Geometrijski dokazi jedne trigonometrijske jednakosti

Alija Muminagić[1], Šefket Arslanagić[2]

U ovom ćemo članku promatrati jednu trigonometrijsku jednakost koja glasi:

$$\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}\,. \tag{1}$$

Očito je možemo dokazati na više raznih načina koristeći se određenim dobro poznatim formulama iz trigonometrije. To su npr. adicijske formule oblika

$$\sin 15^\circ = \sin\left(45^\circ - 30^\circ\right),\ \cos 15^\circ = \cos\left(45^\circ - 30^\circ\right)$$

ili

$$\sin 15^\circ = \sin\left(60^\circ - 45^\circ\right) \text{ te } \cos 15^\circ = \cos\left(60^\circ - 45^\circ\right).$$

Zatim, jednakost (1) možemo dokazati koristeći formule za pretvaranje zbroja ili razlike u produkt, tj.

$$\cos 15^\circ + \sin 15^\circ = \cos 15^\circ + \sin\left(90^\circ - 75^\circ\right) = \cos 15^\circ + \cos 75^\circ = \ldots,$$

$$\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \cos 15^\circ - \sin\left(90^\circ - 75^\circ\right) = \cos 15^\circ - \cos 75^\circ = \ldots.$$

Isto tako koristeći se formulama

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$

tj.

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \ldots, \quad \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \ldots,$$

lako dokažemo jednakost (1).

Recimo još da jednakost (1) možemo dokazati koristeći formule

$$\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{1+\sin x}, \quad \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{1-\sin x},$$

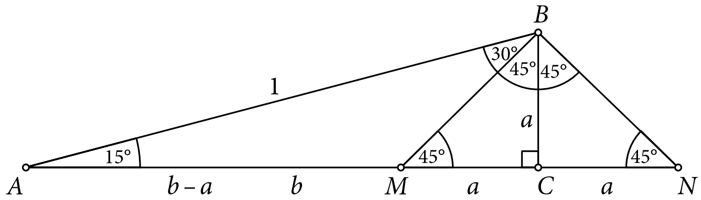
uzimajući da je $x = 30^\circ$.

[1]Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

[2]Šefket Arslanagić, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BiH

Sada ćemo dati tri zanimljiva geometrijska dokaza jednakosti (1).

Dokaz 1. Promatrajmo pravokutni trokut ΔABC s kutovima $|\angle BAC| = 15°$, $|\angle ACB| = 90°$, hipotenuzom $|AB| = 1$ i katetama $|BC| = a$ $|AC| = b$ (Slika 1.).



Slika 1.

Tada je iz pravokutnog trokuta ΔABC:

$$a = \sin 15°,\ b = \cos 15°. \tag{2}$$

Produžimo katetu $\overline{AC}$ preko točke C do točke N tako da je $|CN| = a$ te na kateti $\overline{AC}$ toga trokuta odredimo točku M tako da je $|CM| = a$ i $|CN| = a$. Sa slike sada vidimo da je $|AM| = b - a$ i $|AN| = b + a$. U trokutu ΔMNB je $|\angle CMB| = |\angle CNB| = 45°$, a zbog $|MC| = |BC| = |CN| = a$ vrijedi $|\angle MBC| = |\angle CMB| = |\angle CBN| = |\angle CNB| = 45°$, pa je kut $|\angle ABM| = 30°$. Primjenom teorema o sinusima na trokute ΔABM i ΔABN dobivamo da je

$$\frac{|BM|}{\sin 15°} = \frac{|AM|}{\sin 30°} \quad \text{i} \quad \frac{|BN|}{\sin 15°} = \frac{|AN|}{\sin 120°},$$

pa zbog $|BM| = |BN|$ slijedi da je

$$\frac{|AM|}{\sin 30°} = \frac{|AN|}{\sin 120°}.$$

Kako je $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60°$, to je ekvivalentno

$$\frac{b-a}{\sin 30°} = \frac{b+a}{\sin 60°},$$

a odavde zbog (2)

$$\frac{\cos 15° - \sin 15°}{\sin 30°} = \frac{\cos 15° + \sin 15°}{\sin 60°},$$

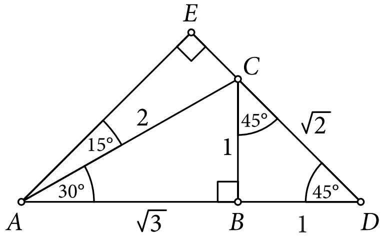
tj.

$$\frac{\cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - \sin 15°} = \frac{\sin 60°}{\sin 30°}$$

ili

$$\frac{\cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - \sin 15°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},\ \text{q.e.d.}$$

Dokaz 2. Promatrajmo pravokutni trokut ΔABC u kojemu je $|\angle ABC| = 90°$, $|\angle CAB| = 30°$ i hipotenuza $|AC| = 2$ (Slika 2.). Taj je trokut polovina jednakostraničnog trokuta pa je $|BC| = 1$ i $|AB| = \sqrt{3}$.



Slika 2.

