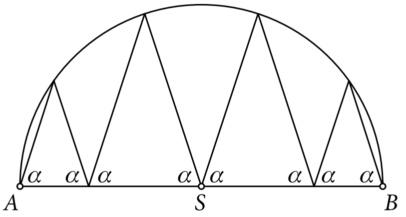
Matka 30 (2021./2022.) br. 118

GEOMETRIJSKI KUTAK

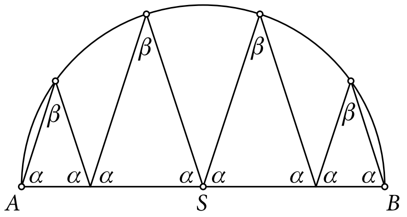
# TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

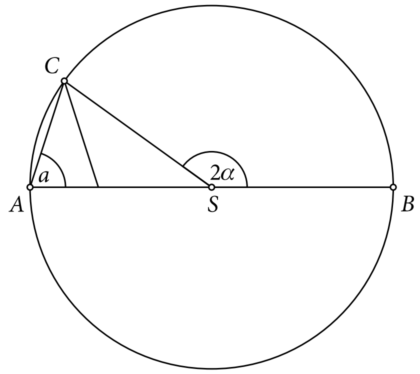
**Primjer 1.** Kolika je veličina kuta $\alpha$?




***Rješenje:*** S obzirom na to da su po dva kuta u sva četiri trokuta jednaka $\alpha$, možemo tvrditi da su svi trokuti jednakokračni. Veličinu trećega kuta u tim trokutima označimo s $\beta$.

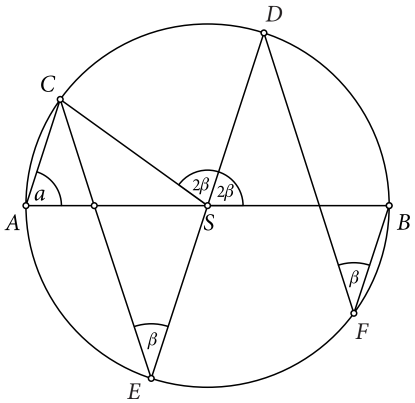



Vrh trokuta na polukružnici koji je najbliži točki *A* označimo slovom *C*, a zatim zrcalimo polukružnicu s obzirom na pravac *AB*.




Prema poučku o središnjem i obodnom kutu može se zaključiti da $\angle BSC$ ima veličinu $2\alpha$ jer je on središnji kut, a njemu je odgovarajući obodni kut $\angle BAC$ čija je veličina $\alpha$. (Napomena: Prema poučku o središnjem i obodnom kutu središnji je kut dvostruko veći od njemu odgovarajućega šiljastoga obodnog kuta.)

Zrcalimo sada dva od četiri zadana jednakokračna trokuta s obzirom na pravac *AB*, kako je prikazano na sljedećoj slici.

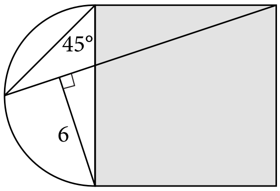



Kutovi $\angle DEC$ i $\angle BFD$ obodni su kutovi veličine $\beta$. Njima su odgovarajući središnji kutovi $\angle DSC$, odnosno $\angle BSD$, čija je veličina dvostruko veća, tj. $2\beta$.

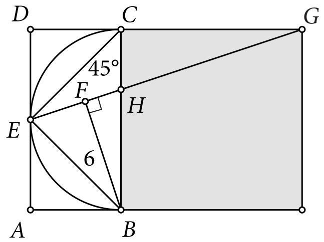
Uočimo da kutovi $\angle DSC$ i $\angle BSD$ zajedno čine kut $\angle BSC$, što znači da vrijedi $2\beta + 2\beta = 2\alpha$, tj. $4\beta = 2\alpha$. Iz toga slijedi $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Znamo li da u svakom zadanom jednakokračnom trokutu vrijedi $2\alpha + \beta = 180°$, možemo zaključiti da je $2\alpha + \frac{\alpha}{2} = 180° \Rightarrow \frac{5\alpha}{2} = 180° \Rightarrow \alpha = 72°$.

**Primjer 2.** Kolika je površina osjenčanoga kvadrata?

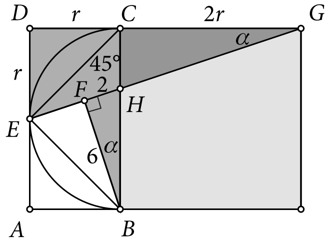



***Rješenje:*** Dopunimo zadanu sliku i označimo točke kako je prikazano na donjoj slici.




Dužine $\overline{BF}$ i $\overline{EG}$ međusobno su okomite. To znači da su kutovi $\angle HBF$ i $\angle DGE$ jednakih veličina jer su to kutovi s okomitim kracima iste vrste. Označimo njihovu mjeru s $\alpha$. Iz toga slijedi da su pravokutni trokuti $BHF$ i $EGD$ slični.

