Kako gradimo matematički pojam – priča o kutu

Matija Bašić[1], Anja Šenjuk[2]

Uvod

Kut i njegova mjera temeljni su pojmovi u geometriji. U ovom članku detaljnije analiziramo njihovo uvođenje u udžbenicima za različite uzraste jer smo i površnim pristupom primijetili da se definiraju na vrlo različite načine. Moguće je da se time dovodi učenike u situacije u kojima nisu sigurni razumiju li pojam dobro i što se od njih očekuje.

U nastavi matematike učenici se prvi put s pojmom kuta susreću u četvrtom razredu osnovne škole. Učenicima na toj razini nije moguće ponuditi cjelovitu i strogu definiciju pa se pojam kuta nadograđuje i razvija prema uzrastu učenika svih ostalih razreda osnovne i srednje škole. Osjetljivost pojma vidimo već iz nekoliko školskih definicija gdje se kut defnira kao „trag koji ostavlja polupravac u vrtnji" ili kao „dva kraka sa zajedničkim vrhom" odnosno „dio ravnine određene s dva polupravca sa zajedničkim vrhom". U srednjoj školi uz mjeru kuta u stupnjevima uvodimo i radijane pa se, osim poteškoća u geometriji, javlja i poteškoća u razlikovanju mjere kuta i realnog broja kao argumenta trigonometrijskih funkcija. U ovoj diskusiji o kutu analizirat ćemo različite načine uvođenja i definiranja pojma, *sliku* koju učenici postupno izgrađuju, te posljedice koje ti načini imaju na učeničko razumijevanje toga pojma.

Definicije kuta i učeničke konceptualne poteškoće

U školskim i sveučilišnim udžbenicima, kao i u raznim stručnim člancima, možemo vidjeti vrlo različite definicije kuta i načine prikazivanja kutova. U ovoj cjelini neke ćemo od njih detaljno analizirati i diskutirati učeničke poteškoće koje se mogu javiti kao posljedica nedostataka tih prikaza.

Genetička definicija

U nižim razredima osnovne škole često vidimo definicije u kojima se geometrijski objekt opisuje kroz proces kojim nastaje (genezu). Takve definicije nazivamo

[1]Matija Bašić, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu
[2]Anja Šenjuk, OŠ Sveta Klara

genetičkima. Na primjer, kružnicu možemo definirati kao trag šestara. Pritom je važno naglasiti da moraju biti zadovoljena neka pravila: šiljak šestara ne mičemo, olovka šestara napravi puni krug, ne mijenjamo razmak između olovke i šiljka. Pažljivim promatranjem možemo uočiti da se zapravo u pravilima krije precizna definicija kružnice kao skupa svih točaka („olovka čini puni krug") koje su od zadane fiksne točke („šiljak ne mičemo") jednako udaljene („ne mijenjamo razmak između olovke i šiljka").

Također možemo uočiti genetičke definicije koje se pojavljuju pri prvom susretu učenika s pojmom kuta, u udžbenicima za četvrti razred osnovne škole:

- Neka su a i b polupravci sa zajedničkom početnom točkom V. Možemo zamisliti da polupravac a pri vrtnji ostavlja tragove sve dok se ne poklopi s polupravcem b. Svi ti tragovi čine dio ravnine koji se zove kut. Oznaka: (a, b). [1]
- Rotacijom oko svoje početne točke zraka opisuje lik koji zovemo kutom, a bilo koja njezina točka, osim početne, pritom opisuje lik koji zovemo luk. [2]

