Teleskop i drugi uređaji – primjeri primjene krivulja drugog reda

Petar Mladinić[1], Nikol Radović[2]

U srednjoškolskoj analitičkoj geometriji poučavaju se i uče krivulje drugog reda: kružnica, elipsa, hiperbola i parabola.

U ovom ćemo tekstu elaborirati jednu važnu i, u našem poučavanju školske matematike, malo poznatu uporabu njihovih svojstava odnosno kombiniranje tih svojstava u izgradnji teleskopa i drugih uređaja.

Engleski fizičar Isaac Newton (1642. – 1727.) kao primarno je zrcalo rabio parabolično zrcalo u kombinaciji sa sekundarnim zrcalom.

Laurent Cassegrain (oko[3] 1629. – 1. rujna 1693.) bio je katolički svećenik kojeg se danas ističe kao vjerojatnog izumitelja tzv. *Cassegrainovog reflektora*, preklopljenog dvozrcalnog reflektirajućeg teleskopa. On je prvi uporabio i hiperbolično sekundarno zrcalo kojim je zraku svjetlosti fokusirao u vrh primarnog zrcala.

Danas je najpoznatiji reflektirajući teleskop **Hubble Space Telescope**.

Prije samog opisa matematičke „podloge" konstrukcije teleskopa i nekih drugih uređaja podsjetimo se nekih temeljnih činjenica o krivuljama drugog reda.

a) Krivulje drugog reda, neka svojstva i zadatci

Ovdje ćemo samo podsjetiti na neke temeljne pojmove krivulja 2. reda i njihove prikaze u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Primjerice, samo spomenimo te pojmove za elipsu. Kanonska (osna) jednadžba elipse glasi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Pri tome je a velika i b mala poluos.

Za ostale je krivulje slično; pogledajte u svaki udžbenik analitičke geometrije.

---

[1]Petar Mladinić, Zagreb

[2]Nikol Radović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb

[3]Nepoznat je točan datum rođenja.

Mijenjanjem parametara dobivaju se koordinatni prikazi zadanih jednadžbi čunjosječica.

Za $a = 3.00$ i $b = 3.00$ u jednadžbi

$$\frac{x^2}{9.00} + \frac{y^2}{9.00} = 1$$

dobiva se kružnica, a za $a = 3.00$ i $b = 2.00$ dobiva se elipsa.

Za $a = 3.00$ i $b = 3.00$ u jednadžbi

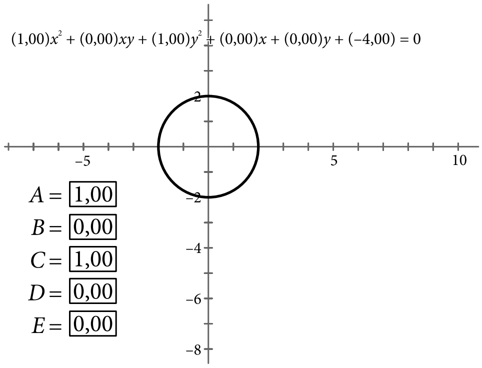
$$\frac{x^2}{9.00} - \frac{y^2}{9.00} = 1$$

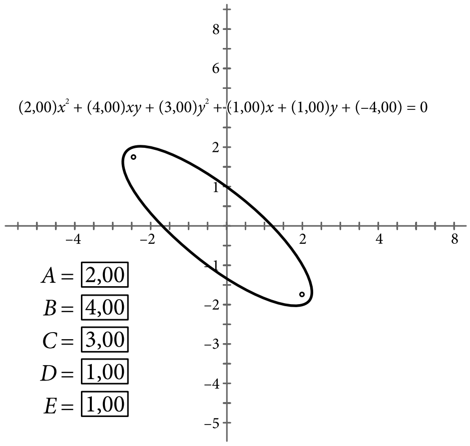
dobiva se hiperbola.

