IZ NASTAVNE PRAKSE

Duljina kružnog luka i površina kružnog isječka (bez izvođenja i korištenja formula)

Renata Svedrec[1]

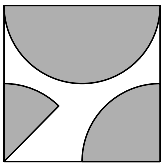
U Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika jedan je od ishoda MAT OŠ D.7.4. *Računa i primjenjuje opseg i površinu kruga i njegovih dijelova*. U razradi odgojno-obrazovnog ishoda navedeno je: *Modelira površinama i opsezima geometrijskih oblika (krug i dijelovi, kružnica i dijelovi, kružni vijenac) rješavanje problemske situacije*. U preporukama za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda navedeno je: *Ovim se ishodom ne provjerava tehnika računanja, nego učenikovo logičko razmišljanje i sposobnost analize problema*.

Uvažavajući navedeno, odlučila sam se za pristup u kojemu učenici neće koristiti gotove formule, nego će odabranim zadatcima računanja duljine kružnog luka i površine kružnog isječka pristupati na razini rješavanja problema. Temi sam posvetila dva blok-sata, uz dodatne aktivnosti nakon pisane provjere.

Sasvim očekivano, neki su učenici pružali otpor takvom načinu rada, očekujući gotove formule i „recepte" prema kojima će rješavati zadatke. Drugi dio učenika bio je zadovoljan jer su u rješavanju mogli improvizirati. Upravo su me te improvizacije motivirale za pisanje ovoga članka.

Prvi blok-sat: Uvodne „glavolomke"

Uza sve zaobljene rubove na slici potrebno je postaviti ogradu. Kolika je duljina te ograde ako je duljina stranice kvadrata 20 metara? Kolika je ukupna površina svih kružnih isječaka na toj slici?



[1]Renata Svedrec, OŠ Otok, Zagreb

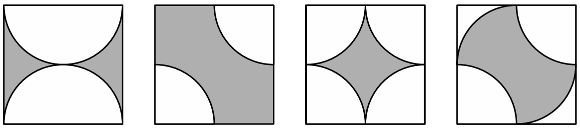
Učenici su zadatak rješavali u parovima i svi su bez problema uočili da su zaobljeni rubovi polovina, četvrtina i osmina kružnice s polumjerom duljine 10 m, a kružni su isječci polovina, četvrtina i osmina kruga istog polumjera.

Izračunali su duljinu cijele kružnice odnosno površinu cijeloga kruga, dobiveni rezultat podijelili na 2, 4 i 8 jednakih dijelova te dobivene rezultate zbrojili. No, nekoliko je parova postupak ubrzalo uvažavajući činjenicu da je zbroj polovine, četvrtine i osmine jednak sedam osmina. Na taj su način do rješenja došli brže i „elegantnije".

Nakon komentiranja dobivenih rješenja, učenici su nastavili s rješavanjem sljedećeg zadatka:

Zadatak 1.

Izračunaj opseg i površinu osjenčanih dijelova kvadrata ako je duljina stranice svih kvadrata jednaka 10 cm.



Uvažavajući činjenicu da je opseg lika zbroj duljina linija (ravnih i zaobljenih) koje omeđuju lik, problema s računanjem opsega uglavnom nije bilo.

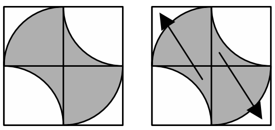
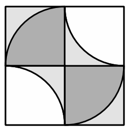
Učenici su brzo uočili da ni u jednom od ovih slučajeva nije moguće izravno izračunati površinu. Zaključili su da trebaju izračunati površinu kvadrata i od dobivenog rezultata oduzeti površine dijelova kruga.

No, na posljednjoj se slici pojavio novi problem! Kako izračunati površine „malih bijelih dijelova"?

Jedan je učenik sugerirao podjelu početnog kvadrata na četiri sukladna dijela, kao na slici.

Učenici su na slici uočili četiri četvrtine kruga od kojih su dvije osjenčane, a dvije nisu. Zaključili su i da su mali bijeli dijelovi zapravo „ostatak" malog kvadrata iz kojega i „izrezana" četvrtina kruga.

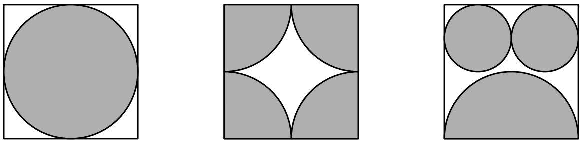
Nekolicina „bistrića" brzo je zaključila da mogu zamijeniti sive i bijele dijelove:

 čime će dobiti vrlo jednostavnu sliku. 

Nastupilo je veliko iznenađenje: površina osjenčanog lika na posljednjoj slici jednaka je polovini površine kvadrata!

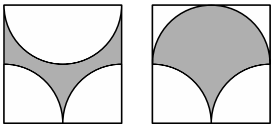
Nakon toga učenici su dobili listić sa zadatcima za samostalno rješavanje.