Učenicima nižih razreda važnu ulogu igraju geste i pokreti prilikom usvajanja pojma kut, no ovakav način definiranja može dovesti do poteškoća u shvaćanju pojmova kod učenika tijekom daljnjeg školovanja. Genetička definicija nosi dinamični aspekt jer se odnosi na rotaciju, tj. način nastajanja kuta. Na prijelazu iz četvrtog u peti razred učenici se suočavaju s problemom poimanja razlike između dinamične i statične definicije pojma kuta. Naime, u petom razredu učenici kut definiraju na manje zoran način, koristeći definiciju unutar euklidskog pristupa geometriji. Problem je vidljiv već iz prethodno navedenih definicija. U prvoj se definiciji kut koji je zapravo „statični objekt" opisuje pomoću vrtnje. U drugoj se umjesto pojma *vrtnja* koristi riječ *rotacija* s kojom učenici na ovoj razini najčešće nisu upoznati. Kako se dinamične definicije pojma kut nalaze u sukobu sa statičnim definicijama, nije moguće naći njihovo objedinjenje pa se ne preporuča korištenje genetičkih definicija u nastavi. Nepreciznost prve definicije dodatno je naglašena zahtjevom da definicija ne smije ovisiti o tome što pojedinac zamišlja, već bi trebala biti univerzalna.

Kut kao dva kraka

U osnovnoškolskim udžbenicima često nailazimo i na definicije u kojima se kut identificira s njegovim krakovima:

- Kut je uređen par (p, q) dviju zraka koje imaju isti početak V. Označavamo ga s $\angle pVq$. Točku V nazivamo vrh, zraku p nazivamo prvi krak (ili početni krak), a zraku q drugi krak (ili završni krak) kuta $\angle pVq$. [3]
- Kut je figura koja se sastoji od dva polupravca koji imaju zajednički vrh. [2]

Ako definiramo kut kao uređeni par dvaju krakova, onda možemo promatrati orijentirane i neorijentirane kutove. Laički rečeno, orijentirani kutovi su kutovi kod kojih je određeno koji je krak prvi, a koji drugi. Iako učenicima na osnovnoškolskoj razini nisu potrebni orijentirani kutovi, oni ipak ulaze u sadržaj nastave. To može biti prednost jer će tako učenici do srednje škole, kad će se susresti s preciznijom definicijom orijentiranih kutova, već stvoriti određenu sliku o navedenom pojmu. No, može biti i nedostatak jer uvođenje toga pojma u osnovnoj školi nije ničim motivirano, tj. učenici ne uviđaju potrebu određivanja koji krak je prvi, a koji drugi. Također, time se doprinosi razvoju prethodno navedenih poteškoća koje proizlaze iz dinamičnog pogleda na kut. Ono što predstavlja nedostatak druge definicije je upotreba pojma *figura*, koji u matematici nije dobro definiran i njegova upotreba nije uobičajena, pa samim time ni ova definicija nije standardna.

Kao primjer formalne matematike promotrit ćemo definiciju koja se često pojavljuje u akademskoj literaturi (matematičkim knjigama, sveučilišnim udžbenicima), a koja je dio Hilbertove aksiomatike geometrije:

- Neka je α proizvoljna ravnina i neka su h i k dva različita polupravca u toj ravnini koji imaju zajednički početak O i ne pripadaju istome pravcu. Par što ga tvore ta dva polupravca nazivamo kut i predstavljamo ga simbolom $\angle(h, k)$ ili $\angle(k, h)$. [4]

Unatoč njezinoj pojavi u visokoškolskom obrazovanju, smatramo da upotreba ovakvih vrsta definicija gdje se kut definira kao *dva kraka* nije najbolje rješenje u nastavi matematike. Prikladnije ga je definirati kao dio ravnine, no i prilikom takvog načina definiranja postoji mogućnost pojave konceptualnih poteškoća kod učenika.

