Determinante

LJILJANA ARAMBAŠIĆ[1], LANA CRNOBRNJA[2]

Sažetak

U ovom članku navodimo nekoliko zanimljivih zadataka iz determinanti, te geometrijski interpretiramo elementarne transformacije nad determinantama u slučaju determinanti drugog reda. Nadalje, dajemo geometrijsku interpretaciju tvrdnje da je determinanta matrice reda 2 jednaka determinanti njene transponirane matrice.

Ključne riječi: determinanta, elementarne transformacije, površina paralelograma, volumen paralelepipeda

Uvod

Važan dio linearne algebre je proučavanje determinanata, a njihova primjena zaista je široka: koristimo ih kod rješavanja sustava linearnih jednadžbi, pri provjeri invertibilnosti matrice, kod pronalaženja svojstvenih vrijednosti matrica i u drugim zadaćama. Nažalost, definicija determinante reda n (kao sume produkata njenih elemenata po svim permutacijama reda n) prilično je komplicirana i zbog toga je često nepraktično determinantu računati po definiciji. Upravo zbog toga proučavaju se načini kako pojednostaviti taj račun – tako dolazimo do Laplaceovog razvoja determinante, te do elementarnih transformacija nad retcima i nad stupcima determinante. To nam omogućava da determinantu svedemo do lakše izračunljive determinante (što najčešće znači do determinante koja ima dosta nulelemenata), te koja je nižeg reda u odnosu na red početne determinante.

Svi ovi dokazi prilično su tehničke prirode, a i dobar je dio zadataka na kojima se ta pravila uvježbavaju algoritamski. Zbog toga je poželjno imati i neke netipične zadatke o determinantama, ali i proučiti geometrijsku interpretaciju determinanti u dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom slučaju. Upravo to je cilj ovog članka: navesti neke primjere koji mogu obogatiti predavanja o determinantama, te precizno, za što često nema dovoljno vremena na samim predavanjima, geometrijski interpretirati transformacije nad retcima i stupcima determinante. Dio prezentiranih zadataka može se naći u nastavnim materijalima [2] iz kolegija Linearna algebra 1 na Matematičkom odsjeku PMF-a. Jedna autorica je studentica koja je čitala ove na-

[1]Ljiljana Arambašić, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu
[2]Lana Crnobrnja, studentica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

stavne materijale, a druga je profesorica koja ih je izradila. Izabrani zadaci su oni koji su nam se činili najzanimljivijima, gledajući i iz perspektive studenta i iz perspektive nastavnika.

U ovom radu pretpostavljamo da je čitatelju poznat pojam determinante, Laplaceov razvoj determinante, te ponašanje determinanate pri izvođenju elementarnih transformacija nad retcima i stupcima determinante. U slučaju potrebe za podsjećanjem, preporučujemo sekciju 3.3 u [2]. Također navodimo nekoliko referenci u kojima zainteresirani čitatelj može naći slične zadatke iz determinanti. Slike su također većinom preuzete iz [2], a crtane su u programu *GeoGebra*.

Zadaci

Zadatak 1. Izračunajmo vrijednost determinante

$$D=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta)\end{vmatrix},$$

pri čemu su α,β,γ i δ proizvoljni realni brojevi.

Rješenje. Prvi pokušaj rješavanja nedvojbeno je Sarrusovim pravilom ili Laplaceovim razvojem, i to je dobar način, ali zahtijeva dosta računa. Mi ćemo drugačije. Ideja je ista kao i kada imamo determinantu čiji su elementi konkretni brojevi - veće brojeve nastojimo smanjiti (ili još bolje, pretvoriti u nule) tako što ćemo nekom retku ili stupcu dodati neki drugi redak ili stupac pomnožen odgovarajućim skalarom.

Korištenjem adicijskih formula u trećem stupcu dobivamo

$$D=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\cos\delta+\cos\alpha\sin\delta\\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\beta\cos\delta+\cos\beta\sin\delta\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\gamma\cos\delta+\cos\gamma\sin\delta\end{vmatrix},$$

te sada uočavamo da se treći stupac može pojednostaviti tako da mu dodamo prvi stupac pomnožen s $-\cos\delta$, te drugi stupac pomnožen s $-\sin\delta$. Ovo dodavanje neće promijeniti vrijednost determinante, dakle imamo

$$D=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\end{vmatrix}=0. \quad \square$$

Kao što smo spomenuli u prethodnom zadatku, kod računanja determinanti najčešće veće brojeve pokušavamo smanjiti i tako olakšati račun. Ipak, ponekad, kao što će to biti slučaj u sljedećem zadatku, od manjih brojeva gradit ćemo veće.

