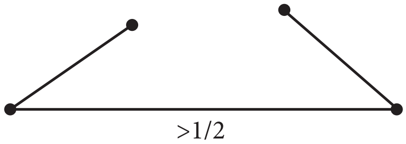
Slučajni trokut

Zvonimir Šikić[1]

Analizirat ćemo dobro poznati problem slučajnoga trokuta:

Ako na intervalu [0,1] *slučajno odaberemo dvije točke, kolika je vjerojatnost da se od tri dobivena intervala može složiti trokut?*

Trokut ne možemo složiti samo ako je jedan od intervala duži od zbroja drugih dvaju, tj. ako je jedan od intervala duži od ½.



Dakle, trokut je moguć ako su sva tri intervala kraća od ½, pa naš problem postaje:

Ako na intervalu [0,1] *slučajno odaberemo dvije točke, kolika je vjerojatnost da su sva tri dobivena intervala kraća od ½?*

1. Rješenje:

(a) Da bi sva tri intervala bila kraća od ½, slučajno odabrane točke moraju biti s raznih strana od ½ (jer ako su s iste strane, onda je jedan interval duži od ½).

(b) Osim toga, točka u prvoj polovici mora u svojoj polovici biti desnije nego što je točka u drugoj polovici (jer bi inače interval među njima bio duži od ½).

Vjerojatnost da se dogodi (a) je ½ jer nakon odabira prve točke, druga točka mora biti u onom intervalu duljine ½ u kojem nije prva točka.

Nakon što se dogodio (a), vjerojatnost da se dogodi (b) također je ½ jer će (zbog simetrije) točka u prvoj polovici biti desnije od one u drugoj s jednakom vjerojatnošću s kojom će i ona u drugoj biti desnije od one u prvoj. Jedna je sigurno desnije pa je zbroj tih istih vjerojatnosti 1.

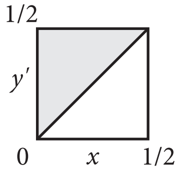
Dakle, (a) i (b) će se dogoditi s vjerojatnošću ½ · ½ = ¼.

[1]Zvonimir Šikić, Sveučilište u Zagrebu

2. Rješenje (skoro isto kao 1. rješenje):

Rezoniramo kao u 1. rješenju sve do određivanja vjerojatnosti da se dogodi (b) nakon (a). Zatim zaključujemo na sljedeći način.

Točka x u prvoj polovici bit će u toj polovici desnije od točke y u drugoj polovici samo ako je točka $y' = y - ½$ lijevo od x, tj. samo ako je $y' < x$. No, vjerojatnost da je $y' < x$ za slučajno odabrane x i y' iz $[0, ½]$ je ½ (vidi sliku).



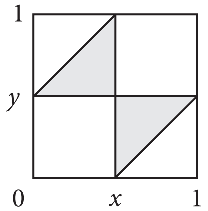
Dakle, (a) i (b) će se dogoditi s vjerojatnošću $½ \cdot ½ = ¼$.

3. Rješenje:

Označimo slučajno odabrane točke u $[0,1]$ s x i y. Tri intervala koje te točke određuju bit će kraća od ½ samo ako se dogodi

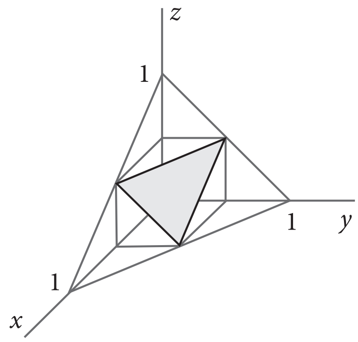
$$x < ½ \quad y > ½ \quad y - x < ½ \qquad \text{ili} \qquad x > ½ \quad y < ½ \quad x - y < ½.$$

To će se dogoditi s vjerojatnošću ¼ (vidi sliku).



4. Rješenje:

Označimo duljine triju intervala (koje određuju dvije slučajno odabrane točke) s x, y i z. Dakle, kolika je vjerojatnost da je $x < ½$, $y < ½$ i $z < ½$ pod uvjetom da je $x + y + z = 1$?



Uvjet zadovoljavaju sve točke velikoga trokuta.

Ravnine $x = ½$, $y = ½$ i $z = ½$ unutar velikog trokuta omeđuju mali sivi trokut.

Njegove točke zadovoljavaju $x < ½$, $y < ½$ i $z < ½$.

Mali trokut koji čine srednjice velikoga trokuta ima površinu ¼ površine velikoga trokuta.

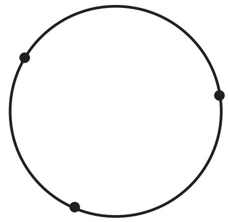
Dakle, tražena je vjerojatnost ¼.

