Aritmetički nizovi pravilnih mnogokuta

Branka Padavić[1]

Sažetak:

U ovom članku dana je formula za izračunavanje duljine dijagonale pravilnog mnogokuta pomoću duljine stranice pravilnog mnogokuta i aritmetičkih nizova mjera kutova koji se pojavljuju u pravilnim mnogokutima kada se iz jednog vrha mnogokuta nacrtaju sve dijagonale. U prvom dijelu proveden je dokaz postojanja aritmetičkih nizova mjera kutova u pravilnim mnogokutima, slijedi primjena poučka o sinusu pri izračunavanju duljina dijagonala ako je poznata duljina stranice pravilnog mnogokuta, te prikaz primjene na konkretnim primjerima. Dobiveni rezultati mogli bi se uporabiti za izradu aplikacija za grafički prikaz pravilnih struktura, pri čemu je ulazni podatak samo broj vrhova pravilnog mnogokuta koji generira aritmetički niz mjera kutova.

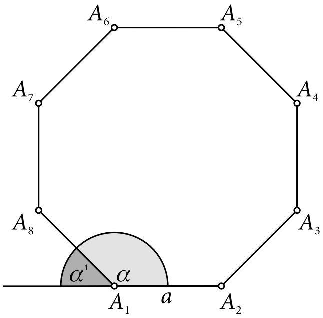
Ključne riječi:*, aritmetički niz, dijagonala, n-terokut, pravilni mnogokut, poučak o sinusu*

Uvod

Ideja za ovaj rad nastala je kao svojevrstan nastavak članka *Dijagonale pravilnih mnogokuta*, objavljenog u časopisu Poučak br. 78., lipanj, 2019. Proučavanjem raznih pravilnih mnogokuta, crtanjem svih dijagonala iz jednog vrha, u nastalim trokutima uočeni su aritmetički nizovi mjera kutova, koji uvelike olakšavaju i pojednostavljuju izračunavanje duljina dijagonala.

1. Aritmetički nizovi pravilnih mnogokuta

Duljinu stranice pravilnog mnogokuta (n-terokuta) označimo slovom a, veličinu unutarnjeg kuta grčkim slovom α, veličinu vanjskog kuta grčkim slovom α', a broj vrhova označimo n (Slika 1.).



Slika 1. Pravilan osmerokut, n = 8

[1]Branka Padavić, OŠ dr. Branimira Markovića, Ravna Gora

Poznato je da se veličine vanjskog i unutarnjeg kuta pravilnog n-terokuta izračunavaju po formulama (1) i (2) te da je njihov zbroj 180°, odnosno vrijedi:

(1) $\alpha' = \dfrac{360°}{n}$, što možemo zapisati i kao $\alpha' = \dfrac{2 \cdot 180°}{n}$

(2) $\alpha = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$

(3) $\alpha : \alpha' = 180°$

Uvedimo zamjenu:

(4) $\delta = \dfrac{180°}{n}$

Omjerom (1) i (2) odmah je vidljivo da je:

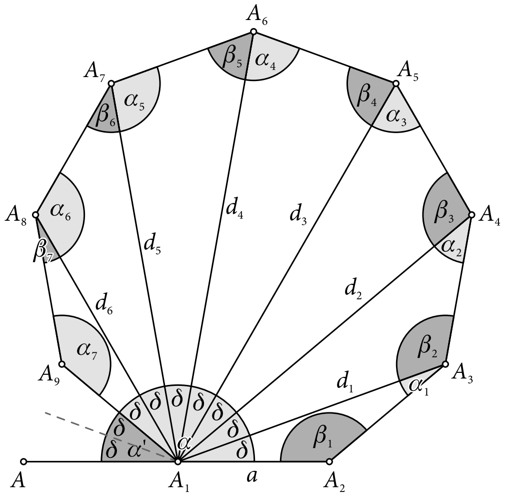
(5) $\alpha' : \alpha = 2 : (n-2)$

Uvođenjem zamjene (4), formule (1) i (2) možemo zapisati kao:

(6) $\alpha' = 2\delta$ ili $\delta = \dfrac{\alpha'}{2}$

(7) $\alpha = (n-2)\delta$ ili $\delta = \dfrac{\alpha}{n-2}$

Nacrtamo li sve dijagonale iz vrha A_1 nekog pravilnog n-terokuta, $n > 3$, dobivamo $n - 2$ trokuta koje označimo $\Delta A_1 A_{k+1} A_{k+2}$, $0 < k < n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ (Slika 2.).



