Ima li školjka Nautilus oblik Fibonaccijeve spirale?

Aleksandar Hatzivelkos[1]

Fibonaccijevi brojevi već stoljećima golicaju maštu znanstvenika, umjetnika i više-manje svakoga tko dođe u dodir sa svojstvima tog niza brojeva. Prisjetimo se, Fibonaccijev niz brojeva je rekurzivno zadan niz: kao prva dva elementa uzimaju se brojevi $F_1 = 0$ i $F_2 = 1$,[2] dok je rekurzivno pravilo koje određuje sljedeći element niza dan s $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n \geq 3$.

Za Fibonaccijev niz možemo odrediti i formulu za opći član niza, koja glasi: $F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$, gdje je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$, vrijednost poznata kao *zlatni rez* ili *zlatni omjer*. Postoji i dodatna veza između Fibonaccijevih brojeva i zlatnog reza. Naime, ukoliko promatramo omjer dvaju uzastopnih Fibonaccijevih brojeva, $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, dobivamo aproksimaciju broja φ. Točnije, kada n neograničeno raste, opisani omjer teži vrijednosti zlatnog reza: $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Upravo je zlatni rez, broj koji se pojavljuje ili „prepoznaje" u raznim ljudskim djelatnostima (poput slikarstva ili arhitekture) ili pak u prirodnim pojavama, odgovoran za svojevrsnu mistifikaciju koja se formirala oko Fibonaccijevih brojeva i zlatnog reza, pogotovo u popularnoj kulturi, pa i pseudo-znanstvenim ili čak popularno-znanstvenim obradama teme [2]. S vremenom i učestalim ponavljanjem neki od tih primjera postali su „opće poznati", pa se nerijetko nekritički navode u stručnoj literaturi ili pak radovima, poput maturalnih radova ili završnih radova na studiju [5,7,8,9].

To su razlozi koji su nas potaknuli na jasnije formuliranje matematičkih pojmova, kao i propitivanje utemeljenosti navoda iz popularne kulture. U ovom ćemo članku posebnu pažnju posvetiti pojmovima Fibonaccijeve spirale, zlatne spirale i čestom pitanju – ima li školjka Nautilus oblik Fibonaccijeve spirale?

---

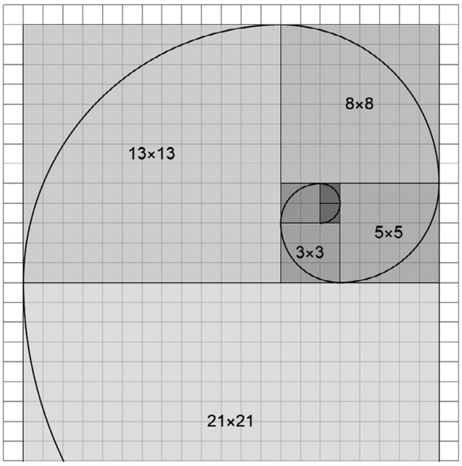
[1]Aleksandar Hatzivelkos, Veleučilište Velika Gorica

[2]Odabir upravo ta prva dva elementa niza stvar je konvencije, iako treba istaknuti kako se na nekim mjestima za prva dva elementa postavljaju brojevi $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

Fibonaccijeva spirala

Fibonaccijeva spirala rezultat je specifične vizualizacije Fibonaccijevih brojeva: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Formira se na sljedeći način: na početku postavimo jedan pored drugoga dva kvadrata stranice 1, koji predstavljaju prva dva Fibonaccijeva broja (vidi Sliku 1). Pored njih postavimo kvadrat stranice 2, pa potom kvadrat stranice 3 koji se naslanja na kvadrat stranice 2 i kvadrat stranice 1. Slijedi kvadrat stranice 5 koji se naslanja na kvadrate stranica 2 i 3, i tako dalje.

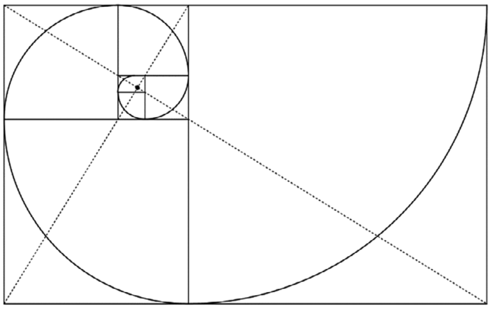
Rubne vanjske točke na spojnici novog dodanog kvadrata s kvadratom prethodne veličine formiraju točke kroz koje prolazi Fibonaccijeva spirala. Točnije, spirala se formira kao unija četvrtina kružnica, polumjera jednakog odgovarajućem Fibonaccijevom broju.