5. Rješenje:

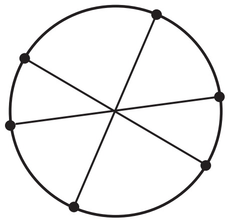
Za svaki odabir x iz [0, ½] trokut je moguć ako je y odabran iz [½, x + ½]. Gustoća vjerojatnosti od x je 2 (jer je $2 \cdot ½ = 1$), a gustoća vjerojatnosti od y, pod uvjetom da je odabran x, je x (jer je to duljina intervala [½, x + ½]). Po Bayesovom teoremu tražena vjerojatnost je

$$\int_0^{1/2} 2x\,dx = 1/4$$

6. Rješenje:



Spojimo točke 0 i 1 tako da interval [0,1] postane kružnica duljine 1 pa slučajno odaberemo još dvije točke na toj kružnici. Problem je naći vjerojatnost da su sva tri dobivena intervala kraća od ½, tj. da tri slučajno odabrane točke kružnice ne leže na jednoj polukružnici.



Problem ćemo riješiti tako da tri točke kružnice odaberemo u dva koraka (vidi sliku):

(i) Slučajno odaberemo tri para antipodalnih točaka.

(ii) Iz svakog antipodalnog para odaberemo po jednu točku.

Iz tri para antipodalnih točaka njih tri možemo odabrati na $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ načina.

Te će tri točke ležati na istoj polukružnici samo ako smo izabrali tri konsekutivne točke, a to možemo učiniti na 6 načina (123, 234, 345, 456, 561 i 612).

Dakle, vjerojatnost da tri točke leže na istoj polukružnici je 6/8 = 3/4 pa je vjerojatnost da tri točke ne leže na istoj polukružnici 1/4.

Razumijevanje svakog od ovih šest rješenja pretpostavlja razumijevanje određenih matematičkih sadržaja. Rješenja 1. i 2. pretpostavljaju razumijevanje elementarne geometrijske vjerojatnosti (uz minimalno analitičke geometrije u 2. slučaju). Rješenja 3. i 4. pretpostavljaju dodatno razumijevanje analitičke geometrije ravnine i prostora. Rješenje 5. pretpostavlja razumijevanje gustoće kontinuirane razdiobe, odgovarajućeg oblika Bayesovog teorema i elementarnog integriranja. Rješenje 6. posebno je zanimljivo jer pretpostavlja razumijevanje samo elementarne konačne vjerojatnosti (naravno, do prijelaza na kružnicu i antipodalne točke nije lako doći samostalno i znak je pravog matematičkog talenta).

Našu ćemo analizu završiti na matematički uobičajen način. Generalizirat ćemo naš problem:

Ako na intervalu [0,1] *slučajno odaberemo n-1 točku, kolika je vjerojatnost da se od n dobivenih intervala može složiti n-terokut?*

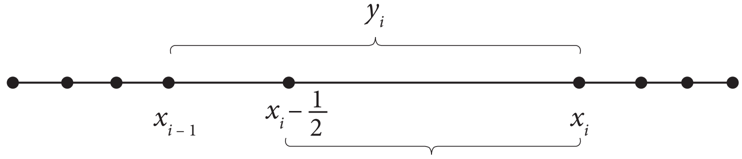
Kao i u posebnom slučaju trokuta, n-terokut ne možemo složiti samo ako je jedan od intervala duži od zbroja svih ostalih, tj. ako je jedan od intervala duži od ½.

Dakle, n-terokut je moguć samo ako su svi intervali kraći od ½, pa naš problem postaje:

Ako na intervalu [0,1] *slučajno odaberemo n-1 točku, kolika je vjerojatnost da je svih n dobivenih intervala kraće od ½?*

Označimo slučajno odabrane točke s x_i, $i = 1, 2, ..., n - 1$, a dužine intervala lijevo od njih s y_i (drugim riječima $y_i = x_i - x_{i-1}$, uz $x_0 = 0$ i $x_n = 1$). Trebamo odrediti vjerojatnost da su svi $y_i < ½$.

Odredimo najprije vjerojatnost da je $y_i > ½$. To će se dogoditi ako je $x_i > ½$ i ako su osim toga sve ostale točke x_j izvan intervala $[x_i - ½, x_i]$, vidi sliku. Vjerojatnost od $x_i > ½$ je ½, a vjerojatnost da su sve ostale točke unutar preostalog intervala duljine ½ je $1/2^{n-1}$.



Dakle, vjerojatnost od $y_i > ½$ je $½ \cdot 1/2^{n-1} = 1/2^n$.

To znači da vjerojatnost da je bar jedan $y_i > ½$ iznosi $(n+1)/ 2^n$ pa naša tražena vjerojatnost, da ni za jedan interval ne vrijedi $y_i > ½$, iznosi $1 - (n+1)/2^n$.

Naravno, provedemo li ovaj zadnji dokaz s $n = 2$, imamo i 7. rješenje našeg početnog problema.