Zadatak 2. Ako znamo da 525 dijeli brojeve 19425, 14175, 51975, 43575 i 68250, pokažimo da 525 dijeli i broj

$$D=\begin{vmatrix}1&9&4&2&5\\1&4&1&7&5\\5&1&9&7&5\\4&3&5&7&5\\6&8&2&5&0\end{vmatrix}.$$

Rješenje. Očito se u retcima determinante D nalaze znamenke navedenih brojeva, krenuvši od znamenke desettisućica do znamenke jedinica. S obzirom na to da nam je dan podatak da su svi ti brojevi djeljivi brojem 525, te da se tvrdi da je i determinanta D djeljiva tim istim brojem, bilo bi sjajno ako bismo u nekom stupcu uspjeli dobiti brojeve 19425, 14175, 51975, 43575 i 68250. Ako to uspijemo, dalje je sve jasno: iz tog stupca izlučit ćemo 525, a preostala determinanta imat će sve cjelobrojne elemente i njena će vrijednost zato biti cijeli broj.

Cilj je, dakle, dobiti stupac s navedenim peteroznamenkastim brojevima. Rastav peteroznamenkastog brojeva pomoću njegovih znamenaka i potencija broja 10,

$$\overline{abcde}=a\cdot 10^4+b\cdot 10^3+c\cdot 10^2+d\cdot 10+e,$$

omogućava da stupac koji želimo dobiti napišemo kao linearnu kombinaciju stupaca determinante D na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix}19425\\14175\\51975\\43575\\68250\end{bmatrix}=10^4\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\5\\4\\6\end{bmatrix}+10^3\cdot\begin{bmatrix}9\\4\\1\\3\\8\end{bmatrix}+10^2\cdot\begin{bmatrix}4\\1\\9\\5\\2\end{bmatrix}+10\cdot\begin{bmatrix}2\\7\\7\\7\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\5\\5\\5\\0\end{bmatrix}.$$

Desnu stranu gornjeg rastava možemo interpretirati ovako: 5. stupcu dodali smo 4. stupac pomnožen s 10, 3. stupac pomnožen s 10^2, 2. stupac pomnožen s 10^3, te 1. stupac pomnožen s 10^4. Kao što znamo, determinanta se neće promijeniti ako nekom stupcu dodamo neki drugi stupac pomnožen proizvoljnim brojem, tako da, nakon što posljednjem stupcu dodamo prethodne na upravo opisani način, dobivamo:

$$D=\begin{vmatrix}1&9&4&2&5\\1&4&1&7&5\\5&1&9&7&5\\4&3&5&7&5\\6&8&2&5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&9&4&2&19425\\1&4&1&7&14175\\5&1&9&7&51975\\4&3&5&7&43575\\6&8&2&5&68250\end{vmatrix}.$$

Sada iz posljednjeg stupca izlučimo 525 i dobijemo

$$D = 525 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 & 2 & 37 \\ 1 & 4 & 1 & 7 & 27 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 99 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 83 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 130 \end{vmatrix},$$

a kako su svi elementi posljednje determinante prirodni brojevi, njena će vrijednost biti cijeli broj. (Uočimo da nismo morali računati točne vrijednosti petog stupca, dovoljno je bilo znati da su to neki *cijeli* brojevi $k_1, k_2, \dots, k_5$.) □

Prije nego prijeđemo na sljedeći zadatak, još malo o prethodnome. Pri rješavanju zadatka vrlo brzo dođemo do ideje da od znamenaka u retcima izgradimo brojeve za koje znamo da su djeljivi s 525. S obzirom na to da je u rastavu

$$\overline{abcde} = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e,$$

znamenka a „najjača", mjereno po njenoj pozicijskoj vrijednosti, možda je prirodnije stupac s brojevima 19425, 14175, 51975, 43575 i 68250 graditi dodavanjem ostalih stupaca prvome stupcu. Jasno je da tada prvi stupac treba unaprijed pomnožiti s 10^4, to jest, gledamo determinantu

$$10^4 \cdot D = \begin{vmatrix} 1 \cdot 10^4 & 9 & 4 & 2 & 5 \\ 1 \cdot 10^4 & 4 & 1 & 7 & 5 \\ 5 \cdot 10^4 & 1 & 9 & 7 & 5 \\ 4 \cdot 10^4 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ 6 \cdot 10^4 & 8 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sada prvom stupcu dodamo ostale na odgovarajući način (drugi pomnožen s 10^3 i tako dalje), te na isti način kao prije dobijemo da je broj $10^4 \cdot D$ djeljiv brojem 525. Kako je $525 = 21 \cdot 25$, a 21 i 10^4 su relativno prosti, iz ovog možemo zaključiti da 21 dijeli D, ali ne i više od toga. Zato je, barem u ovom zadatku, prvi način rješavanja bolji (odnosno, množenje determinante s 10^4 nije bio besplatan korak). Naravno, iako nam ovaj pokušaj nije dao potpuno rješenje zadatka, ukazao je gdje je problem i kako ga riješiti.