α – unutarnji kut pravilnog mnogokuta

α' – vanjski kut pravilnog mnogokuta

(a_k) – rastući aritmetički niz mjera kutova

(β_k) – padajući aritmetički niz mjera kutova

δ – diferencija

Slika 2. Pravilni deveterokut podijeljen dijagonalama iz vrha A_1 na trokute $\Delta A_1 A_{k+1} A_{k+2}$, $0 < k < 8$

Budući da se svakom pravilnom mnogokutu može opisati kružnica, kutovi tih trokuta, $\angle A_{k+1}A_1A_{k+2}$, $0 < k < n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ su obodni kutovi nad sukladnim dužinama (stranicama pravilnog mnogokuta) pa su svi međusobno sukladni, a njihova unija jednaka je unutrašnjem kutu $\angle A_2A_1A_n$, pa je prema tome mjera svakog tog kuta jednaka:

(8) $$\left|\angle A_{k+1}A_1A_{k+2}\right| = \frac{\alpha}{n-2} = \delta,$$

za $0 < k < n - 1$.

Označimo s α_k i β_k mjere preostalih dvaju kutova trokuta $\Delta A_1A_{k+1}A_{k+2}$, $0 < k < n - 1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_k = \left|\angle A_1A_{k+2}A_{k+1}\right| \text{ i}$$

$$\beta_k = \left|\angle A_{k+2}A_{k+1}A_1\right|,$$

za $0 < k < n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Dokazat ćemo da su ti nizovi aritmetički nizovi s diferencijom δ.

Promotrimo trokut $\Delta A_1A_2A_3$, tj. slučaj kada je $k = 1$.

β_1 je mjera kuta $\Delta A_3A_2A_1$ koji je ujedno i unutarnji kut pravilnog mnogokuta pa je:

(9) $$\beta_1 = \alpha$$

Budući da je $\left|\overline{A_1A_2}\right| = \left|\overline{A_2A_3}\right| = a$, jer su dužine $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{A_2A_3}$ stranice pravilnog mnogokuta, $\Delta A_1A_2A_3$ je jednakokračan pa su mu kutovi uz osnovicu jednaki, iz čega proizlazi zaključak:

(10) $$\alpha_1 = \delta$$

Promotrimo trokut $\Delta A_1A_3A_4$, gdje je $k = 2$. Znamo da je

$$\beta_2 = \alpha - \alpha_1$$

Zamjenom α_1 prema (10) slijedi:

(11) $$\beta_2 = \alpha - \delta$$

Uočavamo da se drugi član niza (β_k) umanjio za δ.

Nadalje, kako je zbroj mjera unutarnjih kutova svakog trokuta 180°, vrijedi:

$$\alpha_2 + \beta_2 + \delta = 180°$$

Zamjenom prema (11) slijedi:

$$\alpha_2 + \alpha - \delta + \delta = 180°$$

$$\alpha_2 + \alpha = 180°$$

$$\alpha_2 = 180° - \alpha$$

Zamjenom α prema (3) slijedi:

$$\alpha_2 = \alpha'$$

Zamjenom α' prema (6) slijedi:

(12) $\alpha_2 = 2\delta$

Uočavamo da se drugi član niza (α_k) uvećao za δ.

