanja i oduzimanja. Naime, ako pogledamo, primjerice, množenje kao uzastopno zbrajanje istih pribrojnika, onda nam izraz „ $2 + 3a$ ” označava ekonomičniji zapis izraza „ $2 + a + a + a$ ”. Tada nam je jasno da, bez obzira na poredak simbola s lijeva na desno, nije prirodno da prvo izvršimo zbrajanje, a potom množenje kako bi to bilo u izrazu „ $(2 + 3)a$ ”. Kako je u navedenom primjeru redosljed računskih operacija prirodno „nametnut”, matematičari nisu imali potrebe za posebnim obrazloženjem, zbog čega formulaciju pravila nećemo pronaći u matematičkom radu, ali ćemo je pronaći u matematičkim udžbenicima.

Iako su neka pravila o redosljedu računskih operacija prirodna, određivanje prioriteta među operacijama istog stupnja nije tako trivijalno. Iako ćemo ovih dana debate vezane uz redosljed računskih operacija najčešće pronaći na društvenim mrežama, u objavama u kojima se raspravlja o točnom rješenju danog aritmetičkog izraza, poput „ $24 : 4 \cdot 2$ ”, one sežu u nekoliko stoljeća staru prošlost. Naime, neki matematičari smatraju da se ovakav izraz računa s lijeva na desno, dok drugi pak smatraju da množenje uvijek ima prioritet, bez obzira na redosljed u zapisu. Danas je opće prihvaćen dogovor da ne postoji prioritet među računskim operacijama istoga stupnja, zbog čega itekako vrijedi poslušati savjet američkog matematičara M. A. Baileya koji je još krajem 19. stoljeća izjavio da je takve izraze najbolje izbjegavati.

VALJDA NA
ZPMDSO!