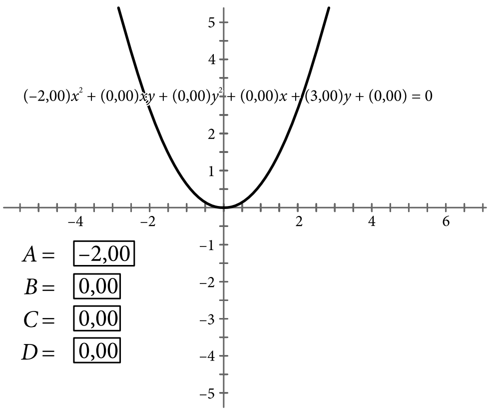
U općoj jednadžbi

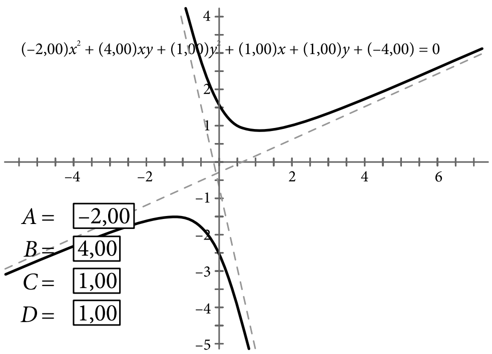
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

mijenjanjem parametara A, B, C, D, E i F dobivaju se prikazi krivulja drugog reda. Primjerice, evo nekih slika:









Zadatci.

Sljedeći zadatci ukazat će na činjenice i probleme s kojima su se suočavali konstruktori teleskopa i uspješno ih rješavali te dio tih rješenja uspješno primijenili u konstrukciji teleskopa (nekada, ali i danas).

Rješenja zadataka tj. dijelova rješenja ovdje su naznačeni. Na čitatelju je da samostalno riješi sve detalje zadataka pomoću *Sketchpada* ili nekog drugog programa dinamičke geometrije, istraži i dokaže tvrdnje kao što smo ih i mi riješili.

Zadatak 1. Zadana je kružnica $k(S,r)$ i dvije točke A i $G, A \in k$. Simetrala s dužine $\overline{AG}$ siječe pravac SA u točki P.

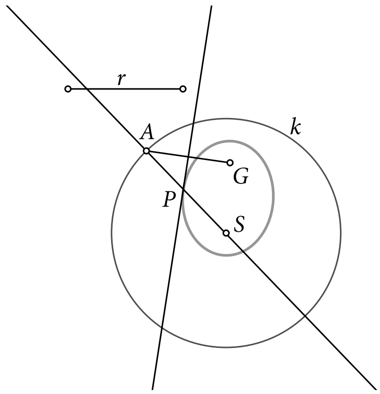
a) Što možeš zaključiti o tragu točke P kad se točka A giba po kružnici?

b) Koliko je $|SP|+|PG|=$?

c) Mijenjaj položaj točke G. Što možeš uočiti?

Rješenje:

Evo ilustracije gibanja točke P iz zadatka a).



Zadatak 2. Elipsa je skup točaka za koje vrijedi:

$$\{T \in M : |F_1T|+|F_2T|=2a\},$$

gdje je $a \in \mathbb{R}^+$, a točke F_1, F_2 su žarišta.

a) U točki elipse konstruiraj tangentu.

b) Iz točke A ravnine M izlazi zraka svjetlosti i reflektira se na elipsi. Konstruiraj reflektiranu zraku.

c) Konstruiraj eliptično zrcalo[4]

d) Konstruiraj eliptični bilijar[5]

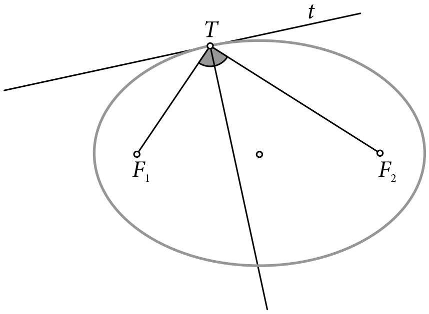
[4]Vidi u [6], str. 1171., u tekstu Elliptic Paraboloid.