Pretpostavimo prema (11) i (12) da vrijedi da je u $\Delta A_{k+1} A_1 A_k$, $0 < k < n - 1$, $n \in \mathbb{N}$

(13) $\beta_{k-1} = \alpha - (k - 2)\delta$

i

(14) $\alpha_{k-1} = (k - 1)\delta$

Budući da je $\beta_k = \alpha - \alpha_{k-1}$, zamjenom prema (14) slijedi:

(15) $\beta_k = \alpha - (k - 1)\delta$

Nadalje je $\alpha_k + \beta_k + \delta = 180°$, pa se zamjenom prema (15) dobiva:

$$\alpha_k + \alpha - (k - 1)\,\delta + \delta = 180°$$
$$\alpha_k + \alpha - k\delta + \delta + \delta = 180°$$
$$\alpha_k = 180° - \alpha + k\delta - 2\delta$$

Zamjenom α prema (3) slijedi:

$$\alpha_k = \alpha' + k\delta - 2\delta$$

Zamjenom α' prema (6) slijedi:

$$\alpha_k = 2\delta + k\delta - 2\delta$$

(16) $\alpha_k = k\delta$

Prema (15) i (16) dokazano je da su nizovi (α_k) i (β_k), $0 < k < n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ aritmetički nizovi s diferencijom δ. Budući da je k veći od nule i manji od $n - 1$, nizovi imaju konačan broj od $n - 2$ člana.

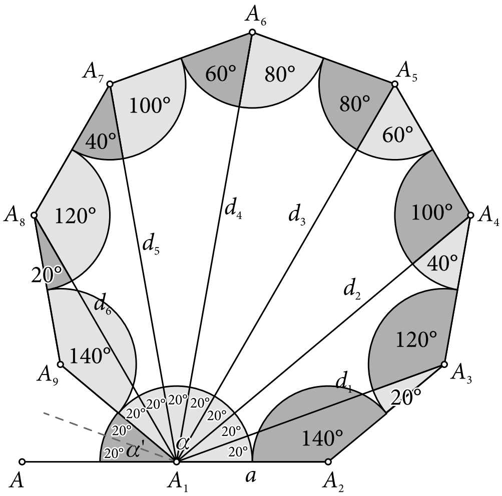
(17) (α_k) je rastući niz $(\delta, 2\delta..., (n - 2)\,\delta)$ kojemu je opći član $\alpha_k = k\delta$, $0 < k < n - 1$, $n \in \mathbb{N}$

(18) (β_k) je padajući niz $(\alpha, \alpha - \delta..., \alpha - (n - 3)\,\delta)$ kojemu je opći član jednak $\beta_k = \alpha - (k - 1)\,\delta$, $0 < k < n - 1$, $n \in \mathbb{N}$

U Tablici 1., prema (17) i (18) izračunati su aritmetički nizovi pojedinih pravilnih mnogokuta, a na Slici 3. vide se aritmetički nizovi mjera kutova u samom mnogokutu, na primjeru pravilnog deveterokuta.

Tablica 1. Primjeri aritmetičkih nizova pojedinih pravilnih mnogokuta.

n	α'	α	δ	(α_k)	(β_k)
$n = 4$	90°	90°	45°	45°, 90°	90°, 45°
$n = 5$	72°	108°	36°	36°, 72°, 108°	108°, 72°, 36°
$n = 6$	60°	120°	30°	30°, 60°, 90°, 120°	120°, 90°, 60°, 30°
$n = 8$	45°	135°	22.5°	22.5°, 45°, 67.5°, 90°, 112.5°, 135°	135°, 112.5°, 90°, 67.5°, 45°, 22.5°
$n = 9$	40°	140°	20°	20°, 40°, 60°, 80°, 100°, 120°, 140°	140°, 120°, 100°, 80°, 60°, 40°, 20°
$n = 10$	36°	144°	18°	18°, 36°, 54°, 72°, 90°, 108°, 126°, 144°	144°, 126°, 108°, 90°, 72°, 54°, 36°, 18°



α – unutarnji kut pravilnog mnogokuta

α'– vanjski kut pravilnog mnogokuta

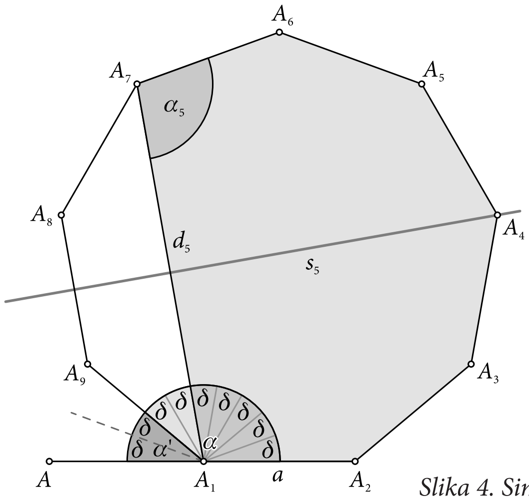
(a_k) – rastući aritmetički niz mjera kutova