1. Izračunaj pa usporedi površine osjenčanih likova na slikama (duljina stranice svih kvadrata je 12 cm).

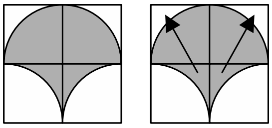


(Zaključak da prva dva lika imaju jednake površine većina učenika vidjela je „iz aviona", no da jednaku površinu ima i sivi dio na trećoj slici – bilo je iznenađenje.)

2. Duljina stranice nacrtanih kvadrata iznosi 20 cm. Izračunaj opseg i površinu obojenih likova:

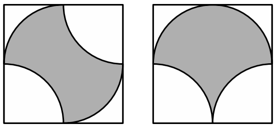


(Jednaki opsezi? Ma, ne, nisu! Prvi lik ima veći opseg. A kolika je površina drugoga?

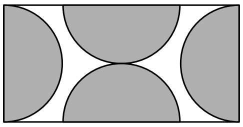


Novo iznenađenje – nakon malo rezanja i preslagivanja opet je popunjena polovina kvadrata!)

Dakle, ako su stranice kvadrata jednakih duljina, likovi prikazani na donjim slikama imaju jednake površine.

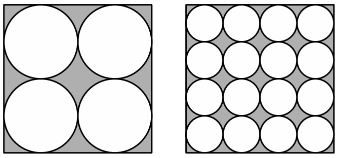


3. Izračunaj opseg i površinu bijelog dijela lika ako su duljine stranice pravokutnika 8 cm i 4 cm. Koliki postotak kvadrata zauzima bjelina?

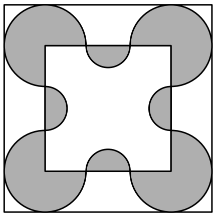


4. Iz jednoga kvadrata sa stranicom duljine 4 dm izrezana su četiri (najveća moguća) sukladna kruga. Iz drugoga, njemu sukladnog kvadrata, izrezano je šesnaest (najvećih mogućih) sukladnih krugova. Koliki je postotak materijala otpao kod prvoga, a koliki kod drugoga kvadrata?

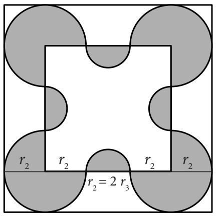
(Jednako?! Ma ne, nemoguće!

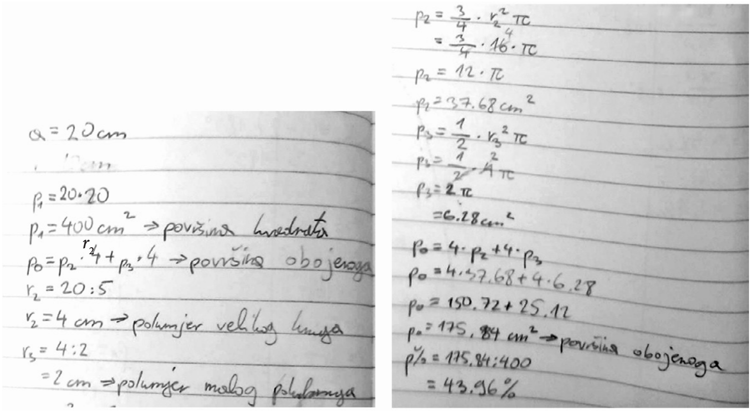


Duljina polumjera krugova na prvoj je slici 10 cm, površina svakoga od njih približno je 314 cm^2, pa sva četiri kruga imaju površinu približno 1256 cm^2. Duljina polumjera krugova na drugoj slici je 5 cm, površina svakoga od njih približno je 78.5 cm^2, pa svih šesnaest krugova ima površinu približno 1256 cm^2. Moguće, moguće...)



5. Duljina stranice velikog kvadrata je 20 cm, a promjer malih krugova sukladan je polumjeru velikih. Postotkom iskaži obojeni dio površine velikoga kvadrata.

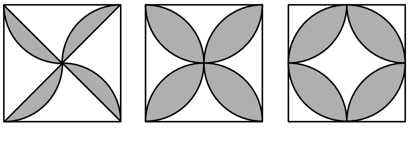




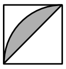
Drugi blok-sat: Nastavak istraživanja

Uvod u složenije zadatke bio je jedan od zadataka postavljenih za domaću zadaću:

Izračunaj površinu osjenčanih dijelova kvadrata ako je duljina stranice kvadrata 12 cm.



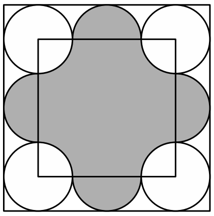
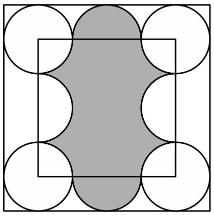
Nije bilo teško zaključiti da likovi na drugoj i trećoj slici imaju jednake površine (četiri „latice”, samo u drugačijem položaju), kao i da su te površine dvostruko veće od površine lika na prvoj slici. No, kolike su te površine? Za rješavanje prvog dijela zadatka ključno je bilo odrediti površinu jednog kružnog odsječka (tj. površinu polovine „latice”):

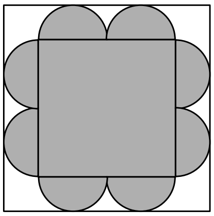
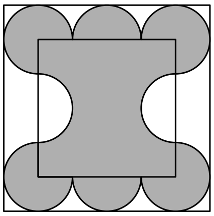


Najlakši je način izračunati površinu četvrtine kruga (ovdje s polumjerom duljine 6 cm) i od te površine oduzeti površinu jednakokračnog pravokutnog trokuta (ovdje s katetama duljine 6 cm).