[5]Vidi u [6], str. 295. - 296., u tekstu Billiards.

Rješenje.

a) Koristi optičko svojstvo elipse:

Ako je t tangenta elipse u točki T, onda je t vanjska simetrala para pravaca F_1T *i* TF_2 *i okomita je na simetralu kuta* $\angle F_1TF_2$ (vidi sliku) .



Zadatak 3. Hiperbola je skup točaka za koje vrijedi:

$$\{T \in M : ||F_1T| - |F_2T|| = 2a,\}.$$

gdje je $a \in \mathbb{R}^+$, a točke F_1, F_2 su žarišta.

a) U točki hiperbole konstruiraj tangentu.
b) Iz točke *A* ravnine *M* izlazi zraka svjetlosti i reflektira se na hiperboli. Konstruiraj reflektiranu zraku.
c) Konstruiraj hiperbolično zrcalo.
d) Konstruiraj hiperbolični bilijar.

Zadatak 4. Parabola je skup točaka za koje vrijedi:

$$\{T \in M : |FT| = |rT|,\}.$$

gdje je točka *F* žarište, a pravac *r* je ravnalica.

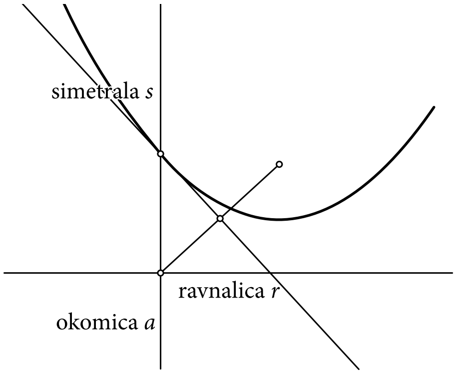
Konstruiraj parabolu.

a) U točki parabole konstruiraj tangentu.
b) Iz točke *A* ravnine *M* izlazi zraka svjetlosti i reflektira se na paraboli. Konstruiraj reflektiranu zraku.
c) Konstruiraj parabolično zrcalo.
d) Konstruiraj parabolični bilijar.

Rješenje.

Na slici je dan algoritam konstruiranja tangente u točki parabole pomoću *Sketchpada*. Najprije nacrtaj zadano žarište *F* i ravnalicu *r*. Odaberi bilo koju točku $A \in r$.

Konstruiraj simetralu *s* dužine $\overline{AF}$. U točki *A* konstruiraj okomicu $a \perp r$. Odredi sjecište *T* simetrale *s* i okomice *a*. Parabola će tada biti lokus ili skup svih takvih točaka *T* kako se mijenja $A \in r$.



Zadatak 5. Riješite sljedeće zadatke ili dokažite tvrdnje od a) do f):

a) Zadan je pravac *p* i dvije točke *A* i *B* s različitih strana pravca. Točka *A* je dalje od pravca nego što je to točka *B*. Nađite na pravcu točku *X* tako da je razlika udaljenosti $|AX|-|BX|$ najveća.

b) Zadana je elipsa s fokusima *A* i *B*. Dokažite da je:

   1) skup točaka koje su simetrične fokusu *A* s obzirom na sve tangente elipse kružnica,

   2) skup nožišta okomica iz fokusa *A* na sve tangente elipse kružnica.

c) Dokažite tvrdnje iz zadatka b) ako je zadana hiperbola.

d) Zadan je parabola s fokusom *F* i ravnalicom *r*.

   1) Nađite skup točaka simetričnih fokusu s obzirom na sve tangente.

   2) Dokažite da je skup nožišta okomica iz fokusa *F* na sve tangente parabole pravac paralelan s ravnalicom *r*.

e) Dokažite da je umnožak udaljenosti od fokusa elipse do njegove tangente konstantan.

f) Dokažite da je umnožak udaljenosti od fokusa hiperbole do njegove tangente konstantan.

