



RAČUNALa

Nastavak iz Matke 117.



БИХАЋ ПРИЈЕДОВИЋ

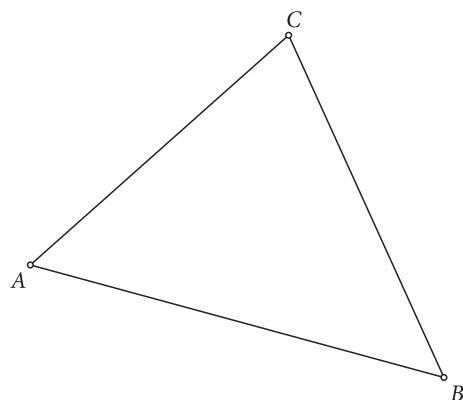
Nikol Radović, Seget Donji/Sisak

Trokut i opisana kružnica nove zgode geometrijske družbe

- Prošli smo put proučavali simetralu kuta – započeo je novo druženje profesor Kosinus te nastavio: – Vidjeli smo da je u Euklidiji i Nigdjezemskoj riječ o poluprvcima. Evo današnjega zadatka:

Zadatak. Nacrtanom trokutu ABC konstruirajte / nacrtajte upisanu M -kružnicu K_{M_u} .

- Prije nego krenemo na njegovo rješavanje, prisjetimo se kako se takav zadatak rješava u Euklidiji. Upute i ideje molim! Danas ja crtam prema vašim uputama. Neka je zadan trokut ABC kojemu treba upisati kružnicu k_u , Slika 1.

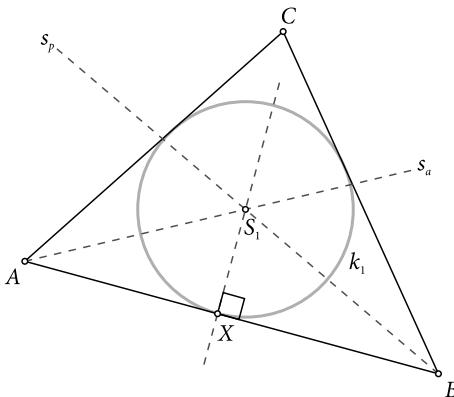


Slika 1.

- Ma to je prejednostavno – komentira Maja.
- Majo, to nisu upute, nego tvoj subjektivni komentar – replicira Petra i nastavlja: – Prvo moramo konstruirati simetrale dvaju kutova, primjerice $\alpha = \angle CAB$ i $\beta = \angle ABC$. Odmah se priključuje i Šimun: – Jednostavno primjenimo prednosti programa *Sketchpad*, tj. pazimo na poredak točaka, primjerice C , A i B . Označimo ih i u izborniku *Konstrukcije* odaberemo naredbu *Simetrala kuta*.
- Ali ako želimo klasično konstruirati – dodaje Lukas – primjenimo konstrukciju iz Matke 117, pomoću kružnica iste duljine polumjera.



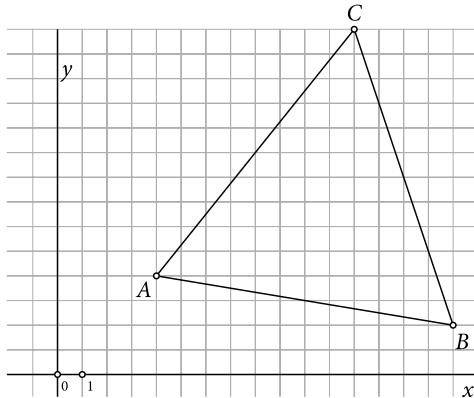
- Mislim da bismo ipak trebali primjenjivati *Sketchpad* i njegove prednosti, zar ne? – komentira Maja.
- Čini mi se da danas Maja mora imati komentar o svemu – u bradu mrmlja Šimun. Ostali se ne daju smesti, već nastavljaju pratiti i rješavati kao profesor Kosinus.
- Simetrale kuta s_α i s_β sijeku se u središtu upisane kružnice S_u – javlja se Krugoslav, a nastavlja Kvadratoslav: – Sada je važno konstruirati polumjer upisane kružnice k_u . Stranice trokuta ABC bit će tangente upisane kružnice pa je dovoljno središtem S_u konstruirati okomicu na jednu od stranica trokuta. Sjedište okomice i stranice je točka koja definira polumjer upisane kružnice, tj. $r_u = |S_u X|$.
- I kružnica je tu – javio se i Bubač, Slika 2.



Slika 2.