Nakon komentiranja i provjere rješenja preostalih zadataka iz domaće zadaće, učenici su samostalno ili u parovima nastavili rješavati nove zadatke vezane uz krug, kružnicu i njihove dijelove.

Zadatak 1. Polumjeri svih kružnica na slikama su jednaki. Koji od nacrtanih likova ima veći opseg?

a)  ili 

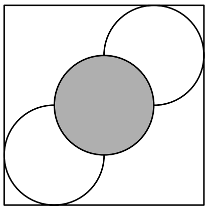
b)  ili 

Većem broju učenika zadatak je na početku bio zbunjujući: „Profesorice, zar ne piše kolika je duljina polumjera?". Nekolicina učenika smijala se i govorila: „Nije važno, uzmi bilo koliko, samo da je jednako!". Naravno da je manjina (uglavnom) bila u pravu. Nitko ne traži odgovor na pitanje koliki su ti opsezi niti za koliko je jedan opseg veći ili manji od drugoga... Tek nakon komentiranja shvatili su da uopće ne trebaju računati!

Oba lika u zadatku a) imaju opseg jednak opsegu triju krugova zadanog polumjera (4 polovine i 4 četvrtine kružnice).

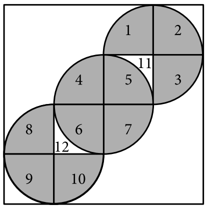
Prvi lik u zadatku b) ima opseg jednak opsegu četiriju krugova zadanoga polumjera (8 polovina), dok je opseg drugog lika u tom zadatku jednak opsegu pet krugova zadanog polumjera (4 polovine i 4 puta tri četvrtine).

Zadatak 2. Iz kvadrata sa stranicom duljine 12 cm izrezani su sivo obojeni dijelovi prikazani na slici. Koliki je postotak otpadnog materijala?



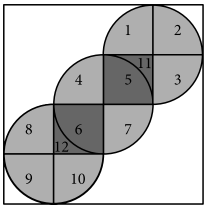
Prije rješavanja zadatka nekoliko je učenika izložilo svoju ideju o načinu rješavanja ovog zadatka. Odmah je otklonjena ideja da je površina „crva” tri puta veća od površine jednog kruga (što su predložili neki učenici).

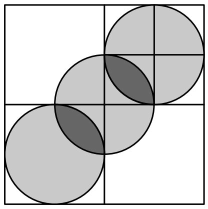
Podijelimo li „crva” kao što je prikazano na slici, uočit ćemo 10 četvrtina kruga (označeni brojevima od 1 do 10), sve s polumjerima duljine 3 cm i dva sukladna „dodatka” (označena brojevima 11 i 12). Ti su dodatci nadopune četvrtine kruga do kvadrata sa stranicom duljine 3 cm, pa i njihove površine učenici znaju izračunati.



Površinu otpadnog materijala dobit će tako da zbroje površine svih 12 dijelova i dobiveni zbroj oduzmu od površine kvadrata.

Očito je da je, umjesto računanja površina tih nadopuna, mudrije obojenu površinu izračunati kao zbroj površina osam četvrtina kruga (tj. dva cijela kruga) i površina dvaju malih kvadrata.