U analitičkoj geometriji krivulja drugog reda poznato je da se sve one mogu opisati na jedinstveni način, i da su njihove definicije i prezentacije ovisne o veličini *ekscentriciteta*.

Za elipsu (1) ekscentricitet je dan formulom

$$c=\sqrt{a^2-b^2},$$

a formulom

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

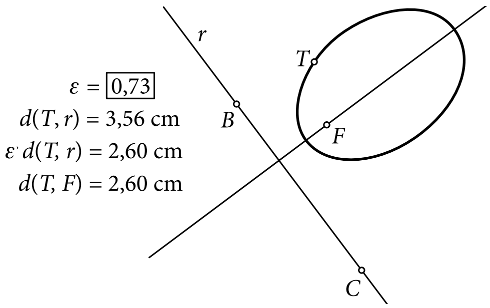
dan je numerički ekscentricitet. Slične formule vrijede i za hiperbolu.

Obratno, čunjosječnica (konika) sa žarištem u točki F, ravnalicom r i ekscentricitetom ε skup je točaka T za koji je

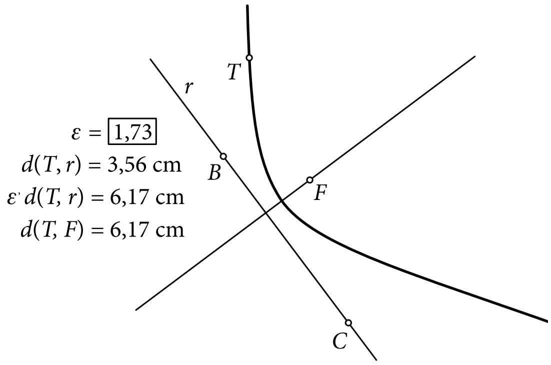
$$d(T,F) = \epsilon \cdot d(T,r).$$

Evo ilustracije tvrdnji o ekscentricitetu. Na sljedećim slikama koje su generirane *Sketchpadom* vidi se ovisnost krivulje o veličini ekscentriciteta. Zbog toga je na svakoj slici posebno to naznačeno.

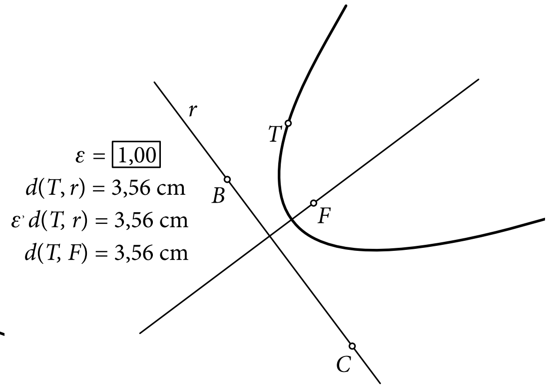
Elipsa ima ekscentricitet manji od 1:



Hiperbola ima ekscentricitet veći od 1:



Parabola ima ekscentricitet jednak 1:



Ako krivulje imaju zajednička žarišta (fokuse), onda se kaže da su *konfokalne*.

Konfokalnost zrcala i refleksija zraka svjetlosti primijenila se u konstrukciji teleskopa. Razmotrit ćemo **Cassegrainov** i **Hubbleov teleskop** i uočiti kako su domišljato primijenjene činjenice i neka svojstva krivulja drugog reda.

b) Cassegrainov reflekirajući teleskop

„Klasični" Cassegrainov teleskop ima parabolično primarno ogledalo i hiperbolično sekundarno ogledalo koje reflektira svjetlo natrag kroz rupu u primarnom.