Zadatak 3. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljno odabrani različiti brojevi. Ako su svi elementi determinante reda n jednaki ili a ili b, dokažite da je ta determinanta djeljiva brojem $(b - a)^{n-1}$.

Rješenje. Krenimo s jednim konkretnim primjerom iz kojeg ćemo izvesti opći postupak. Neka je $n = 4$ i neka nam je zadana determinanta

$$D=\begin{vmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & b & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}.$$

Izraz $b - a$ u iskazu zadatka sugerira da neki redak oduzmemo od nekog drugog retka, a eksponent $(n - 1)$ da oduzmemo od svih preostalih $n - 1$ redaka. Na primjer, od drugog, trećeg i četvrtog retka oduzmimo prvi, što neće promijeniti iznos determinante, ali hoće njene elemente. Dobit ćemo

$$D=\begin{vmatrix} a & a & b & b \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ b-a & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & a-b \end{vmatrix}.$$

Sada je

$$D=(b-a)^3\begin{vmatrix} a & a & b & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

a kako posljednja determinanta ima sve cjelobrojne elemente, njena vrijednost je cijeli broj, što znači da je $D = (b - a)^3 k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$.

Ovaj konkretni slučaj dao nam je sve što trebamo da bismo zadatak znali riješiti i općenito: od svakog retka determinante reda n oduzmemo prvi redak, zatim iz svih redaka osim prvog izlučimo faktor $b - a$, pa je naša determinanta napisana kao umnožak brojeva $(b - a)^{n-1}$ i D_1, gdje je D_1 determinanta s cjelobrojnim vrijednostima, dakle $D = (b - a)^{n-1} k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. □

Zadatak 4. Koje sve vrijednosti može poprimiti determinanta četvrtog reda čiji su svi elementi jednaki 1 ili –1?

Rješenje. Naravno da odmah uočavamo sličnost s prethodnim zadatkom i da ćemo ga pokušati iskoristiti. Tako dobivamo podatak da je svaka takva determinanta djeljiva s $(1 -(-1))^3 = 8$. Prema tome, vrijednosti koje ova determinanta može poprimiti su oblika $8k$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$. Još treba vidjeti koji k-ovi dolaze u obzir. Vrijednost 0 očito se može postići. Na primjer, uzmemo bilo koju determinantu s dva ista retka. Iz primjera

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=16,$$

zaključujemo da se i vrijednosti ± 8 i ± 16 postižu (zamjenom neka dva retka gornjim determinantama dobivamo negativne vrijednosti).

Postiže li se vrijednost 24? Nakon nekoliko neuspješnih pokušaja pronalaska primjera takve determinante, vraćamo se na sami početak. Kao prvo, uočimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su svi elementi prvog stupca i prvog retka jednaki 1 (množenjem odgovarajućeg stupca i retka s -1 ako je potrebno), dakle, naša determinanta ima oblik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \end{vmatrix}$$

(na svakom od mjesta gdje smo stavili ± 1 može biti ili 1 ili -1, izbori su neovisni jedan o drugome). Oduzimanjem prvog retka od drugog, trećeg i četvrtog dobivamo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 & f_1 \\ 0 & g_1 & h_1 & i_1 \end{vmatrix},$$

pri čemu brojevi $a_1, b_1, \ldots, i_1$ mogu biti ili 0 ili -2. Izlučivanjem -2 iz drugog, trećeg i četvrtog retka, te Laplaceovim razvojem po prvom stupcu, dobivamo

$$D = -8 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix},$$

pri čemu je svaki od brojeva $a, b, \ldots, i$ ili 0 ili 1. Ako su svi ovi brojevi jednaki 0, tada je $D = 0$. Pretpostavimo da nisu svi 0, na primjer $a = 1$. Tada lako dođemo do

$$D = -8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & u & v \end{vmatrix} = -8\,(xv - yu),$$

pri čemu su $x, y, u, v \in \{0, 1, -1\}$. Zato je $|xv - yu| \leq 2$ i $|D| \leq 16$.