Kut kao dio ravnine

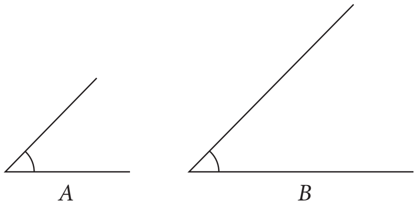
Sljedeće definicije također nalazimo u udžbenicima i metodičkim radovima:

- Neka su AB i AC dva dana pravca. Promatrajmo po jednu poluravninu što ih određuju ti pravci. Presjek poluravnina je kut i označujemo ga s $\angle BAC$ ili $\angle CAB$ [1]
- Dio ravnine omeđen dvama polupravcima koji imaju zajedničku početnu točku naziva se kut. Zajednička početna točka naziva se vrh kuta, a polupravci krakovi kuta. [5]
- Dva polupravca x, y s istom rubnom točkom O dijele ravninu na dva dijela. Svaki se dio zove kut. Kut je trojka (x, y, π) koju čine dva polupravca sa zajedničkom rubnom točkom i jedan od dva dijela ravnine koju određuju ti polupravci. [2]

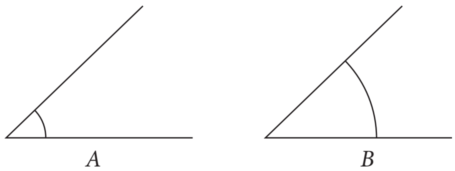
Oznake navedene u prvoj definiciji vraćaju nas na priču o orijentiranim kutovima koja učenicima može djelovati nemotivirano ili nelogično. Teoretski možemo prihvatiti da je uz ovakve definicije ispruženi kut isto što i poluravnina, stoga nema vrh. Preciznije rečeno, svaka točka pravca može predstavljati vrh toga kuta. Slične poteškoće javljaju se i kod punog kuta. Tada je puni kut čitava ravnina pa svaka točka ravnine može biti vrh punog kuta. No, ako pokušavamo riješiti sve nedostatke u definicijama, pojavit će se definicije koje su predugačke i nezgrapne, a za većinu učenika preapstraktne i neprirodne. Ukoliko definiramo kut kao dio ravnine, javljaju se dva takva dijela ravnine te pritom u definicijama nije precizirano na koji se dio definicija odnosi, što dovodi do problema kod učenika prilikom susreta s vrstama kutova. Naime, učenici zbog navedenih nepreciznosti u definicijama izbočene kutove ne doživljavaju kao jednu od vrsta kutova jer smatraju da oni nisu dopušteni. U udžbenicima su stoga uz definiciju nerijetko dani primjeri i diskusije koje prate ovaj problem i kod učenika odmah razvijaju cjelovitiju sliku o pojmu kuta.

Grafičko prikazivanje kuta

Poteškoće navedene u prethodnim ulomcima ukazuju nam na to da bi bilo dobro učenicima, uz definiciju, ponuditi i grafički prikaz definiranog pojma. Međutim, i u ovom segmentu postoje brojne poteškoće koje se mogu pojaviti pa je na njih potrebno obratiti pozornost. Može se dogoditi da učenici prilikom promatranja kuta kao „statičnog objekta” stvore pogrešnu sliku o pojmu kuta te povežu veličinu kuta s duljinom prikazanih dijelova krakova na papiru. Ova situacija povezana je s našim vidnim poljem. Kut se u „stvarnom” prostoru pojavljuje između dva beskonačna smjera koja na papiru označavamo dvama polupravcima koji su tada našem oku ograničeni područjem papira. Tako slika 1 prikazuje situaciju u kojoj većina učenika smatra da je kut označen slovom B veći, dok slika 2 prikazuje situaciju u kojoj učenici povezuju veličinu kuta s veličinom kružnog luka koji koristimo kako bismo označili kut, pa također pogrešno zaključe da je kut B veći.