Produžimo katetu $\overline{AB}$ preko točke B do točke D tako da je $|BD| = |BC| = 1$. Vidimo sada da je $|\angle BDC| = |\angle BCD| = 45°$ i $|CD| = \sqrt{2}$. Produžimo stranicu $\overline{CD}$ preko točke C do točke E tako da je $\overline{AE} \perp \overline{DC}$, tj. $|\angle AED| = 90°$ pa u trokutu ΔADE vrijedi da je

$$|\angle EAD| = 180° - 90° - 45° = 45°,$$

što znači da je $|\angle EAC| = 15°$, a trokut ΔADE je jednakokračan pa je $|AE| = |ED|$, tj. trokut ΔADE je polovina kvadrata stranice $\overline{AE}$ i dijagonale $\overline{AD}$. Sada je

$$|AE| = \frac{|AD|}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

i

$$|EC| = |ED| - |CD| = |AE| - |CD| = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \quad .$$

Dalje je

$$|\angle EAC| = |\angle EAD| - |\angle CAB| = 45° - 30° = 15°,$$

pa je u pravokutnom trokutu ΔEAC

$$\sin 15° = \frac{|EC|}{|AC|} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

i

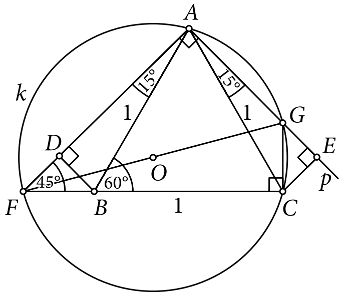
$$\cos 15° = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} .$$

Sada dobivamo da je

$$\frac{\cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - \sin 15°} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}\text{, q.e.d.}$$

Dokaz 3. Neka je trokut ΔABC jednakostranični kod kojega je $|AB| = |BC| = |CA| = 1$ (Slika 3.). Produžimo stranicu $\overline{BC}$ preko točke B do točke F tako da je $|\angle FAB| = 15°$.

Neka je k kružnica opisana oko trokuta ΔAFC. Kroz točku A povucimo pravac p koji kružnicu k siječe u točki G, tako da je $|\angle CAG| = 15°$. Tada je $|\angle FAG| = 15° + 60° + 15° = 90°$, pa je $\overline{FG}$ promjer kružnice k. Slijedi da je $|\angle FAG| = 90°$ i da je $|\angle FCG| = 90°$. Neka je točka D nožište visine iz točke B na stranicu $\overline{AF}$ trokuta ΔAFB. Iz pravokutnog trokuta ΔADB zbog



Slika 3.

$|AB| = 1$ slijedi da je $\cos 15° = \dfrac{|AD|}{|AB|} = |AD|$ i $\sin 15° = \dfrac{|BD|}{|AB|} = |BD|$.

Dalje je $|\angle FBA| = 180° - 60° = 120°$, pa iz trokuta ΔAFB slijedi da je $|\angle AFB| = 180° - 135° = 45°$. Dakle, trokut ΔDFB je jednakokračan pa je $|DF| = |BD| = \sin 15°$. Sada imamo da je

$$|AF| = |AD| + |DF| = \cos 15° + \sin 15° . \qquad (3)$$

Označimo s E nožište okomice iz točke C na pravac p. U pravokutnom trokutu ΔACE je $|AE| = \cos 15°$ i $|CE| = \sin 15°$. Sada imamo da je $|\angle GFC| = |\angle CAG| = 15°$, kao obodni kutovi nad lukom $\overset{\frown}{CG}$ kružnice k, pa je $|\angle FGC| = 75°$. Zbog $|\angle BFD| = 45°$ je $|\angle GFA| = 45° - 15° = 30°$, pa slijedi da je $|\angle AGF| = 60°$. Sada iz jednakosti $|\angle AGF| + |\angle FGC| + |\angle CGE| = 180°$ dobivamo da je $|\angle CGE| = 180° - 60° - 75° = 45°$ pa je trokut ΔGEC jednakokračan. Zbog $|AC| = 1$ imamo iz pravokutnog trokuta ΔAEC da je $|AE| = \cos 15°$, $|EC| = |GE| = \sin 15°$, pa imamo da je

$$|AG| = |AE| - |GE| = \cos 15° - \sin 15° . \qquad (4)$$

Iz pravokutnog trokuta ΔAFG sada na osnovi (3) i (4) dobivamo da je

$$\sqrt{3} = \mathrm{tg}60^0 = \mathrm{tg}\angle AGF = \frac{|AF|}{|AG|} = \frac{\cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - \sin 15°} \text{, q.e.d.}$$

Ako ste se čitajući ova rješenja uvjerili da i relativno lak zadatak može biti zanimljiv, članak je postigao svoj cilj, a pogotovo ako pokušate naći još neke načine rješavanja ovog ili sličnog zadatka.

Literatura

1. Carstensen, J.; Muminagić, A. 1997. *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*. Časopis „Triangle" (Sarajevo), Vol. 1, No. 2, s. 87-88.
2. Muminagić, A. 2013. *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskoh jednakosti*. Nastava matematike (Beograd), Vol. 58, No. 1-2, s. 31-34.
3. Pavković, B.; Veljan, D. 1995. *Elementarna matematika 2*. Školska knjiga. Zagreb.