Prema tome, jedine vrijednosti koje D postiže su 0, ± 8 i ± 16, a primjere takvih determinanti već smo našli. □

Zadatak 5. Brojevi 1, 2, 3, 4 mogu se posložiti u determinantu reda 2 na 24 načina. Odredimo sumu svih 24 determinanti.

Rješenje. Ovdje treba uočiti da će se u ovoj sumi, uz svaki broj koji se pojavi, pojaviti i njegov suprotni broj. Zaista, uz $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ pojavit će se i $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$, uz $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ bit će i $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$, odnosno, uz $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ bit će i $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad$. Prema tome, suma je 0. □

U prethodnom smo zadatku mogli i ispisati sve determinante s obzirom na to da ih je „samo” 24. U sljedećem ih je zadatku znatno više i zato je bitno da smo u prethodnome uočili pravilo ponašanja.

Zadatak 6. Brojevi 1, 2, ..., 9 mogu se posložiti u determinantu reda 3 na 9! načina. Odredimo sumu svih ovih determinanti.

Rješenje. I ovdje ćemo očekivati da je ta suma 0, a razlog je što će se uz determinantu koja ima retke A, B, C, redom, pojaviti i determinanta koja ima retke A, C, B, redom, a njih dvije u sumi daju 0 jer je druga nastala iz prve zamjenom drugog i trećeg retka. Međutim, možemo tumačiti i da je druga nastala iz determinante s retcima C, A, B zamjenom prvog i drugog retka, pa zašto se ne bi s njom poništila u toj sumi? Zato malo sistematizirajmo naše razmatranje.

Svih 9! determinanti podijelimo po skupinama tako da sve determinante u istoj skupini imaju jednak prvi redak. Sada promatrajmo sumu svih determinanti u skupini čiji je prvi redak jednak A: svaka od determinanti u toj skupini dolazi sa svojim *jedinstvenim* suprotnim parom nastalim zamjenom drugog i trećeg retka. Zato je suma po svakoj skupini 0, a onda je i ukupna suma jednaka 0. □

Geometrijska interpretacija

Neka je zadana proizvoljna determinanta reda n:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

U prethodnim zadacima koristili smo sljedeća svojstva:

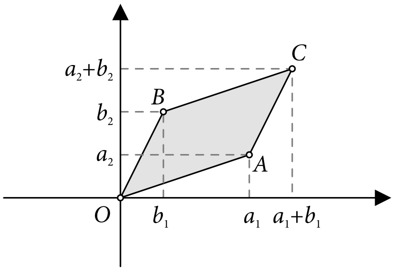
(1) ukoliko neka dva retka (ili stupca) determinante zamijene mjesta, nova determinanta imat će vrijednost $-D$,

(2) ukoliko neki redak (ili stupac) determinante pomnožimo brojem λ, nova determinanta imat će vrijednost λD,

(3) ukoliko neki redak (ili stupac) determinante pomnožen brojem λ dodamo nekom drugom retku (stupcu) te determinante, nova determinanta imat će istu vrijednost D.

U nastavku ćemo se malo osvrnuti na geometrijsku interpretaciju ovih svojstava za $n = 2$.

Promatrajmo paralelogram $OACB$, pri čemu su $O = (0, 0)$, $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$ tri različite točke. Posljednji vrh paralelograma tada je potpuno određen, $C = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.



Možemo reći da je ovaj paralelogram razapet vektorima

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \quad i \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}.$$

Njegovu površinu označimo s $P_{\vec{a},\vec{b}}$. Ako su A i B kao na gornjoj slici, lako se izračuna da je $P_{\vec{a},\vec{b}} = a_1b_2 - a_2b_1$. Naravno, moglo se dogoditi da je razmještaj točaka O, A i B drugačiji. Na primjer, ako se točka A nalazi tamo gdje smo nacrtali B i obratno, tada će ove točke razapinjati isti paralelogram, a njegova će površina biti $a_2b_1 - a_1b_2$. U svakom slučaju,

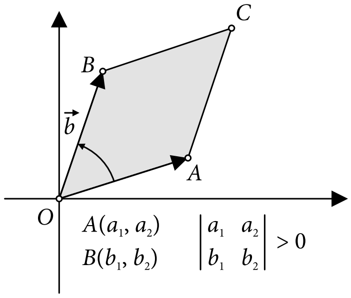
$$P_{\vec{a},\vec{b}} = | a_1b_2 - a_2b_1 |.$$