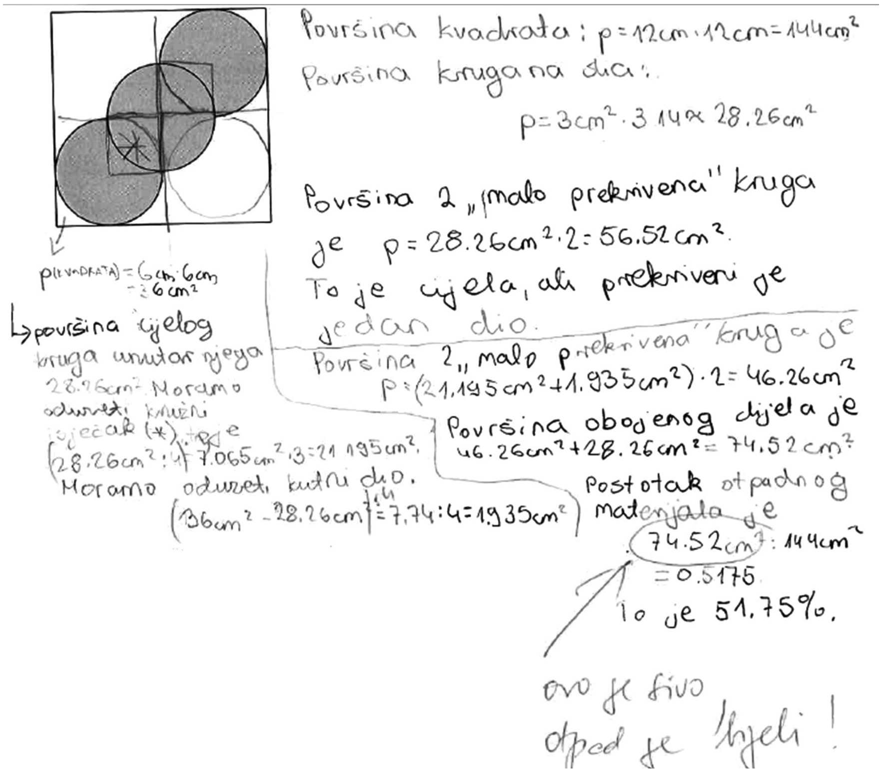


Površinu „crva” možemo odrediti i tako da od površina triju krugova oduzmemo površine tamnije istaknutih latica. Svaka od latica presjek je dviju četvrtina kruga unutar malog kvadrata pa njezinu površinu možemo izračunati kao razliku površina dvije četvrtine kruga polumjera duljine 3 cm i površine kvadrata sa stranicom duljine 3 cm.

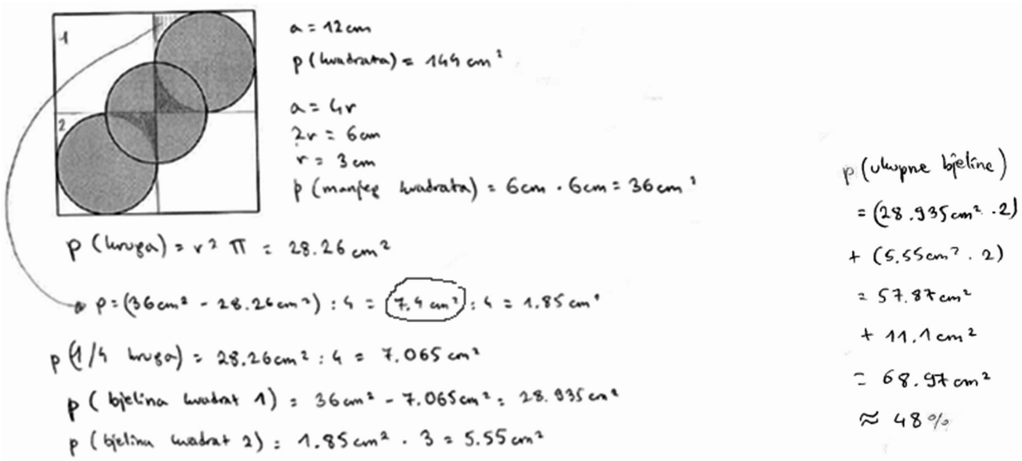
Učenici koji su došli do točnog rješenja rješavali su većinom na prvi ili drugi način. Treći način nije uočen pa sam ga namjeravala prokomentirati nakon što učenici prikažu svoja rješenja. Na žalost – nisam stigla, no kasnije se pokazalo – dobro da nisam!... Učeničke su ideje bile teško predvidive!

U nastavku su prikazane tri razrađene ideje – načina rješavanja zadatka (od kojih prva nema točan konačni rezultat).

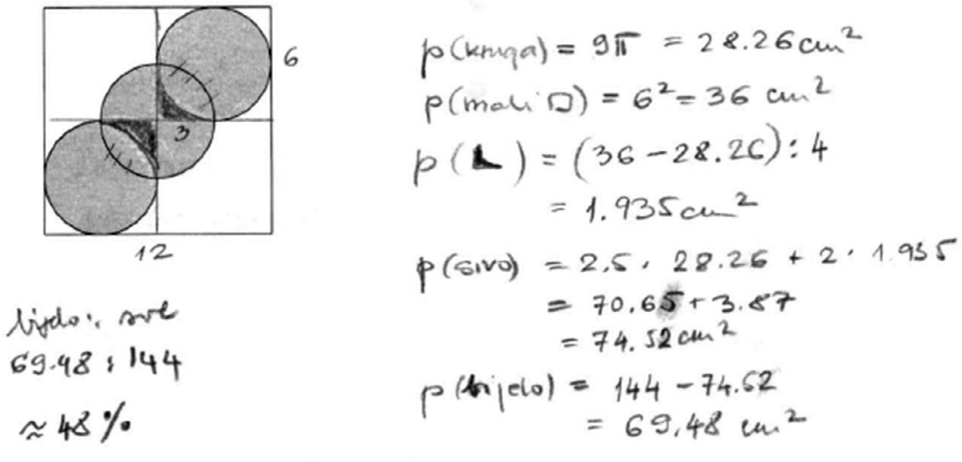
Prvi način: Ovo zaključivanje djeluje malo osebujno, komplicirano i zbrkano, ima i pogrešaka u zapisivanju, čak je u konačnici izračunat postotak sivog dijela, ali – vrijedno je pažnje kao ideja.