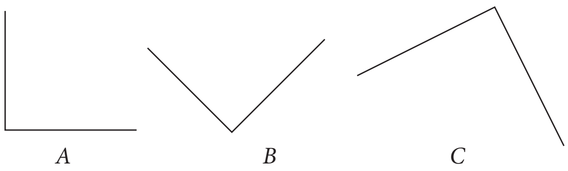


Slika 1. Problem kuta i duljine krakova



Slika 2. Problem kuta i veličine kružnog luka

Također, zbog načina označavanja kuta malim kružnim lukom, mnogi učenici misle da je kut samo taj mali označeni dio, a ne čitav dio ravnine između dva polupravca. Što se grafičkog prikazivanja kuta tiče, problem stvara i prepoznavanje kuta u različitim položajima, npr. prepoznavanje pravog kuta ako mu kraci nisu usporedni s rubovima papira. Ova situacija prikazana je na slici 3, gdje će većina učenika odgovoriti da je pravi kut samo onaj iznad slova A.



Slika 3. Problem prepoznavanja pravog kuta

Kut kao klasa ekvivalencije

U osnovnom sveučilišnom udžbeniku u Hrvatskoj, *Elementarna matematika 1*, Pavković i Veljan kut definiraju na znatno kompliciraniji način za koji možda na prvi pogled nije jasna motivacija. U toj definiciji posebno je karakteristično korištenje klasa ekvivalencije:

- Uređenom paru (Ox, Oy) polupravaca sa zajedničkim vrhom, koji ne leže na istom pravcu, pridružimo pripadni otvoreni kutni isječak dobiven kao presjek poluravnine Px koja sadrži Oy omeđene pravcem Ox i poluravnine Py koja sadrži Ox omeđene pravcem Oy. Zatvoreni kutni isječak dobiva se kao presjek zatvorenih poluravnina (zatvorena poluravnina je unija poluravnine s pripradnim graničnim pravcem). Dva para (Ox, Oy) i $(O'x', O'y')$ polupravaca nazivaju se kongruentnima (a katkada i jednakima), ako postoji izometrija f ravnine M takva da je $f(Ox) = O'x'$ i $f(Oy) = O'y'$. Lako se vidi da je ova kongruencija relacija ekvivalencije, pa se pripadne klase ekvivalencije zovu neorijentirani kutovi. Klasa koja sadrži par (Ox, Oy) označava se sa $\angle xOy$. [6]

Na sličnu definiciju nailazimo u članku Z. Kurnika, *Terminološki problemi u nastavi matematike*:

- Neka je S skup svih polupravaca ravnine s vrhom O. U skupu $S \times S$ definira se relacija $\approx$: uređeni par (x_1, y_2) je u relaciji $\approx$ s uređenim parom (y_1, y_2) ako postoji rotacija f koja polupravac x_1 preslikava na x_2 i y_1 na y_2. Relacija $\approx$ je relacija ekvivalencije. Klasa svih ekvivalentnih uređenih parova polupravaca naziva se kut s vrhom u točki O. Oznaka: $\angle x_1Ox_2$ (predstavnik kuta). [1]

Pavković i Veljan odabiru ovaj način definiranja kuta kako bi se napravila priprema za uvođenje mjere kuta. Mjeru neorijentiranih kutova definiraju kao strogo rastuću funkciju koja svim sukladnim dijelovima ravnine pridružuje isti broj (mjeru). Dakle, ovakvom definicijom postiže se zapravo da se termin „kut" može ravnopravno koristiti kao broj koji predstavlja veličinu dijela ravnine. Želimo li biti matematički precizni, dolazi do pojave nejasnoća. Označava li to površinu ravnine između dva kraka? Odnosi li se to na duljinu luka kojim označavamo kut? Kako mjerimo tu duljinu? Ravnalom? Upravo kako bismo izbjegli pojavu ovakvih nejasnoća, definiramo kut kao klasu ekvivalencija. Naime, ono što mi želimo, zbog uvođenja mjere kuta, jest naći funkciju koja dijelovima ravnine pridružuje broj – mjeru kuta. Jedini način za pridruživanje broja dijelovima ravnine je korištenje klasa ekvivalencija. Neobično u prethodnom primjeru jest da autori nazivaju kutnim isječkom ono što mi nazivamo kutom, dok kut nazivaju klasom ekvivalencija. Autori razlikuju nul kut koji označavaju s 0 i ne-nul kut tj. ispruženi kut. Klase ekvivalencija, tj. kutove dobivaju na način da dijele ispruženi kut na manje dijelove. Uz tako odabranu terminologiju intuitivno bismo željeli reći da su kongruentni, tj. sukladni kutovi oni koji imaju istu mjeru. Kompleksnost ove definicije ne odražava kompleksnost pojma kuta kao dijela ravnine, već problem kako definirati mjeru kuta, a da definicija ne bude cirkularna. Ovom definicijom zadovoljili smo sva svojstva koja mora zadovoljavati mjera kuta: normiranost, monotonost i aditivnost. No, ovakva je definicija ipak prekomplicirana za upotrebu u školskoj matematici pa pribjegavamo definiciji radijana kao mjere kuta određenog dvama polumjerima kružnice, pri čemu je duljina kružnog luka određena tim polumjera jednaka kao i duljina tih polumjera.