Ovdje je uključen i slučaj kada su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori jer je tada $P_{\vec{a},\vec{b}} = 0$ i $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Prema tome, imat ćemo

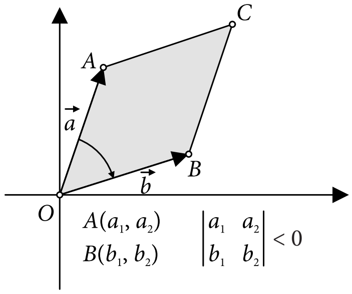
$$P_{\vec{a},\vec{b}} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{ili} \quad P_{\vec{a},\vec{b}} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

ovisno o predznaku gornje determinante. Pritom:

- ako se paralelogram nalazi u dijelu koji prijeđemo pri rotiranju vektora $\vec{a}$ (vektor određen prvim retkom determinante) u pozitivnom smjeru prema vektoru $\vec{b}$ (vektor određen drugim retkom determinante), ova je determinanta pozitivna;



- ako se paralelogram nalazi u dijelu koji prijeđemo pri rotiranju vektora $\vec{a}$ (vektor određen prvim retkom determinante) u negativnom smjeru do vektora $\vec{b}$ (vektor određen drugim retkom determinante), tada je ova determinanta negativna.



Interpretirajmo sada gore navedena svojstva determinante preko površina.

(1) Prvo svojstvo kaže da je

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Obje determinante po apsolutnoj vrijednosti predstavljaju površinu istog paralelograma, ali su predznaci tih determinanti različiti. Zaista, ako se paralelogram nalazi u dijelu koji prijeđemo pri rotiranju vektora $\vec{a}$ u pozitivnom smjeru do vektora $\vec{b}$, tada se taj isti paralelogram nalazi u dijelu koji prijeđemo pri rotiranju vektora $\vec{b}$ u negativnom smjeru prema vektoru $\vec{a}$, i obratno.

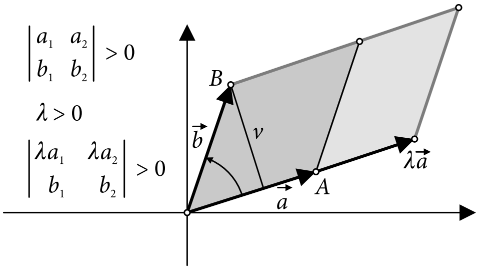
(2) Drugo svojstvo kaže da vrijedi jednakost

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

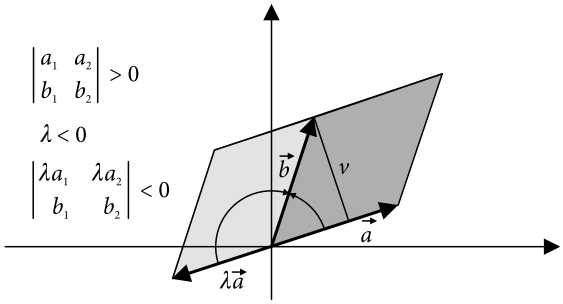
(isto i za drugi redak). Determinanta na lijevoj strani, do na predznak, predstavlja površinu paralelograma razapetog s $\lambda\vec{a}$ i $\vec{b}$, a determinanta na desnoj strani, opet do na predznak, predstavlja površinu paralelograma razapetog s $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Iz oblika paralelograma jasno nam je da je

$$P_{\lambda\vec{a},\vec{b}} = |\lambda\vec{a}|\, v = |\lambda|\,|\vec{a}|\, v = |\lambda|\, P_{\vec{a},\vec{b}}.$$

To nam kaže da lijeva i desna strana u (1) imaju iste apsolutne vrijednosti. Za dovršetak je dovoljno uočiti sljedeće. Ako je $\lambda > 0$, tada će obje determinante biti pozitivne ili obje negativne, kao što je lako uočiti na slici.



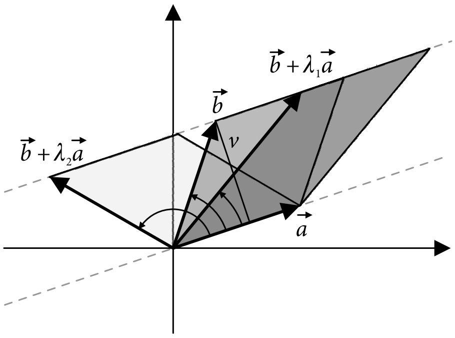
Ako je $\lambda < 0$, tada će ove dvije determinante biti različitih predznaka, opet nam slika sve govori.



