



Petar Mladinić, Zagreb

ARITMOGON

U ovom ćemo tekstu razmotriti i ilustrirati kako lako i uspješno možemo zamijeniti numeričko rješavanje problema (koje je često komplicirano) primjenom grafičkog rješavanja.

Suvremeni Matemagičari smislili su način kako „spojiti” mnogokute i rješavanje sustava linearnih jednažbi, tj. kako na drukčiji način prikazati uobičajene matematičke pojmove i postupke.

1. Uvod

U prošlom broju Matke objavljen je zadatak u stripu *Kako riješiti aritmogon?*

Aritmogon je poligon (mnogokut) koji se podijeli na određeni broj četverokuta koji imaju zajednički vrh unutar mnogokuta i omeđeni su jednom stranicom mnogokuta.

Stranicama početnog mnogokuta pridruže se prirodni brojevi. Naziv dolazi od dvije riječi, *aritmetika* i *poligon* (možda bi bio bolji naziv *aritmokut*).

Temeljna ideja je odrediti brojeve koje ćemo pridružiti unutarnjim četverokutima (nastalih razdiobom) tako da zbroj dvaju brojeva susjednih četverokuta bude jednak broju pridruženom stranici mnogokuta koja taj četverokut omeđuje.

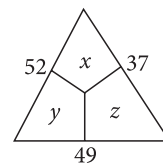
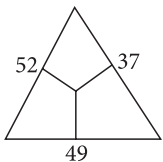
2. Rješavanje stripa

Riješimo probleme koje su Matkači dobili za zadaću.

Primjer 1. Jurica je dobio sljedeći zadatak u obliku trokuta. Treba pridružiti brojeve unutarnjim četverokutima.

Rješenje. Prvi način:

Pridružimo li nepoznate brojeve x , y i z četverokutima, dobit ćemo sljedeću sliku.



Odavde dobivamo sustav linearnih jednadžbi:

$$x + y = 52$$

$$y + z = 49$$

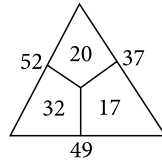
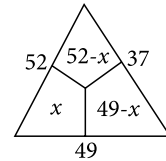
$$x + z = 37.$$

Rješenje sustava je $x = 20, y = 32, z = 17$.

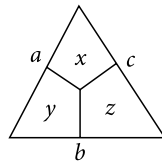
Možemo postupiti i na drugi način.

Drugi način: Označimo jedan četverokut nepoznanicom x i pomoću nje ga iskažimo ili prikažimo vrijednosti ostalih četverokuta.

Sad rješavamo jednadžbu $(52 - x) + (49 - x) = 37$ i dobivamo rješenje $x = 32$, pa aritmogon popunjen izgleda ovako:



Općenito Juričin aritmogon za prvi način rješavanja izgleda ovako:



i pripadni sustav linearnih jednadžbi:

$$x + y = a$$

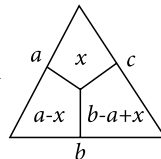
$$y + z = b$$

$$x + z = c.$$

Rješenje ovog sustava je

$$x = \frac{a-b+c}{2}, y = \frac{a+b-c}{2}, z = \frac{-a+b+c}{2}.$$

Za drugi način, pomoću jedne nepoznanice, Juričin aritmogon izgleda ovako:



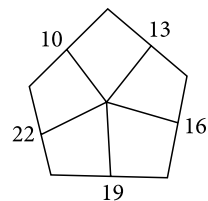
a pripadna jednadžba $x + (b - a + x) = c$ i njezino rješenje $x = \frac{a-b+c}{2}$.

U rješavanju ovog zadatka može se „uočiti” pravilnost izravnog računanja traženih vrijednosti. Možete li formulirati tu pravilnost?

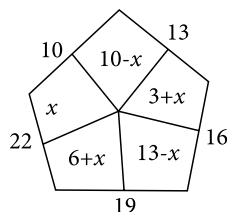


U daljnjem rješavanju aritmogona primijenit ćemo ovaj drugi način.

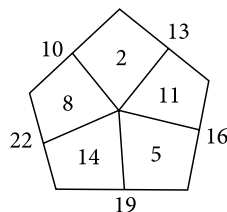
Primjer 2. Luka je dobio aritmogon u obliku peterokuta.



Rješenje. Pridružimo li nepoznati broj x jednom četverokutu, dobit ćemo sljedeću sliku.

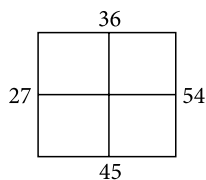


Lako se vidi da je $x + (6 + x) = 22$ i da je rješenje $x = 8$. Popunjeni Lukin aritmogon izgleda ovako:

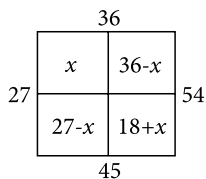


Ovu metodu primijenimo i na Antin zadatak.

Primjer 3. Ante je dobio aritmogon u obliku četverokuta.



Rješenje. Pridružimo li nepoznati broj x jednom unutarnjem četverokutu, dobit ćemo sljedeću sliku:

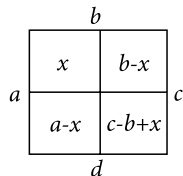


Oдавде zaključujemo da je $(27 - x) + (18 + x) = 45$, odnosno da je $45 = 45$. Dakle, rješenje je zadatka bilo koji prirodni broj, pa Anti nije teško riješiti zadatak.



tak. Mogao je i slučajno odbrati neku vrijednost unutarnjeg četverokuta pa provjeriti je li taj broj rješenje zadatka.

Razmotrimo ovaj zadatak općenito. Tada Antin aritmogon izgleda ovako:



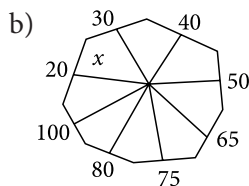
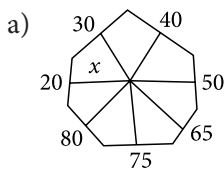
a) pripadna jednačina $(a-x) + (c-b+x) = d$, iz koje slijedi $a+c = b+d$.

Ako je u četverokutnom aritmogonu $a+c \neq b+d$, onda aritmogon nema rješenja, tj. ne postoje brojevi koji mogu zadovoljiti uvjete zadatka.

3. Zadatci

Evo nekoliko zadataka za vježbu i provjeru metode.

1. Za vježbu riješite Daničin zadatak.
 - a) Ima li njezin zadatak rješenje?
 - b) Odredite uvjete rješivosti Daničinog oblika aritmogona.
2. Smislite nekoliko novih zadataka i riješite ih.
3. Koji oblici aritmogona uvijek imaju rješenje, a za koje aritmogone postoje uvjeti rješivosti?
4. Riješite sljedeće aritmogone:



- Rješenja zadataka:**
1. a) Daničin zadatak ima bezbroj rješenja;
 - b) ako je $a+c+e = b+d+f$, zadatak ima bezbroj rješenja; inače nema rješenja
 4. a) $x = -5$, b) nema rješenja