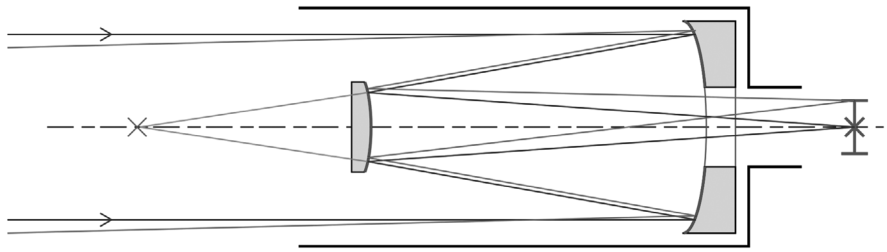
Sklapanje optike čini ovaj kompaktni dizajn. Na manjim teleskopima i lećama fotoaparata sekundar se često postavlja na optičku ravninu, optički prozirnu staklenu ploču koja zatvara cijev teleskopa.

Koriste se posebna svojstva paraboličnih i hiperboličnih reflektora. Udubljeni (nekonveksni) parabolični reflektor reflektirat će sve dolazne svjetlosne zrake paralelne sa svojom osi simetrije do jedne točke, fokusa.

Konveksni hiperbolični reflektor ima dva žarišta i reflektirat će sve svjetlosne zrake usmjerene prema jednom od svoja dva žarišta prema svom drugom fokusu.

Ogledala u ovoj vrsti teleskopa dizajnirana su i postavljena tako da dijele jedan fokus i tako da će drugi fokus hiperboličnog zrcala biti u istoj točki u kojoj se slika promatra, obično samo izvan okulara.

Parabolično ogledalo reflektira paralelne svjetlosne zrake koje ulaze u teleskop do njegovog fokusa, koje je ujedno i fokus hiperboličnog zrcala. Hiperbolično zrcalo tada reflektira te svjetlosne zrake u drugi fokus, gdje se slika promatra.



Slika 1 „Klasični" Cassegrainov teleskop

Cassegrainov reflektor kombinacija je primarnog konkavnog zrcala i sekundarnog konveksnog zrcala.

Često se koristi, kao i optički teleskop, radio antena.

Ovaj teleskop postavlja žarišnu točku na prikladno mjesto iza primarnog zrcala, a konveksno sekundarno dodaje efekt stvaranja slike stvarajući znatno veću žarišnu duljinu u ovom mehanički kratkom sustavu.

U simetričnom Cassegrainu oba su zrcala poravnana oko optičke osi, a primarno zrcalo obično sadrži rupu u sredini, dopuštajući tako svjetlu doći do okulara, kamere ili senzora slike.

Alternativno, kao i u mnogim radio teleskopima, konačni fokus može biti ispred primarnog.

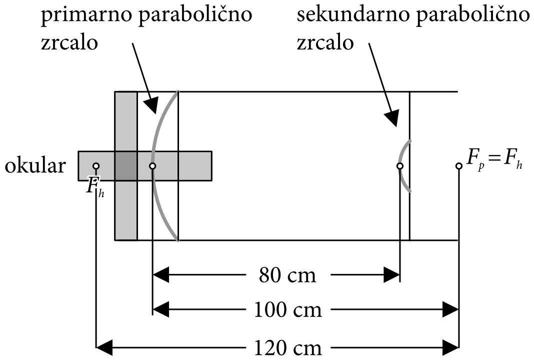
U asimetričnom Cassegrainu zrcalo se može nagnuti kako bi se izbjeglo zamračenje primarnog zrcala ili kako bi se izbjegla potreba za rupom u primarnom zrcalu (ili oboje).

Reflektor Cassegrain dobio je ime po reflektirajućem dizajnu teleskopa koji je objavljen 25. travnja 1672., a koji se pripisuje **Laurentu Cassegrainu**.

Slični dizajni s konveksnim sekundarnim zrcalima pronađeni su u spisima **Bonaventure Cavalierija** iz 1632. godine koji opisuju goruća zrcala i među spisima **Marina Mersennea** iz 1636. godine koji opisuju dizajn teleskopa.