(3) Treće svojstvo tvrdi da je

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

za sve $\lambda \in \mathbb{R}$, odnosno da je, za svaki λ, površina paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b} + \lambda\vec{a}$ jednaka površini paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. To se jednostavno iščitava iz slike: svi navedeni paralelogrami imaju istu bazu $|\vec{a}|$ i visinu v, a orijentacija paralelograma neće se promijeniti.



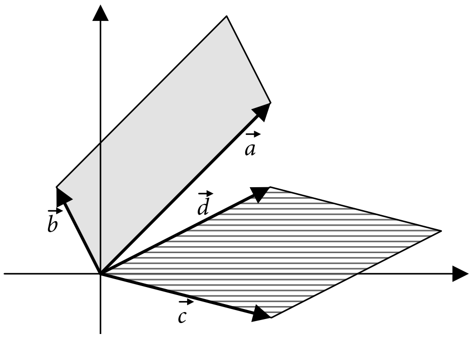
Time smo interpretirali značenje transformacija redaka determinante. Za stupce bismo mogli proći kroz cijeli postupak na potpuno isti način: umjesto paralelograma razapetog vektorima

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \quad i \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j},$$

koji predstavljaju retke naše determinante, promatramo paralelogram razapet vektorima

$$\vec{c} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} \quad i \quad \vec{d} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j},$$

koji predstavljaju stupce naše determinante.

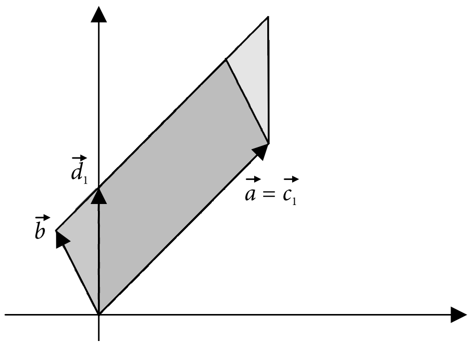


Površine ovih dvaju paralelograma su jednake i obje iznose $|a_1b_2 - a_2b_1|$.

Geometrijski nije jasno zašto bi ova dva paralelograma imala iste površine, zato ćemo to sada razjasniti.

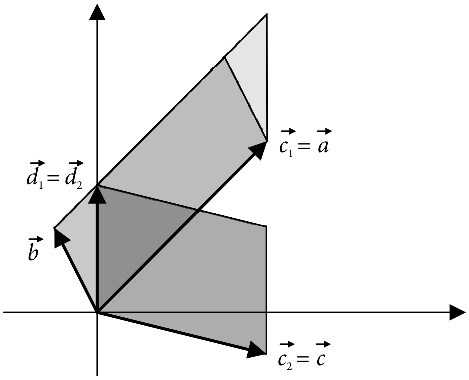
Kroz tri ćemo koraka par vektora $(\vec{a}, \vec{b})$ transformirati do para vektora $(\vec{c}, \vec{d})$, a pritom ćemo uvijek jedan vektor mijenjati tako da mu dodamo skalarni multipl drugog vektora iz tog para, dok taj drugi vektor nećemo mijenjati – na ovaj ćemo način mijenjati paralelograme, ali njihove će površine ostati iste.

1. korak. Uvedimo vektore $\vec{c}_1 = \vec{a}$ i $\vec{d}_1 = \vec{b} - \frac{b_1}{a_1}\vec{a}$. Uočimo da je $\vec{d}_1 = \left(b_2 - \frac{a_2b_1}{a_1}\right)\vec{j}$.



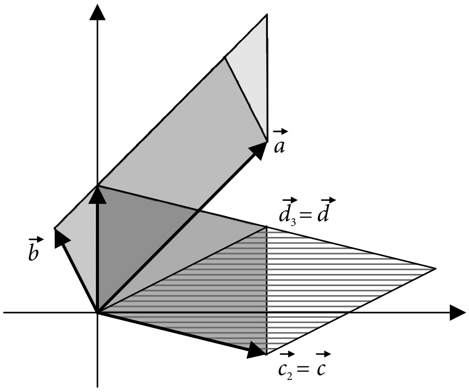
Dva paralelograma označena na slici imaju istu osnovicu $|\vec{a}|$ i visinu na tu osnovicu, pa su njihove površine jednake, dakle, $P_{\vec{a},\vec{b}} = P_{\vec{c}_1,\vec{d}_1}$.