(β_k) – padajući aritmetički niz mjera kutova

δ – diferencija

Slika 3. Aritmetički nizovi kutova u pravilnom deveterokutu

Do ovih smo rezultata mogli doći na još jedan način. Za kut α_k, promotrimo mnogokut $A_1A_2...A_{k+2}$. Taj je mnogokut simetričan s obzirom na simetralu dužine



α – unutarnji kut pravilnog mnogokuta

α'– vanjski kut pravilnog mnogokuta

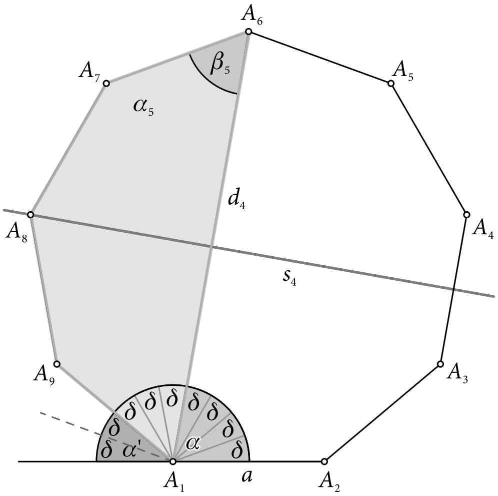
(α_5) – peti član rastućeg aritmetičkog niza mjera kutova

(s_5) – simetrala dijagonale d_5

δ – diferencija

Slika 4. Simetrija pravilnog mnogokuta

$\overline{A_1A_{k+2}}$ pa je $\alpha_k = \left|\angle A_{k+2}A_1A_2\right|$, a za taj smo kut već vidjeli da je jednak $k\delta$ (Slika 4.). Dokaz za β_k je analogan. Uočimo da su β_k simetrične slike od α_k pri simetriji s obzirom na pravac koji prolazi kroz A_1 i središte mnogokuta. Drugim riječima, ako za β_k promatramo mnogokut $A_1\, A_{k+1}\, ...A_n$, koji je simetričan s obzirom na simetralu dužine $\overline{A_1A_{k+1}}$, vrijedi da je $\beta_k = \left|\angle A_nA_1A_{k+1}\right|$, a za taj kut znamo da je jednak α – $(k - 1)\delta$ (Slika 5.).



α – unutarnji kut pravilnog mnogokuta

α' – vanjski kut pravilnog mnogokuta

(s_4) – simetrala dijagonale d_4

(β_5) – peti član padajućeg aritmetičkog niza mjera kutova

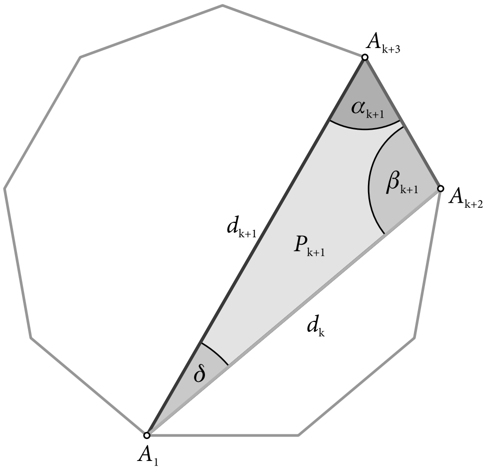
δ – diferencija

Slika 5. Simetrija pravilnog mnogokuta

2. Duljina dijagonale pravilnog mnogokuta pomoću aritmetičkog niza pravilnih mnogokuta i poučka o sinusu

Pomoću aritmetičkog niza i primjenom poučka o sinusu može se vrlo jednostavno izračunati duljina bilo koje dijagonale pravilnog mnogokuta.