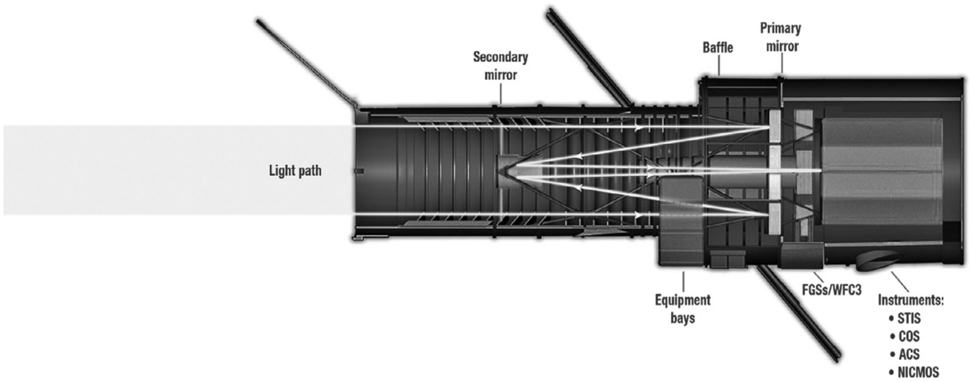
Pokušaji **Jamesa Gregoryja** iz 1662. godine da stvori reflektirajući teleskop uključivali su Cassegrainovu konfiguraciju, sudeći prema konveksnom sekundarnom zrcalu pronađenom među njegovim eksperimentima.

Zadatak 6. Na slici su zadane dimenzije Cassegrainovog teleskopa. Odredite standardni oblik jednadžbe hiperbole koja je centrirana u ishodištu sa žarištima na osi apscisa.



c) Hubbleov teleskop

Na internetu[6] se može naći ovakva slika Hublleovog teleskopa:



[6] www.wikipedia.org/

Kružeći visoko iznad Zemlje, svemirski teleskop Hubble ima jasan pogled na svemir bez zamagljujućih i upijajućih utjecaja atmosfere.

Osim što promatra vidljivo i blizu infracrvenom svjetlo, Hubble detektira ultraljubičasto svjetlo koje apsorbira atmosfera i vidljivo samo iz svemira.

Teleskop je tijekom svog boravka u svemiru prenio stotine tisuća nebeskih slika natrag na Zemlju.

Hubble je reflektorski teleskop Cassegrain.

Svjetlost nebeskih objekata putuje niz cijev, skuplja je primarno zrcalo nalik zdjeli, okrenuto prema unutra i reflektirano prema manjem sekundarnom ogledalu u obliku kupole, zakrivljenom prema van. Sekundarno ogledalo odbija svjetlost natrag do primarnog ogledala i kroz rupu u njegovu središtu. Svjetlo je fokusirano na malo područje koje se naziva žarišna ravnina, gdje ga hvataju različiti znanstveni instrumenti.

Hubbleovi znanstveni instrumenti su astronomske oči u svemiru koje zajedno ili pojedinačno omogućuju nova opažanja.

Svaki je instrument dizajniran za ispitivanje svemira na drugačiji način. Hubble posjeduje dvije glavne vrste instrumenata: kamere koje snimaju Hubbleove slavne slike i spektrografe koji razbijaju svjetlo u boje za analizu.

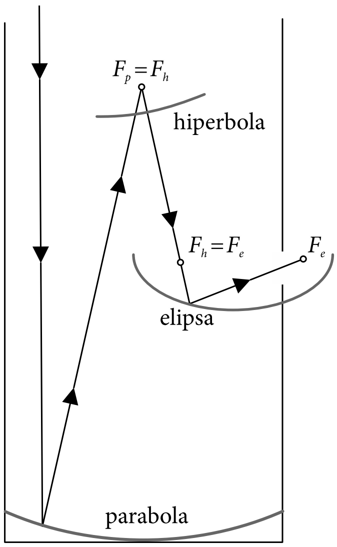
Hubbleov trenutni paket instrumenata uključuje širokopojasnu kameru 3 (WFC3), spektrograf kozmičkog podrijetla (COS), naprednu kameru za snimanja (ACS), spektrograf za snimanje svemirskog teleskopa (STIS) i senzore za precizno navođenje (FGS).