Poteškoće vezane uz mjeru kuta

Jedna od poteškoća vezanih uz mjeru kuta je shvaćanje i crtanje kuta većeg od 360°. Velik će broj učenika odgovoriti da je nemoguće nacrtati kut od 450°, dok će neki objasniti kako „je to isto kao i kut od 90° zato jer ćeš, nakon što napraviš puni krug i kreneš ispočetka, završiti u 90°". Pri mjerenju učenicima također treba usmjeriti pozornost na pravilno korištenje kutomjera. Velik broj učenika nepravilno namješta kutomjer prilikom mjerenja veličine zadanog kuta, tj. treba im pojasniti kako ispravno poravnati središte i nultu liniju kutomjera. Drugi problem vezan uz uporabu kutomjera je očitavanje broja stupnjeva s pogrešne strane kutomjera. Prilikom rješavanja ovih problema trebali bismo učenike navoditi da interpretiraju svoje rezultate mjerenja, tj. da je za šiljaste kutove točna vrijednost manja, a za tupe veća od 90°. Ponekad učenike ohrabrujemo da počnu od nule (na kraku) i „penju se po skali", ali ovakvo korištenje kutomjera ponovno naglašava ideju kuta kao rotacije.

Slika i definicija pojma

Kroz različite definicije kuta možemo vidjeti da se pojam kuta postupno gradi, pri čemu se, s povećanjem preciznosti i formalizma, učenike polako poučava ispravljanju konceptualnih poteškoća. Način funkcioniranja ljudskog mozga često je u sukobu s matematičkom logikom, a precizno korištenje matematičkog jezika oduvijek je stvaralo probleme u nastavi matematike. Mnoge poteškoće posebno se pojavljuju u vezi korištenja definicija pojmova. Pri usvajanju novih pojmova učenici kreiraju vlastite predodžbe i zaključke koji se često sukobljavaju sa strukturom matematike „profesionalnih matematičara". To stvara kognitivni konflikt koji je učenicima teško premostiti bez pomoći nastavnika.