Svakom od trokuta $\Delta A_1\, A_{k+2}\, A_{k+3}$, $0 < k < n - 2$, $n \in \mathbb{N}$ dijagonala duljine d_k je stranica toga trokuta nasuprot kutu $\angle A_1A_{k+3}A_{k+2}$ čija je mjera jednaka α_{k+1}. Nasuprot kutu $\angle A_{k+3}A_1A_{k+2}$ čija je mjera jednaka δ nalazi se stranica pravilnog mnogokuta duljine a (Slika 6.)



Slika 6. Kutovi i stranice trokuta $\Delta A_1\, A_{k+2}\, A_{k+3}$, $0 < k < n - 2$, $n \in \mathbb{N}$

Prema poučku o sinusu vrijedi sljedeće:

(19) $$\frac{a}{\sin\delta}=\frac{d_k}{\sin\alpha_{k+1}}$$

Prema (19) duljina dijagonale d_k može se izračunati po formuli:

$$d_k=\frac{\sin\alpha_{k+1}}{\sin\delta}a$$

Zamjenom α_{k+1} prema (16) slijedi:

(20) $$d_k=\frac{\sin\left[(k+1)\delta\right]}{\sin\delta}\cdot a$$

Na temelju ove formule vrlo se jednostavno može izračunati i površina bilo kojeg trokuta $\Delta A_1 A_{k+2} A_{k+3}$, $0 < k < n - 2$, $n \in \mathbb{N}$,

(21) $$P_{k+1}=\frac{d_k\cdot d_{k+1}\sin\delta}{2}$$

Pokažimo primjenu ovih formula na konkretnom primjeru.

Primjer 1.

Kolika je duljina pete dijagonale pravilnog deseterokuta kojemu je stranica dugačka 2 cm?

Rješenje:

$a = 2$ cm

$\underline{n = 10}$

$d_5 = ?$

$$\delta=\frac{180^\circ}{n} \quad\Rightarrow\quad \delta=\frac{180^\circ}{10}=18^\circ$$

$$d_k=\frac{\sin(k+1)\delta}{\sin\delta}\cdot a \quad\Rightarrow\quad d_5=\frac{\sin(6\cdot 18^\circ)}{\sin 18^\circ}\cdot 2 = 6.155 \text{ cm}$$

Primjer 2.

Kolika je površina trokuta $\Delta A_1 A_8 A_9$ u pravilnom dvadeseterokutu kojemu je stranica dugačka 2.3 cm?

$a = 2.3$ cm

$\underline{n = 20}$

$P_7 = ?$

$$P_7 = \frac{d_6 \cdot d_7 \sin\delta}{2}$$

$$\delta = \frac{180^\circ}{n} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{180^\circ}{20} = 9^\circ$$

$$d_k = \frac{\sin(k+1)\delta}{\sin\delta} \cdot a \quad \Rightarrow \quad d_6 = \frac{\sin(7 \cdot 9^\circ)}{\sin 9^\circ} \cdot 2.3 = 13.1 \text{ cm}$$

$$d_7 = \frac{\sin(8 \cdot 9^\circ)}{\sin 9^\circ} \cdot 2.3 = 13.983 \text{ cm}$$

$$P_7 = \frac{d_6 \cdot d_7 \sin\delta}{2} \quad \Rightarrow \quad P_7 = \frac{13.1 \cdot 13.983 \cdot \sin 9^\circ}{2} = 14.328 \text{ cm}^2$$

Zaključak

Primjena pravilnih mnogokuta pojavljuje se u različitim područjima. Aritmetički nizovi pravilnih mnogokuta otvaraju niz jednostavnijih mogućnosti u rješavanju problemskih izazova. Budući da se formula (20) ne nalazi u udžbenicima za srednjoškolsko obrazovanje, učiteljima može poslužiti kao ideja u istraživačkom načinu poučavanja nadarenih učenika te može biti pomoć u osmišljavanju problemskih zadataka za natjecanja u znanju iz matematike.