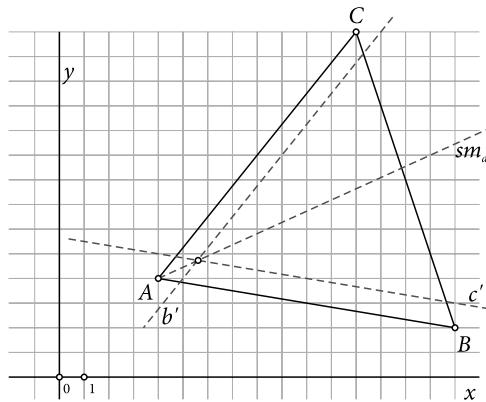
- Ide to vama jako dobro – komentira profesor Kosinus te nastavlja: – Bez problema sam slijedio vaše upute i nacrtao rješenje. No, ipak bih htio objašnjenje: – Majo, zašto moramo konstruirati polumjer, a ne pomoću Alata za crtanje kružnica „ulijepiti“ kružnicu?
- Kvadratoslav je argumentirao – odgovara Maja – da stranice trokuta moraju biti tangente upisane kružnice, tj. kako mijenjamo veličine stranica / kutova trokuta ili šetnjom vrhova trokuta vrstu trokuta – kružnica mora ostati upisana. Obično se na prvu „uljepljivanjem“ sve čini u redu, ali kada se promijeni ili duljina stranice ili veličina kuta, kružnica ispliva van. To se ne bi smjelo događati.
- Maja je jako lijepo argumentirala – nastavlja profesor Kosinus i nadodaje: – To je važno i kod drugih konstrukcija. Zato, kada kažemo da se nešto treba konstruirati, ovo je najbolji primjer. Preuzmite i otvorite datoteku *Trokut_upisana.gsp*, Slika 3.





Slika 3.

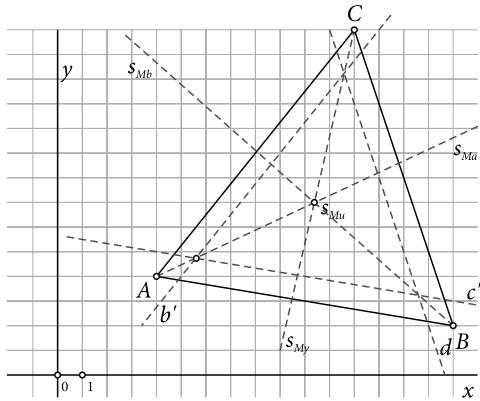
- Zadatak ćemo rješavati kao uvijek, zajedno s prezenterima. Danas će to biti Krugoslav i Kvadratoslav. U slučaju potrebe možete komentirati ili pitati. Izvolite početi.
Krugoslav je odlučio komentirati i davati upute dok Kvadratoslav crta / konstruira i prezentira.
- Na Slici 3. je trokut ABC kojemu trebamo nacrtati / konstruirati upisanu M -kružnicu – započeo je objašnjavati Krugoslav: – Za početak ćemo nacrtati / konstruirati sve tri M -simetrale kutova zadanoga trokuta ABC .
- M -simetralu s_{M_a} kuta $\alpha = \angle CAB$ konstruirat ćemo pomoću pravaca b' i c' koje definiraju točke koje su od kraka AB odnosno AC kuta $\alpha = \angle CAB$ udaljene za 1 – daje upute Krugoslav, Slika 4.



Slika 4.

- Na isti ćemo način nacrtati / konstruirati i M -simetrale s_{M_β} i s_{M_γ} kutova $\beta = \angle ABC$ i $\gamma = \angle BCA$ – uključio se u objašnjavanje Kvadratoslav, Slika 5.





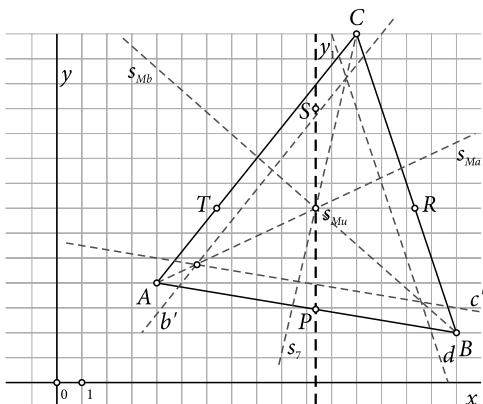
Slika 5.

- Sve tri M -simetrale s_{M_a} , s_{M_b} i s_{M_y} sijeku se u točki S_{M_u} , središtu upisane M -kružnice k_{M_u} – nastavlja objašnjavati Krugoslav.
- Hm... zar ne bi bilo točnije reći, budući da se sve tri M -simetrale s_{M_a} , s_{M_b} i s_{M_y} sijeku u točki S_{M_u} , da tada postoji upisana M -kružnica k_{M_u} zadanog trokuta ABC ? – naglas komentira Maja i nastavlja: – Jednostavno se prisjećam zadatka o opisanoj M -kružnici.
- Slažem se – javila se i Petra dok su Lukas i Šimun klimanjem glavama, a Bubač zujanjem, izražavali svoje odobravanje.
- Majin je komentar na mjestu – govori profesor Kosinus: – Neka sada Petra i Maja provedu konstrukciju do kraja.