Ovo nisu jedini instrumenti koji se nalaze na Hubbleu. Teleskop je dizajniran za povremene posjete astronauta koji su donijeli nove instrumente i tehnologiju te ga od prosinca 1993. do svibnja 2009. i popravljali.

Nakon lansiranja u travnju 1990. NASA je otkrila da primarno ogledalo ima pogrešku u konstrukciji. Nedostatak je bio mali, samo oko $\frac{1}{50}$ širine ljudske kose, ali dovoljno značajan da iskrivi *Hubbleov vid*. Tijekom servisne misije u prosincu 1993. astronauti su dodali korektivnu optiku kako bi nadomjestili nedostatak. Optika je djelovala poput naočala za ispravljanje Hubbleova vida.

Pojednostavljeno matematički, Hublleov je teleskop konstruiran na sljedeći način:

Na ovoj se skici vide tri zrcala (parabolično, hiperbolično i eliptično) i zajednička žarišta (fokusi označeni s F i indeksima p, h i e). U drugom žarištu eliptičnog zrcala je okular ili oko astronoma koji promatra svemir.



primarno zrcalo

Naravno, ovo je ravninska skica teleskopa. Zrcala su dijelovi *paraboloida*, *hiperboloida* i *elipsoida*.

No, to za našu prezentaciju ideje primjene analitičke geometrije nije bitno.

Na HUNI-jevoj web stranici www.huni.hr/nastava-matematike nalaze se interaktivne datoteke pomoću kojih se mogu istraživati svojstva krivulja drugog reda te potvrditi činjenice i u potpunosti riješiti zadani zadatci.

d) Primjeri drugih uređaja

Svakodnevno se srećemo s uporabom baterijske svjetiljke, reflektora u kazalištu, automobilskih farova ili satelitskih tv-antena.

S istom matematičkom podlogom rade i radio-teleskopi kao i parabolični mikrofoni.

Dakle, radi se o paraboli/paraboloidu i svojstvu da pravce iz fokusa reflektiraju kao paralelne pravce. I obratno!

Zadatak 7. Zrcalo baterijske svjetiljke rotacijski je paraboloid. Promjer mu je 6 cm, a dubina (od zaštitnog prednjeg stakla do tjemena) 2 cm.

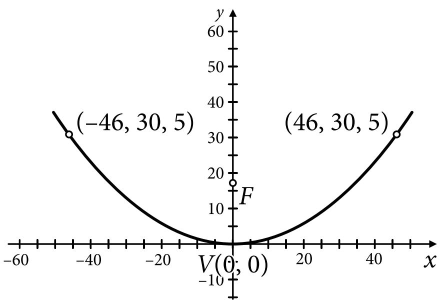
Koliko daleko od vrha/tjemena treba postaviti žarulju kako bi svjetiljka imala zrake paralelne s osi svog zrcala?

(*Odgovor*: Žarulju treba postaviti 1.125 cm od vrha duž osi ogledala.)

Zadatak 8. Na rubovima igrališta svake od svojih televizijskih prijenosa nogometnih utakmica, TV mreža koristila je parabolični reflektor s mikrofonom u fokusu reflektora za snimanje razgovora među igračima na igralištu.

Ako parabolični reflektor ima 92 cm širinu i 30.5 cm dubinu, gdje bi trebao biti postavljen mikrofon?

Rješenje. Nacrtamo presjek reflektora kao parabolu koja se otvara prema gore u kartezijevoj ravnini, postavljajući mu vrh V na ishodište (vidi sliku).