Iz činjenice da je $\angle ECB = 45°$ slijedi $|ED| = |DC| = r$ i $|CG| = 2r$, gdje je $r$ duljina polumjera zadane polukružnice.




Iz sličnosti trokuta $BHF$ i $EGD$ slijedi $\frac{|FH|}{|BF|} = \frac{|ED|}{|DG|} \Rightarrow \frac{|FH|}{6} = \frac{r}{3r} \Rightarrow |FH| = 2$.
Trokut $BHF$ je pravokutan pa je

$$|BH|^2 = |BF|^2 + |FH|^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \Rightarrow |BH| = \sqrt{40}.$$

Trokuti $HGC$ i $EGD$ također su slični, iz čega slijedi

$$\frac{|CH|}{|CG|} = \frac{|ED|}{|DG|} \Rightarrow \frac{|CH|}{2r} = \frac{r}{3r} \Rightarrow |CH| = \frac{2r}{3}.$$

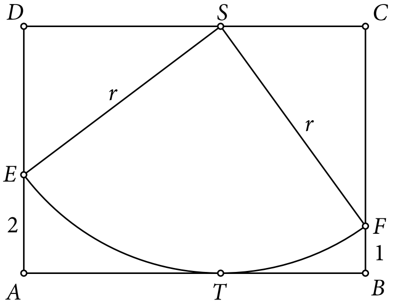
Za stranice osjenčanoga kvadrata vrijedi

$$|BC| = |BH| + |HC| \Rightarrow 2r = \sqrt{40} + \frac{2r}{3} \Rightarrow \frac{4r}{3} = \sqrt{40}.$$

Dakle, $|BC| = 2r = 2 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{40} = \frac{3}{2}\sqrt{40}$, pa je površina kvadrata

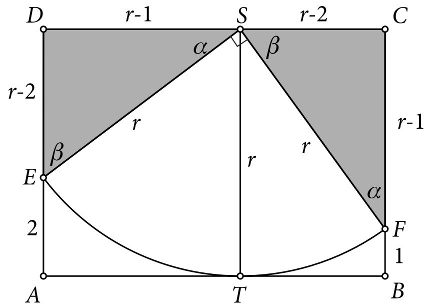
$$P = |BC|^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{40}\right)^2 = \frac{9}{4} \cdot 40 = 90.$$

**Primjer 3.** U pravokutnik $ABCD$ upisana je četvrtina kruga, kako je prikazano na slici. Koliki je polumjer kruga $r$?




***Rješenje:*** Središnji kut četvrtine kruga je pravi kut pa je $\angle ESF = 90°$.

Dužina $\overline{AB}$ dira kružni luk $EF$ pa je polumjer $\overline{ST}$ okomit na dužinu $\overline{AB}$. Iz toga slijedi da su stranice $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ usporedne sa $\overline{ST}$ pa vrijedi $|AD| = |BC| = |ST| = r$. Tada je $|ED| = r - 2$, a $|FC| = r - 1$.




Također, valja uočiti da su pravokutni trokuti $ESD$ i $SFC$ sukladni prema KSK poučku jer imaju hipotenuze jednake duljine $r$, a odgovarajući šiljasti kutovi također su im jednakih veličina jer su to kutovi s okomitim kracima. Dakle, vrijedi $\angle DSE = \angle CFS = \alpha$ i $\angle SED = \angle FSC = \beta$.

Iz sukladnosti tih trokuta proizlazi da i odgovarajuće katete imaju jednake duljine pa je $|DS| = |FC| = r - 1$ i $|SC| = |ED| = r - 2$.

Primijenimo li na trokut $ESD$ Pitagorin poučak, dobiva se:

$$|ED|^2 + |DS|^2 = |ES|^2$$

$$(r - 2)^2 + (r - 1)^2 = r^2$$

$$r^2 - 4r + 4 + r^2 - 2r + 1 = r^2$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$r^2 - 5r - r + 5 = 0$$

$$r(r - 5) - (r - 5) = 0$$

$$(r - 5)\,(r - 1) = 0$$

Lijeva strana može biti jednaka nuli samo ako je $r = 5$ ili $r = 1$. Mogućnost $r = 1$ odbacujemo jer bi u tom slučaju duljina jedne stranice trokuta bila negativna. Dakle, $r = 5$ jedino je rješenje jer se provjerom može zaključiti da vrijede uvjeti zadatka.

**Zadatak.** Izračunaj površinu bijeloga dijela kružnoga isječka ako je $\angle AOB = 90°$ i $\overline{CD} \parallel \overline{OA}$.