Kad govorimo o izgradnji nekog pojma poželjno je razlikovati sliku i definiciju pojma, kao što ih uvode Vinner i Tall [7]. Sliku pojma čine svi primjeri, asocijacije, rezultati i ideje vezane uz taj pojam sadržane u našem umu. S druge strane, definicija pojma skup je riječi koje koristimo kako bismo odredili značenje toga pojma. Definicija pojma može biti formalna, tj. prihvaćena od matematičke zajednice, a može biti i osobna, tj. skup riječi koje osoba koristi za vlastito tumačenje stvorene slike pojma. Pritom moramo voditi računa o tome da se osobna i formalna definicija ne nađu u sukobu, tj. da se kod stvaranja osobne definicije ne naruši znanstveni aspekt matematike. Stoga je značajna uloga nastavnika u usmjeravanju procesa konstruiranja definicija. Učenicima nije dovoljno dati samo definiciju nekog matematičkog pojma, potrebno je izgraditi čitavu sliku pojma kroz razne primjere, počevši od onih iz svakodnevnog života pa do onih matematičkih. Ako učenici u nižim razredima osnovne škole pravilno i čvrsto izgrade sliku pojma, kasnije će se, prilikom uvođenja definicija pojmova u nastavu matematike, javljati manje poteškoća. Poteškoće se mogu javiti ako se tijekom procesa formiranja novih pojmova previše stavlja naglasak samo na sliku pojma. Time se učenike previše potiče da se oslanjaju na intuiciju i zbog toga mogu zanemarivati preciznost koju matematika zahtijeva. S druge strane, ako previše naglašavamo formalne definicije, učenici neće usvojiti pojmove s razumijevanjem i neće biti u stanju povezati novi pojam s prethodno usvojenim pojmovima. Stoga u procesu formiranja novih pojmova nastojimo naći ravnotežu između pobuđivanja učenikove intuicije i preciznosti u korištenju matematičkog jezika.

Koju definiciju odabrati?

Nakon mnogo različitih primjera definicija kuta nameće se pitanje koju definiciju odabrati. Iako će u odabiru definicije značajnu ulogu odigrati stav i sklonost nastavnika, istaknimo nekoliko stvari koje je potrebno uzeti u obzir prilikom odabira definicije. Prva od njih je stručnost definicije jer gotovo svaka ima svoje dobre i loše strane. Zatim je tu pedagoško-didaktička strana jer definicija mora biti prilagođena dobi i razini učenika. Pri tom je jasno da definicija ni na jednoj razini, ma koliko pojednostavljena bila, ne smije biti pogrešna i ne bi trebala davati netočnu predodžbu o pojmu koji definiramo. Može biti samo nepotpuna i nedovoljno precizna [2]. Na kraju, možemo zaključiti kako upotreba definicije kuta kao dijela ravnine stvara najmanje poteškoća kod učenika.

Uloga nastavnika vrlo je važna kako bi učenici tijekom školovanja mogli napredovati u svojoj konceptualizaciji pojma kuta, a nastavni će proces teći puno lakše ako je nastavnik osviješten o mogućim poteškoćama koje uzrokuju različiti načini uvođenja i definiranja novih pojmova. Jedan od načina na koje nastavnik može pomoći učeniku u izgradnji ispravne slike nekog pojma i preciznom matematičkom izražavanju je pravovremeno naglašavanje razlika između pojmova koji učenicima stvaraju poteškoće. S druge strane, možemo uočiti da se nastavnik nekad u inzistiranju na preciznom izražavanju može naći u drugom ekstremu pa tada učenik prihvaća da mora paziti na terminologiju jer tako traži nastavnik umjesto da mu razlikovanje koncepata bude prirodno. Razlog više je to što se u udžbenicima nalazi ograničen broj definicija i objašnjenja o pojmovima, a vrlo su rijetko navedene poteškoće koje se mogu javiti kod učenika. Kao pomoć u prevladavanju tih poteškoća učenicima je potrebno postavljati pitanja koja uzrokuju kognitivni konflikt. Tada su učenici prisiljeni promisliti o osobnim definicijama i konceptima i preispitati ih kako bi razriješili konflikt.

Literatura

1. Z. Kurnik, *Terminološki problemi u nastavi matematike*, Matematika i škola (2010.), br. 55, 195–199.
2. Z. Šporer, *O definicijama u matematici*, Matematika 1 (1987.), 5–11.
3. B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije i tehničkih škola*, 1. dio, Element, 2014.
4. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, La Salle, 1950.
5. B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić i N. Zvelf, *Matematika 5, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u petom razredu osnovne škole*, 2. dio, Školska knjiga, 2015.
6. B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, 1992.
7. D. Tall i S. Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics (1981.), br. 12, 151–169.