Drugi način: rješavanje je uredno, jasno i precizno zapisano, ali uz sitnu računsku pogrešku:

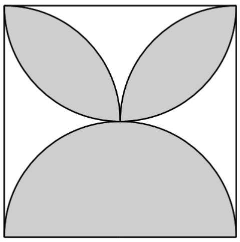


Treći način: „promjena smjera gledanja"

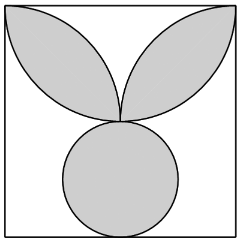


Pisana provjera znanja

Potaknuta „pluralizmom ideja", na pisanoj sam provjeri, kao bonus zadatak u dijelu koji je ocijenjen kao rješavanje problema, učenicima postavila zadatak da izračunaju površinu osjenčanog dijela kvadrata sa stranicom duljine 20 cm. (Bonus zadatak u dvije skupine pisanih provjera.)



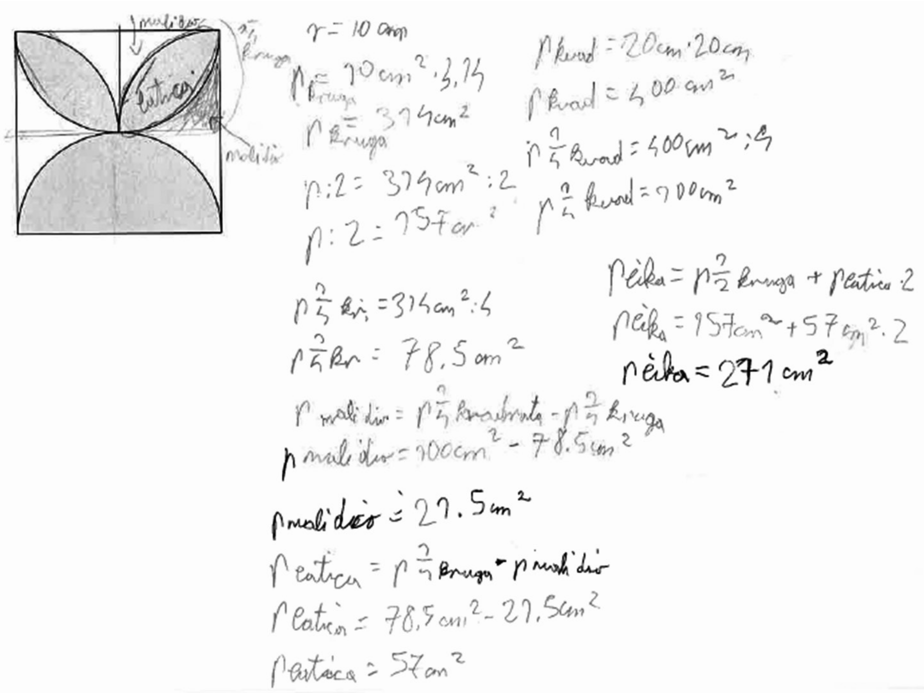
„naranča"



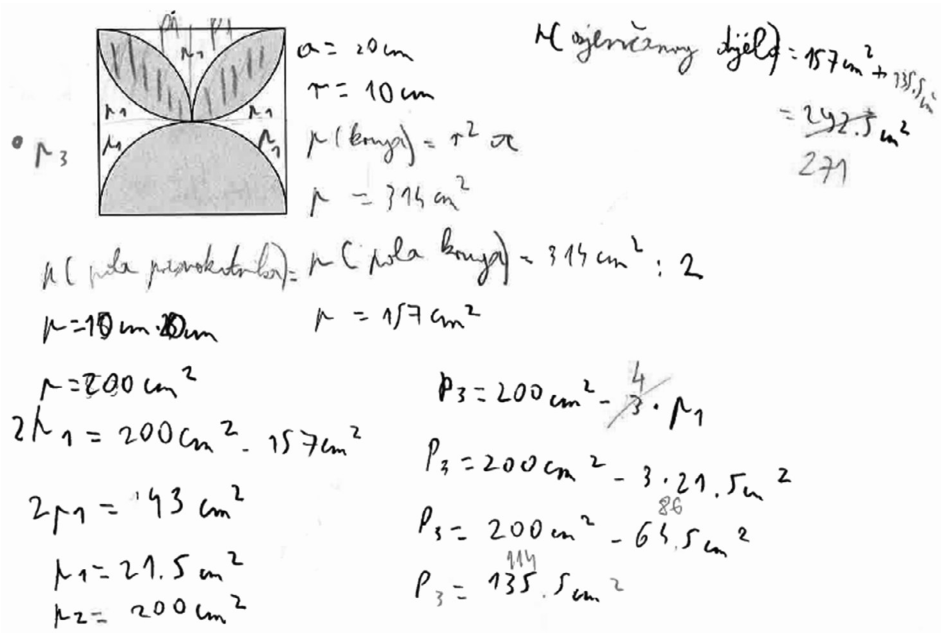
„zeko"

Bonus, naravno, nisu rješavali svi učenici, niti su sva rješenja bila točna. Ali, razveselili su me načini razmišljanja i zaključivanja.