Neka fokus F ima koordinate (0, p) za dobivanje jednadžbe

$$x^2 = 4py$$

Budući da je reflektor 92 cm širok i 30.5 cm dubok, točke $(-46, 30., 5)$ i $(46, 30.5)$ moraju ležati na paraboli.

Mikrofon treba staviti u fokus pa moramo pronaći vrijednost p. To izračunamo na sljedeći način.

$$x^2 = 4py$$

$$(\pm 46)^2 = 4 \cdot p \cdot 30.5,$$

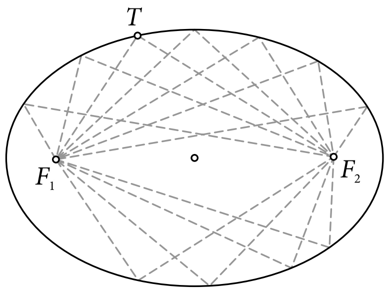
a odavde je

$$p \approx 17 \text{ cm}.$$

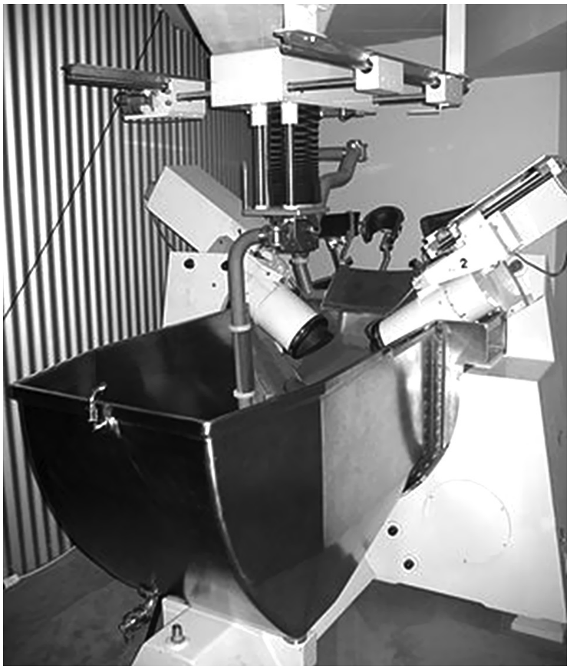
Budući da je $p \approx 17$ cm, mikrofon bi trebao biti postavljen unutar reflektora duž njegove osi i 17 cm od njegova vrha.

Elipsoidi se koriste u medicini kako bi se izbjegla operacija u liječenju bubrežnih kamenaca.

Eliptični litotripter emitira podvodne udarne valove ultra visokih frekvencija (UHF) iz jednog fokusa prema pacijentovu bubregu pažljivo postavljene u drugom fokusu (slika).



Evo slike jednog od prvih liptotriptera iz 1980. godine.



Zadatak 9. Ako je duljina glavne osi 66 cm, a duljina male osi 25.4 cm, gdje treba postaviti izvore udarnih valova i pacijenta za maksimalni učinak?

Rješenje. $2a = 66\ \text{cm},\ 2b = 25.4\ \text{cm},\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = 30.4\ \text{cm}$

Literatura

1. F. Demana, B. Waits, G. Foley, D. Kennedy (2004.): *Precalculus*, fifth edition Pearson, Addison Wesley, Boston
2. G. Thomas jr. (2001.): *Thomas' Calculus*, tenth edition Addison Wesley, Boston
3. www.huni.hr/nastava-matematike/
4. B. Pavković, D. Veljan (1992., 1995.): *Elementarna geometrija 1., 2.*, Tehnička knjiga, Školska knjiga, Zagreb
5. S. Kurepa (1991.): *Matematika za srednju školu*, 16. izdanje, Školska knjiga, Zagreb
6. E. W. Weisstein (2009.): *The CRC encyclopedia of mathematics*, 3-th edition Shapman \& Hall, New York
7. www.wikipedia.org