Slika 1. Fibonaccijeva spirala

Zlatna spirala

Uz Fibonaccijeve brojeve veže se još jedna spirala, tzv. *zlatna spirala*. Za razliku od Fibonaccijeve spirale koja se konstruira iznutra prema van, zlatna spirala konstruira se u drugome smjeru. Osnova konstrukcije zlatne spirale je *zlatni pravokutnik*, odnosno pravokutnik kojemu je odnos duže stranice prema kraćoj jednak zlatnom rezu, φ.



Slika 2. Zlatna spirala

Konstrukcija zlatne spirale tada se provodi na sljedeći način: zlatni pravokutnik podijeli se na dva dijela: kvadrat (kojemu je stranica jednake duljine kao i kraća stranica zlatnog pravokutnika) i preostali manji pravokutnik, koji je također zlatni pravokutnik. Isti postupak nastavljamo s dobivenim novim pravokutnikom. Kao i kod Fibonaccijeve spirale, kutne točke kvadrata formiraju spiralu. Središte zlatne spirale nalazi se u točki koja je presjek dvaju dijagonala uzastopnih pravokutnika koje koristimo u konstrukciji. Te su dijagonale na Slici 2. prikazane isprekidanim linijama.

Promotrimo li Fibonaccijevu spiralu iz perspektive konstrukcije zlatne spirale, možemo uočiti da se konstrukcija Fibonaccijeve spirale može promatrati na sličan način: i kod Fibonaccijeve spirale imamo vanjski pravokutnik koji se dijeli na kvadrat i preostali pravokutnik, na kojemu se ponavlja isti postupak.

No unatoč toj sličnosti Fibonaccijeva spirala i zlatna spirala nisu iste (vidi Sliku 3). Osnovna je razlika u formatu promatranih pravokutnika. Dok zlatna spirala kao osnovu koristi pravokutnik s omjerom stranica koji je jednak zlatnom rezu, Fibonaccijeva spirala za osnovu ima pravokutnik kojemu su stranice Fibonaccijevi brojevi. Omjer dvaju susjednih Fibonaccijevih brojeva, kao što smo istaknuli na početku, nije jednak zlatnom rezu, već se može promatrati kao aproksimacija te vrijednosti.

Utoliko se za Fibonaccijevu spiralu ponekad kaže i da aproksimira zlatnu spiralu, što potvrđuje i vizualna usporedba dvije spirale. Treba istaknuti kako omjer susjednih Fibonaccijevih brojeva teži zlatnom rezu, pa je razlika između tih spirala sve manja što se više udaljavamo od središta (zlatne) spirale.

Druga razlika između tih spirala je konstrukcijske naravi. Dok Fibonaccijeva spirala u svom unutrašnjem namatanju završava s kvadratom duljine stranice 1, zlatna spirala namata se neograničeno prema svome središtu – točki koja se nalazi na presjecištu dijagonala dvaju uzastopnih znatnih pravokutnika (vidi Sliku 2).

Logaritamska zlatna spirala

Iako se zlatna spirala često proglašava logaritamskom spiralom, ona to nije.[3] Zlatna spirala čiju smo konstrukciju opisali zapravo predstavlja aproksimaciju *logaritamske zlatne spirale* koja se, kako bi konfuzija bila veća, također ponekad naziva *zlatnom spiralom*. Upravo kako bismo naglasili distinkciju između te dvije krivulje, u ovom ćemo radu logaritamsku spiralu sa „zlatnim” svojstvom nazivati punim imenom: *logaritamska zlatna spirala*.

Logaritamska spirala ravninska je krivulja koja sve pravce koji prolaze kroz njeno središte siječe pod istim kutom. U polarnim koordinatama, u kojima je svaka točka u ravnini određena udaljenošću od ishodišta (r) i kutom koji spojnica s ishodištem