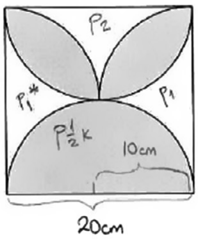
Prvi način: računanje površine polukruga i latice:



Drugi način: računanje površine latica (na drugi način, uz pogrešku u računanju):



Treći način: računanje površine bjeline:



$P\frac{1}{2}K$:

$r = 10$ cm

$\pi \approx 3.14$

$P\frac{1}{2}K = ?$

$P\frac{1}{2}K = \frac{PK}{2}$

$PK = r^2 \cdot \pi$

$PK \approx 10 \cdot 10 \cdot 3.14$

$PK \approx 314 \text{ cm}^2$

$P\frac{1}{2}K = \frac{314}{2}$

$\boxed{P\frac{1}{2}K = 157 \text{ cm}^2}$

$P_1 = P(\text{pravokutnik}) - PK \nearrow P\frac{1}{2}K \cdot 2$

$P(\text{pravokutnik}) = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

$P_1 = 400 \text{ cm}^2 - 314 \text{ cm}^2$

$P_1 = 86 \text{ cm}^2$

$P_1^* = \frac{86 \text{ cm}^2}{2}$

$P_1^* = 43 \text{ cm}^2$

$P_1^* = P_2$

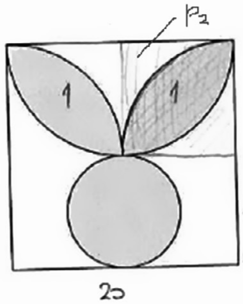
– na slici je površina $= P_1^*$ prikazana 3 puta

$\downarrow$

$P(\text{bijeli dio}) = P_1^* \cdot 3 = 43 \text{ cm}^2 \cdot 3 = 129 \text{ cm}^2$

$P(\text{obojeni dio}) = P(\text{pravokutnik}) - P(\text{bijeli dio}) = 400 - 129 = \boxed{271 \text{ cm}^2}$

Prvi način: računanje površine „listića” ili „uha” i malog kruga (oznake nisu „naj-sretnije”!)



P_1:

$r = 10$ cm

$P_1 = \frac{10^2 \cdot 3.14}{4} = 78.5 \text{ cm}^2$

$P_2 = 100 \text{ cm}^2 - 78.5 \text{ cm}^2 = 21.5 \text{ cm}^2$

$21.5 \cdot 2 = 43 \text{ cm}^2 \Rightarrow$ OTPAD (u jednom kvadratiću)

$P(\text{"listići"})\ P = 100 \text{ cm}^2 - 43 \text{ cm}^2 = 57 \text{ cm}^2$

$P_3 = 57 \text{ cm}^2 \cdot 2 = 114 \text{ cm}^2$

KVADRATIĆ

$a = 10$ cm

$P = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$

MALI KRUG:

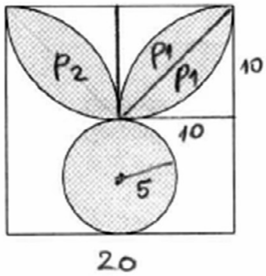
$r = \frac{1}{4} a = 5$ cm

$P = 5^2 \cdot 3.14 = 78.5 \text{ cm}^2$

UKUPNO:

$P = 114 \text{ cm}^2 + 78.5 \text{ cm}^2 = \underline{192.5 \text{ cm}^2}$

Drugi način: računanje površine kružnog odsječka



$$p(\text{mah. krug}) = 25\pi = 78.5\ \text{cm}^2$$

$$p(\square) = \frac{1}{4}\cdot 10^2\pi = 25\pi = 78.5\ \text{cm}^2$$

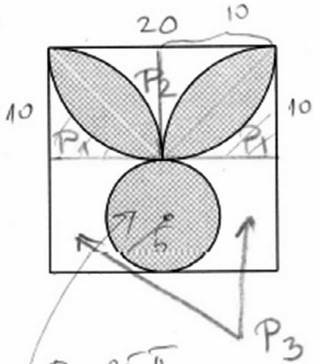
$$p(\triangle) = \frac{10\cdot 10}{2} = 50\ \text{cm}^2$$

$$p_1 = 78{,}5 - 50 = 28{,}5\ \text{cm}^2$$

$$p_2 = 2p_1 = 57\ \text{cm}^2$$

$$p(\text{zec}) = 78{,}5 + 2\cdot 57 = 192{,}5\ \text{cm}^2$$

Treći način: računanje površine bijelog dijela



$$P_1 + P_1 + \frac{1}{2}P(\text{kruga}) = 200$$

$20\cdot 10$

$$100\pi = 314$$

$$2P_1 + 157 = 200$$

$$2P_1 = 43$$

$$P_2 = 43\ \text{cm}^2$$

$$P = 25\pi = 78{,}5$$

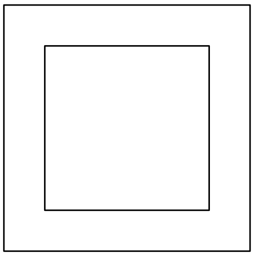
$$P_3 = 200 - 78{,}5 = 121{,}5\ \text{cm}^2$$

$$\text{BIJELO} = 2\cdot 43 + 121{,}5 = 207{,}5\ \text{cm}^2$$

$$\text{ZEKO} = 400 - \text{BIJELO} = 192{,}5$$

I za kraj – mini projekt: „Umjetnost u geometrijskim oblicima"