2. korak. Sada uvedimo vektore $\vec{c}_2 = \vec{c}_1 + \frac{(b_1 - a_2)a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\vec{d}_1$ i $\vec{d}_2 = \vec{d}_1$. Raspisano, $\vec{c}_2 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$, a $\vec{c}_2$ i $\vec{c}_1$ imaju istu koordinatu uz $\vec{i}$.



Paralelogram razapet vektorima $\vec{c}_1$ i $\vec{d}_1$ i paralelogram razapet vektorima $\vec{c}_2$ i $\vec{d}_2$ imaju istu osnovicu $|\vec{d}_1|$ i visinu na tu osnovicu, zato su njihove površine jednake. Uočimo da je $\vec{c}_2 = \vec{c}$, pa nam preostaje samo još jedan korak koji će $\vec{d}_2$ transformirati do $\vec{d}$.

3. korak. Konačno, neka su $\vec{c}_3 = \vec{c}_2$ i $\vec{d}_3 = \vec{d}_2 + \frac{a_2}{a_1}\vec{c}_2$. Tada je $\vec{c}_3 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ i $\vec{d}_3 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$, odnosno, $\vec{c}_3 = \vec{c}$ i $\vec{d}_3 = \vec{d}$.



Paralelogram razapet vektorima $\vec{c}_3$ i $\vec{d}_3$ i paralelogram razapet vektorima $\vec{c}_2$ i $\vec{d}_2$ imaju istu osnovicu $|\vec{c}_2|$ i istu visinu na tu osnovicu, prema tome, opet nismo promijenili iznos površine.

U ova tri koraka geometrijski smo dokazali da je površina trokuta razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka površini trokuta razapetog vektorima $\vec{c}$ i $\vec{d}$, dakle

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ovo je, naravno, specijalan slučaj dobro poznate tvrdnje da matrica i njoj transponirana matrica imaju jednake determinante.

Time smo protumačili sva svojstva za $n = 2$. Determinanta trećeg reda je, do na predznak, jednaka volumenu paralelepipeda kojeg razapinju vektori određeni retcima te determinante. Svojstva (1)-(3) možemo slično protumačiti kao i u slučaju površine kod determinanata reda 2.

Na primjer, ako promatramo paralelepiped razapet vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, onda je za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ njegov volumen jednak volumenu paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ jer ovi paralelepipedi imaju istu površinu baze i visinu na tu bazu. To objašnjava treće svojstvo.

Zadatak 7. Geometrijski dokažimo da jednadžba

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

predstavlja jednadžbu pravca u ravnini kroz (dvije različite) točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2).

Rješenje. Raspisivanjem determinante dobili bismo da je

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

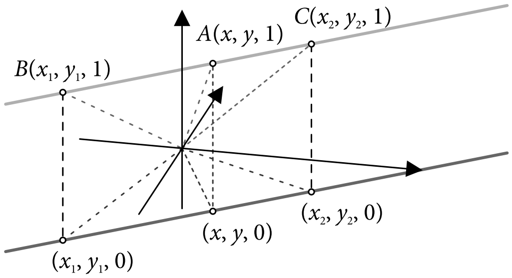
što je, naravno, jednadžba pravca kroz (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Međutim, naš je zadatak dokazati to geometrijski, a ne računski.

Ono što je zanimljivo u ovom zadatku je da su točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) u dvodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^2$, dok je determinanta koja se pojavljuje trećeg reda, pa je njena interpretacija volumen paralelepipeda u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$. Naravno, točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ možemo identificirati s točkama $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Gornja determinanta predstavlja volumen paralelepipeda razapetog vektorima

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k},\ \overrightarrow{OB} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + \vec{k},\ \overrightarrow{OC} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + \vec{k}.$$

Taj volumen bit će jednak 0 ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ komplanarni.



Prema tome, trebamo dokazati da točka (x, y) pripada pravcu određenom točkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) ako i samo ako su $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ komplanarni vektori.

Ako točka (x, y) leži na pravcu (u xy-ravnini) određenom točkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2), tada točka $(x, y, 0)$ leži na pravcu (u prostoru) kroz $(x_1, y_1, 0)$ i $(x_2, y_2, 0)$, a onda i $A = (x, y, 1)$ leži na pravcu kroz $B = (x_1, y_1, 1)$ i $C = (x_2, y_2, 1)$. Tada točke O, A, B i C pripadaju istoj ravnini, pa su $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ komplanarni vektori.

