Jedna naizgled jednostavna, ali vrlo korisna nejednakost

Šefket Arslanagić[1], Daniela Zubović[2]

U ovom ćemo članku dokazati jednu algebarsku nejednakost koja glasi:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \tag{1}$$

za $x, y, z \in \mathbb{R}$. Na prvi pogled ova nejednakost izgleda dosta jednostavno i reklo bi se da nema nekog posebnog značaja. No, uskoro ćemo se uvjeriti da je vrlo značajna i korisna kod dokazivanja raznih težih algebarskih i geometrijskih nejednakosti.

Sada ćemo dati dokaz ove nejednakosti.

Dokaz: Poći ćemo od očigledne nejednakosti

$$(x-y)^2 \geq 0,$$

što je ekvivalentno

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \; . \tag{2}$$

Analogno dobivamo još dvije nejednakosti:

$$y^2 + z^2 \geq 2yz \tag{3}$$

i

$$z^2 + x^2 \geq 2xz \; . \tag{4}$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (2), (3) i (4) dobivamo sljedeću nejednakost:

$$2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq 2\left(xy + yz + zx\right),$$

a odavde, nakon dijeljenja nejednakosti s 2, slijedi da je

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$$

što je trebalo dokazati.

Nejednakost (1) je očigledno ekvivalentna nejednakosti

$$\frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \geq 0 \, .$$

[1]Šefket Arslanagić, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BIH
[2]Daniela Zubović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BIH

Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $x = y = z$.

Napomena 1. Ponekad se u matematičkoj literaturi uzima nejednakost (1) uz uvjet $x, y, z > 0$. Međutim, taj uvjet nije nužan jer se lako vidi da ona vrijedi i kada su jedan ili dva ili sva tri od brojeva x, y, z negativni.

Sada ćemo dati nekoliko primjera nejednakosti koje se mogu dokazati pomoću nejednakosti (1).

Primjer 1. Neka su x, y, z realni pozitivni brojevi za koje vrijedi jednakost $x+y+z=1$. Dokazat ćemo da vijedi nejednakost

$$xy+yz+zx \le \frac{1}{3}\ . \tag{5}$$

Rješenje*:* Koristit ćemo dobro poznati identitet:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\ .$$

Odavde zbog (1) i danog uvjeta $x + y + z = 1$ slijedi da je

$$1^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz \ge xy+yz+zx+2xy+2yz+2zx\ \text{, tj.}$$

$$3(xy+yz+zx)\le 1\ ,$$

odnosno

$$xy+yz+zx \le \frac{1}{3},$$

što je trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (5) ako i samo ako je $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Primjer 2. Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \ge \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ , \tag{6}$$

gdje su $a,b,c>0$.

Rješenje*:* Pokazat ćemo da vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \ge \frac{a+b}{2}\ . \tag{7}$$

Nejednakost (7) ekvivalentna je

$$2\left(a^2+b^2\right) \ge (a+b)^2\ ,$$

što je dalje ekvivalentno sljedećem nizu nejednakosti:

$$2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2$$

$$2a^2+2b^2 \geq a^2+2ab+b^2$$

$$a^2-2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Budući da posljednja nejednakost očito vrijedi, to znači da je i nejednakost (7) točna.
Analogno imamo još dvije nejednakosti:

$$\frac{b^2+c^2}{b+c} \geq \frac{b+c}{2} \tag{8}$$

i

$$\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \frac{c+a}{2}. \tag{9}$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (7), (8) i (9) dobivamo sljedeću nejednakost:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2},$$

tj.

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c. \tag{10}$$

Na osnovi nejednakosti (1) imamo sljedeću nejednakost:

$$a+b+c=\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2 \geq \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a},$$

odnosno

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}. \tag{11}$$

Sada iz nejednakosti (10) i (11) slijedi nejednakost (6).
Jednakost u (6) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Primjer 3. Dokazat ćemo da za $x, y, z > 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}. \tag{12}$$

Rješenje: Na osnovi nejednakosti (1) imamo da je

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2 \geq \frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}+\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}+\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y},$$

a odavde je

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y},$$

što je i trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (12) ako i samo ako je

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x},$$

što je ekvivalentno

$$x^2 z = y^2 x = z^2 y.$$

Dakle, jednakost vrijedi ako je $z = \frac{y^2}{x}$ i $z^2 = xy$, tj. ako je $\frac{y^4}{x^2} = xy\ (= z^2)$, odnosno ako je $y^3 = x^3$. Odatle slijedi da jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$.