Petra sjeda za računalno i čeka Majine upute ili komentare nekog iz družbe.

- Sada kada smo konstruirali središte upisane M -kružnice, moramo konstruirati / odrediti polumjer – objašnjava Maja i nastavlja: – Središtem S_{M_u} crtamo pravac y' paralelan s osi.

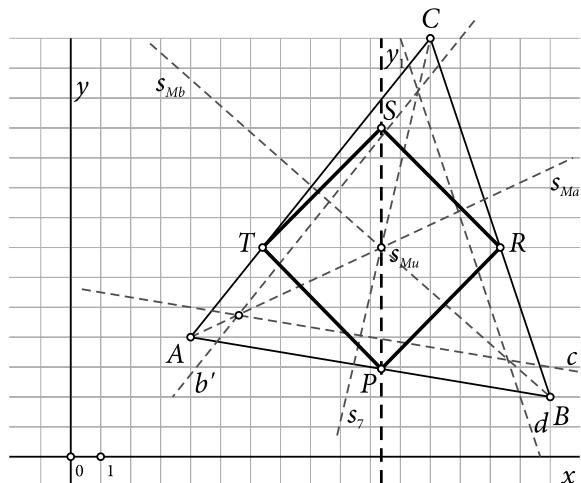
Petra komentira: – Ili crtamo klasično paralele ili y -os translatiramo, Slika 6.



Slika 6.

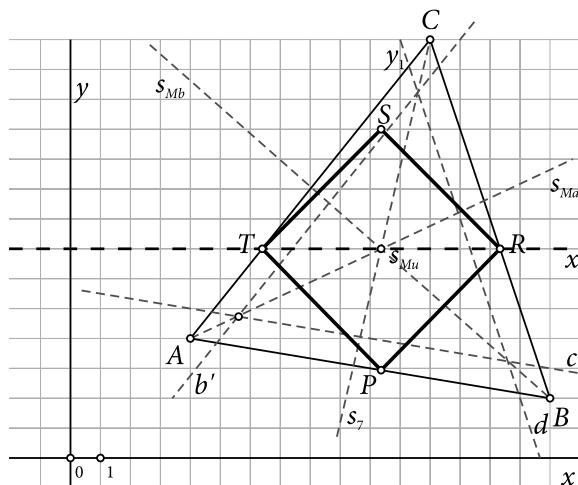


- Pravac y' i stranica \overline{AB} trokuta ABC sijeku se u točki P koja je jedan vrh upisane M -kružnice k_{M_u} – objašnjava Maja, a Petra nastavlja: – Preostale vrhove odredimo rotacijom oko središta S_{M_u} za veličinu kuta od 90° (označimo središte S_{M_u} kao središte rotacije, označimo točku P u izborniku *Transformacije* i odaberemo naredbu *Rotacija*, pri čemu je veličina kuta jednaka 90°). Konstruirani vrhovi P, R, S i T vrhovi su upisane M -kružnice k_{M_u} trokuta ABC , Slika 7.



Slika 7.

- Ovo je bilo jako dobro – komentira profesor Kosinus. No prije nego je rekao bilo što drugo, javlja se Šimun.
- Profesore, ja sam za provjeru krenuo od crtanja pravca x' paralelnog s x -osi. Pravac x' siječe stranicu \overline{BC} trokuta ABC u točki R , odnosno stranicu \overline{CA} trokuta ABC u točki T . To su iste točke koje su konstruirale Petra i Maja, tj. rješenje je ista upisana M -kružnica, Slika 8.



Slika 8.

Rješivši zadatak, priveli su kraju još jedno geometrijsko druženje.

Literatura:

1. Divjak, B. (2000.): *Notes on Taxicab Geometry*, KOG. 5 – 9.
2. Mladinić, P.; Radović N. (2018.): *Geometrija prirode*, Proven grupa d. o. o., Zagreb.
3. Mladinić, P.; Radović, N. (2019.): Kružnica je kvadrat ili proučavanje novih geometrija, Zbornik radova Stručno – metodičkog skupa Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi – Geometrija u nastavi matematike, Pula, 14. – 16.11.2019., 261 – 269.
4. Nirode, W. (2018.): *Doing Geometry with Geometry Software*, Mathematic Teacher, Vol. 112, No. 3, November/ December, 179 – 184.
5. Polya, G. (2003.): *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb.
6. Reynolds, B. E.; Fenton, W. E. (2005): *College Geometry Using The Geometer's Sketchpad*, Key College Publishing, Emeryville.