Obratno, pretpostavimo da su $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ komplanarni vektori. Neka je π_1 ravnina koju oni određuju. Neka je π_2 ravnina zadana jednadžbom $z = 1$. Očito su π_1 i π_2 različite ravnine, a njihov je presjek pravac kojemu pripadaju točke A, B i C. Prema tome, točke A, B i C su kolinearne, a onda su i točke (x, y), (x_1, y_1) i (x_2, y_2) kolinearne, to jest, (x, y) leži na pravcu (u xy-ravnini) određenom točkama(x_1, y_1) i (x_2, y_2). □

Iako determinante četvrtog reda više ne možemo geometrijski interpretirati, prethodni primjer sugerira što bi dala analogno formirana jednadžba s determinantom četvrtog reda.

Zadatak 8. Dokažite da se jednadžba ravnine koja je određena nekolinearnim točkama $T_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $T_2\,(x_2, y_2, z_2)$ i $T_3\,(x_3, y_3, z_3)$ može napisati u obliku

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rješenje. Ukoliko drugi redak determinante, pomnožen s –1, dodamo svim ostalim retcima, u posljednjem stupcu imat ćemo jedinicu na drugom mjestu i sve ostalo nule. Tada razvojem po tom stupcu dobivamo

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

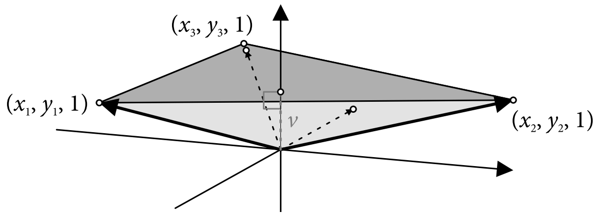
Ako je T oznaka za točku (x, y, z) koja zadovoljava prethodnu jednadžbu, tada ova determinanta trećeg reda predstavlja volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\overrightarrow{T_1T}$, $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$. Taj volumen jednak je nuli ako i samo ako su ovi vektori komplanarni, odnosno ako i samo ako točke T_1, T_2, T_3 i T pripadaju istoj ravnini. Ovo možemo interpretirati i na način da T pripada ravnini određenoj (nekolinearnim) točkama T_1, T_2 i T_3. Prema tome, (2) opisuje skup svih točaka (x, y, z) koje pripadaju ravnini određenoj točkama T_1, T_2 i T_3, pa je to upravo jednadžba te ravnine. □

Zadatak 9. Geometrijski pokažimo da je broj

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

po apsolutnoj vrijednosti, jednak površini trokuta u ravnini s vrhovima (x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3).

Rješenje. Neka je P površina trokuta razapetog točkama (x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3). Kao i u prethodnom zadatku zaključujemo da je ta površina jednaka površini trokuta razapetog točkama $T_1\,(x_1, y_1, 1)$, $T_2\,(x_2, y_2, 1)$ i $T_3\,(x_3, y_3, 1)$, koje se nalaze u ravnini $z = 1$.



Volumen tetraedra $OT_1T_2T_3$ jednak je jednoj šestini volumena paralelepipeda kojeg razapinju vektori $\overrightarrow{OT}_1$, $\overrightarrow{OT}_2$ i $\overrightarrow{OT}_3$, a koji se može izračunati preko determinante. S druge strane, volumen spomenutog tetraedra jednak je $\frac{1}{3}P_{\triangle T_1T_2T_3}\cdot v$, gdje je v visina tetraedra iz vrha O. Očito je $v = 1$, pa je taj volumen jednak $\frac{1}{3}P$. Dakle,

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}P,$$

odakle slijedi tražena formula. □

Literatura

1. H. Anton, C. Rorres, *Elementary linear algebra: applications version*, 8th ed., New York, John Wiley & Sons, 2000.
2. Lj. Arambašić, *Linearna algebra*, nastavni materijali za kolegije Linearna algebra 1 i Linearna algebra 2, https://web.math.pmf.unizg.hr/~ljsekul
3. V. Haggett (proposer), F. W. Saunders (solver), Elementary problem 1135, *American Mathematical Monthly*, **62** no. 4 (Apr. 1955.), p. 257.
4. J. Hefferon, *Linear algebra*, elektroničko izdanje, dostupno na http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/booked2.pdf
5. G. M. Petersen, Area of a triangle, *American Mathematical Monthly*, **62** (4) (Apr. 1955.), p. 249.
6. C. W. Trigg (proposer), Quickie 307, *Mathematics Magazine*, **36** (1) (Jan. 1963.), p. 77.