Primjer 4. Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost

$$ab + bc + ca \le \frac{4}{3} s^2, \tag{13}$$

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta ΔABC, a s njegov poluopseg.

Rješenje: Kako je $s = \frac{a+b+c}{2}$, slijedi da je nejednakost (13) ekvivalentna s nejednakošću

$$3(ab + bc + ca) \le 4 \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2,$$

što je dalje ekvivalentno

$$3(ab + bc + ca) \le (a+b+c)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \ge 3(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca.$$

Dakle, nejednakost (13) ekvivalentna je nejednakosti (1).

Vrijedi jednakost u (13) ako i samo ako je $a = b = c$, tj. ako je u pitanju jednakostranični trokut.

Primjer 5. Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc, \tag{14}$$

gdje su a, b, c pozitivni realni brojevi.

Rješenje: Koristit ćemo poznati identitet

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \tag{15}$$

Iz nejednakosti (1) imamo da je

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \ge 0.$$

Kako je $a + b + c > 0$, vrijedi nejednakost

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \ge 0. \tag{16}$$

Sada iz (15) i (16) slijedi da je

$$a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0,$$

tj.

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc,$$

što je trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (14) ako i samo ako je $a=b=c$.

Napomena 2. Nejednakost (14) očigledno slijedi iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, tj.

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\ .$$

Primjer 6. Neka su a, b, c duljine bridova, a d duljina prostorne dijagonale kvadra. Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost

$$d\geq\sqrt{\frac{1}{2}P}\ ,\tag{17}$$

gdje je P oplošje kvadra.

Rješenje: Za kvadar vrijede sljedeće formule:

$$d^2=a^2+b^2+c^2\ \text{ i }\ P=2(ab+bc+ca).$$

Sada iz nejednakosti (1) dobivamo da je

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\,,$$

što je ekvivalentno

$$d^2\geq\frac{1}{2}P\ \text{, tj. }\ d\geq\sqrt{\frac{1}{2}P}\ ,$$

a što je i trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (17) ako i samo ako je $a=b=c$, tj. ako je u pitanju kocka, tj. $d=a\sqrt{3},\ P=6a^2$.

Primjer 7. Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2\geq 4P^2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right),\tag{18}$$

gdje su a, b, c duljine stranica, h_a,h_b,h_c duljine visina i P površina trokuta ΔABC.

Rješenje: Imamo poznate formule za površinu trokuta:

$$P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}\,,$$

a odavde je

$$h_a = \frac{2P}{a},\ h_b = \frac{2P}{b},\ h_c = \frac{2P}{c}. \tag{19}$$

Uzimajući u (1) da je $x = h_a$, $y = h_b$, $z = h_c$, dobivamo da je

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a ,$$

a odavde zbog (19) slijedi

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq \frac{2P}{a}\cdot\frac{2P}{b} + \frac{2P}{b}\cdot\frac{2P}{c} + \frac{2P}{c}\cdot\frac{2P}{a},$$

odnosno

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq 4P^2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right),$$

što je trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost u (18) ako i samo ako je $h_a = h_b = h_c$, što je točno ako i samo ako je $a = b = c$, tj. ako je u pitanju jednakostranični trokut.

Napomena 3. Uzimajući poznatu formulu $abc = 4RP$, gdje je R radijus opisane kružnice trokuta ΔABC, te $a + b + c = 2s$, imamo da je

$$4P^2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 4P^2 \cdot \frac{a+b+c}{abc} = 4P^2 \cdot \frac{2s}{4RP} = \frac{2sP}{R}.$$

Sada iz nejednakosti (18) slijedi nejednakost

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq 4P^2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq \frac{2sP}{R}.$$

Literatura

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić, I. Matić, *Nejednakosti*, Materijal za mlade matematičare, Sveska 42, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.
3. P.P. Korovkin, *Neravenstva*, Nauka, Moskva, 1983.
4. A. Marić, *Planimetrija – Zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.