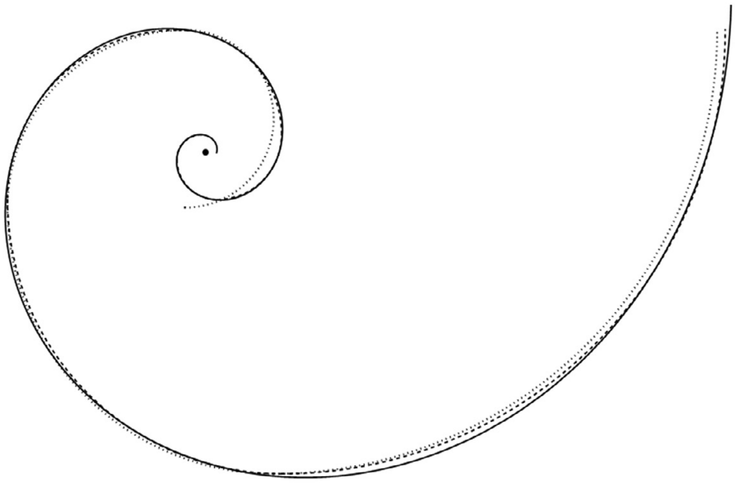
[3]Zlatna spirala dijeli svojstvo s logaritamskom spiralom, u smislu da je sama sebi slična: ukoliko „povećamo” središnji dio zlatne spirale, dobit ćemo opet spiralu istog oblika. No sličnost samoj sebi nije dovoljna da bi se spirala nazvala logaritamskom.

zatvara s pozitivnim dijelom x-osi (θ), logaritamska je spirala zadana jednadžbom $r(\theta)=a\cdot e^{b\theta}$, gdje su $a,b\in\mathbb{R}$.

Zlatnu logaritamsku spiralu karakterizira svojstvo da pri rastu kuta za 90° omjer pripadnih radijusa iznosi φ, odnosno zlatni rez, pa je stoga jednadžba logaritamske zlatne spirale oblika:

$$r(\theta)=a\cdot e^{\left(\frac{2}{\pi}\ln\varphi\right)\cdot\theta} \tag{1}$$

Na Slici 3. prikazane su usporedno sve tri spomenute spirale: logaritamska zlatna spirala (prikazana punom linijom), zlatna spirala (prikazana isprekidanom linijom) i Fibonaccijeva spirala (prikazana točkastom linijom). Sam vizualni prikaz potvrđuje da se ne radi o istoj spirali. Najprikladnije bi bilo promatrati zlatnu i Fibonaccijevu spiralu kao krivulje koje (relativno dobro) aproksimiraju logaritamsku zlatnu spiralu.



Slika 3. Usporedba logaritamske zlatne spirale (puna linija), zlatne spirale (isprekidana linija) i Fibonaccijeve spirale (točkasta linija)

Zlatna spirala i školjka Nautilus

Nakon što smo se upoznali sa sve tri spirale koje se na razne načine povezuje sa zlatnim rezom, vrijeme je da se posvetimo osnovnom pitanju ovoga članka: može li se spiralni rast školjke Nautilus povezati sa zlatnom spiralom?

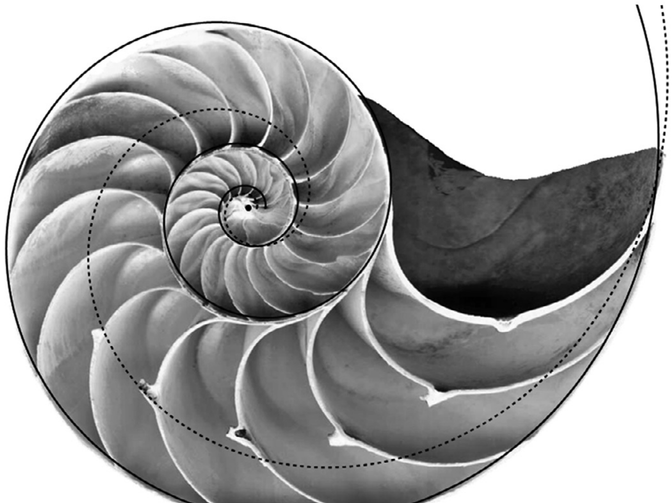
Kako su Fibonaccijeva i zlatna spirala zapravo aproksimacije logaritamske zlatne spirale, pitanje možemo specificirati: postoji li vrijednost parametra $a \in R$ iz jednadžbe (1) za koju će se logaritamska zlatna spirala poklapati sa spiralnim rubom školjke Nautilus?

U članku objavljenom u *The College Mathematics Journal* Clement Falbo navodi [1]:

Nautilus definitivno nema oblik vezan uz zlatni rez. Svatko kome je ta školjka dostupna može odmah ustanoviti kako je omjer spirale školjke približno jednak 4/3. Godine 1999. mjerio sam veličine školjaka Nautilus pompilius iz kolekcije Kalifornijske akademije znanosti u San Franciscu. Mjerenja su provedena s točnošću do na milimetar. Omjeri su varirali od 1.24 do 1.43, s prosječnom vrijednošću 1.33, a ne φ (čija je vrijednost približno 1.618). ... Nije vjerojatno da postoji školjka Nautilus čiji je omjer unutar 2 % od vrijednosti zlatnog reza, a ako takva školjka ikada i bude pronađena, to će biti izuzetak a ne tipični predstavnik vrste.