Duljina stranice velikog kvadrata na slici je 12 cm, a stranica malog kvadrata ima duljinu od 8 cm (kvadrati imaju zajedničko sjecište dijagonala).



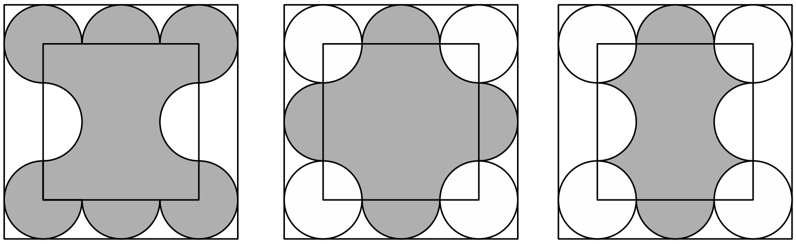
Nacrtaj na takvim predlošcima najmanje četiri slike (različite od prikazanih primjera) koje će zadovoljavati sljedeće uvjete:

- biti simetrične
- sadržavati krugove / polukrugove / kružne isječke / kružne odsječke, pri čemu sve korištene kružnice moraju imati jednaki polumjer duljine 2 cm

Izračunaj površinu osjenčanog dijela najmanje dviju od nacrtanih slika!

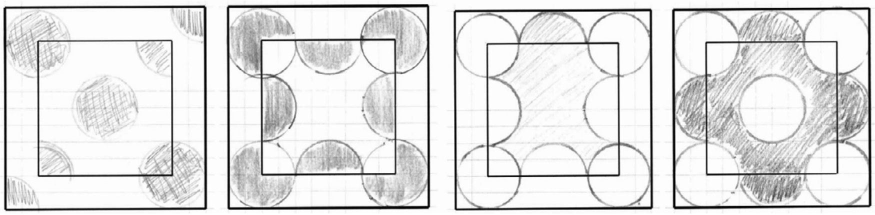
Pri crtanju je dopušteno korištenje programa dinamične geometrije.

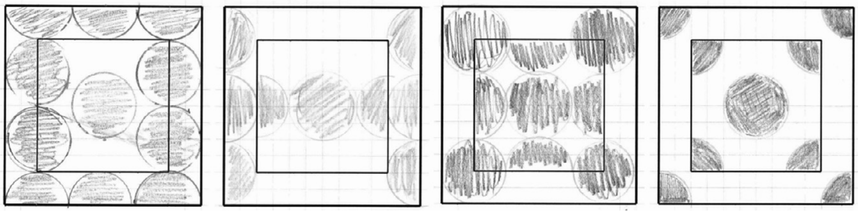
Primjeri slika



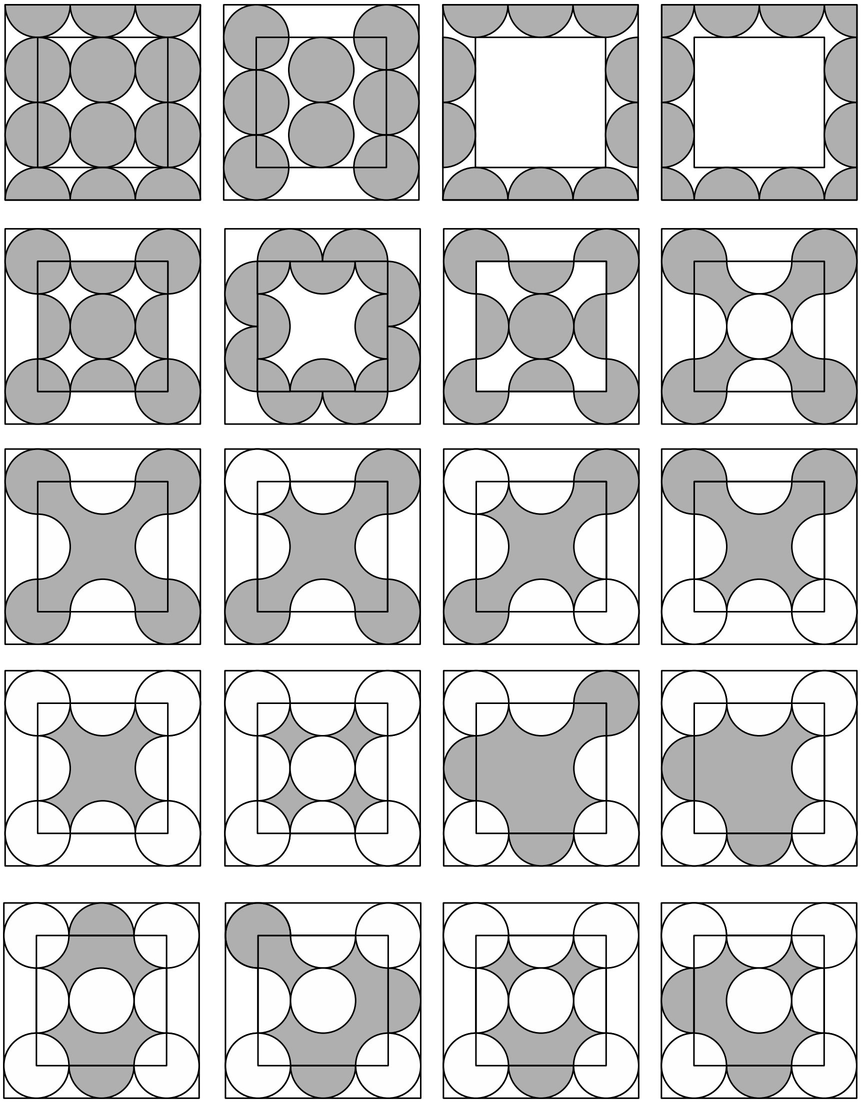
Za rješavanje učenici su imali 14 dana, a svoja su rješenja mogli predati u digitalnom obliku, na papiru ili kombinirano (slike u digitalnom, a račune na papiru).