Temu je obradio i Georg Hart, ovaj put u formi video snimke. Na njegovom kanalu [3] možete pronaći video o izradi 3D modela hipotetske školjke Nautilus koja bi rasla poput logaritamske zlatne spirale. Lako je uočljivo kako tijelo kreirano 3D printerom ne odgovara našoj predodžbi o školjki Nautilus.

Na kraju donosimo i vizualni prikaz odnosa školjke Nautilus i logaritamskih spirala. Na Slici 4. nalazi se prikaz presjeka školjke Nautilus i dviju logaritamskih spirala. Spirala prikazana isprekidanom linijom logaritamska je zlatna spirala. Vidimo kako se, nakon kraćeg prianjanja uz rub školjke, logaritamska spirala brzo odvaja, te raste znatno brže od spiralnog rasta školjke.



Slika 4. Prikaz presjeka školjke Nautilus4 i dviju logaritamskih spirala

Punom linijom prikazana je još jedna logaritamska spirala koja nam pokazuje kako rast školjke Nautilus, uz manja odstupanja, ipak prati logaritamsku spiralu. No navedena spirala nije logaritamska zlatna spirala pa joj je faktor rasta (parametar *b* u polarnoj jednadžbi spirale) gotovo dvostruko manji od faktora rasta logaritamske zlatne spirale.

[4]Autor fotografije školjke Nautilus je David Bygott. Fotografija je preuzeta sa https://www.flickr.com/photos/davidbygott/5241519842 te obrađena u crno-bijeloj tehnici.

Zaključak

Zlatni rez, odnosno broj φ, bez sumnje je specifična vrijednost uz koju se vežu mnoge pojave u prirodi, kulturi i arhitekturi. Ljudska psihologija i načini prepoznavanja „lijepog" svakako pokazuju vezu s tom brojčanom vrijednošću.

O tome svjedoči i mali neformalni eksperiment proveden među đacima srednjih škola na Večerima matematike koje su 2014. godine organizirane na matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu. Između više logaritamskih srcolikih spirala đaci su u najvećem broju kao najljepšu birali spiralu čiji su omjeri vezani uz zlatni rez [4].

Uz nepobitnu zanimljivost zlatnog reza i mnoge pojave te veličine u stvarima i pojavama koje nas okružuju, smatramo kako bi, pogotovo u stručnim radovima, ali i u popularno-znanstvenoj obradi teme, veću pažnju trebalo posvetiti kritičkoj provjeri navoda, poput ovog istaknutog u ovome tekstu.

Literatura:

1. Falbo, C. (2005.) *The Golden Ratio – A Contrary Viewpoint*, The College Mathematics Journal, 36:2, 123-134, DOI: 10.1080/07468342.2005.11922119
2. Dobrić, S. (2020.). *Zlatni rez*. Nova akropola. Preuzeto s https://nova-akropola.com/znanost-i-priroda/znanost/zlatni-rez/
3. Hart, G. (2012.) *The Golden Ratio Nautilus* (video materijal), Preuzeto s https://www.youtube.com/watch?v=_gxC8OjoQkQ
4. Hatzivelkos, A. (2015.). *Krivulje srca*, Poučak, 16 (61), str. 60-66. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/150326
5. Huzjak, M. (1999.). *Zlatni rez: geometrija prirode ili prirodna geometrija*. Školske novine br. 36, str. 8.
6. Meisner, G. (2014.). *Is the Nautilus shell spiral a golden spiral?* Preuzeto s https://www.goldennumber.net/nautilus-spiral-golden-ratio/
7. Zelić, J. (2006.). *Raste li drveće u šumi po pravilima zlatnog reza i Fibonaccijevog niza?* Šumarski list, 130 (7-8), 331-343.
8. Zlatić, S. (2013). *Zlatni rez.* Tehnički glasnik, 7 (1), str. 84-90.
9. *Zlatni rez* – vodič kroz prezentaciju (element.hr). Preuzeto s https://element.hr/static/files/5-Razno/Zlatni%20rez/Zlatni%20rez%20-%20Vodic%20kroz%20prezentaciju.pdf