Neke od dobivenih slika (nacrtane rukom na isprintanom predlošku):

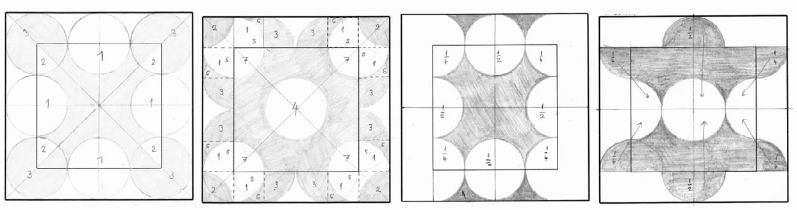




Većina učenika odlučila se za crtanje uz pomoć računala i alata dinamične geometrije pa su napravili i veći broj crteža nego je bilo potrebno. Ovo su (neki) njihovi radovi, složeni po sličnosti motiva (a ne po autorima).



Ovo su četiri rukom crtane slike koje su se „izdvojile" svojom originalnošću, izvedbom, precizno objašnjenim strategijama rješavanja i računanja.



2. LIK - zeleno

unutarnji kvadrat → $a = 8\,cm$
$P = 64\,cm^2$

4) krug → $r = 2\,cm$
$P = r^2\pi$
$P \approx 2^2 \cdot 3.14$
$P \approx 4 \cdot 3.14 \approx 12.56\,cm^2$

7) $4 \cdot \frac{1}{4}$ kruga → $r = 2\,cm$
$P = \frac{r^2\pi}{4} \cdot 4 = r^2\pi$
$P \approx 2^2 \cdot 3.14 \approx 12.56\,cm^2$

ZELENO:
$P = 64 - 2 \cdot 12.56$
$= 64 - 25.12$
$= 38.88\,cm^2$

"VANJSKI OKVIR"

1) mali kvadrat → $a = 2\,cm$
$P = a^2 \cdot 8$
$P = 2^2 \cdot 8 = 32\,cm^2$

$a = 2\,cm$

5) $8 \cdot \frac{1}{4}$ kruga
$r = 2\,cm$
$P = \frac{r^2\pi}{4} \cdot 8$
$P \approx \frac{2^2 \cdot 3.14}{4} \cdot 8$
$P \approx 25.12\,cm^2$

6) "zeleni otpad" → $32 - 25.12 = 6.88\,cm^2$

3) $8 \cdot \frac{1}{4}$ kruga → $r = 2\,cm$
$P = \frac{r^2\pi}{4} \cdot 8$
$P \approx \frac{2^2 \cdot 3.14}{4} \cdot 8$
$P \approx 25.12\,cm^2$

2) $4 \cdot \frac{1}{4}$ kruga → $r = 2\,cm$
$P = \frac{r^2\pi}{4} \cdot 4$
$P = r^2\pi$
$P \approx 2^2 \cdot 3.14$
$P \approx 12.56\,cm^2$

UKUPNO ZELENO: $P = 38.88 + 6.88 + 12.56 + 25.12$
$= 83.44\,cm^2$

Bravo!

2. SLIKA

p (mali kvadrat) = 8cm · 8cm
= 64 cm^2

→ unutar malog kvadrata su neobojena ostala 2 kruga (1 cijeli + 2 · $\frac{1}{2}$ kruga)
→ izvan malog kvadrata su obojena ukupno 2 kruga (2 · $\frac{1}{2}$ kruga + 4 · $\frac{1}{4}$ kruga)
→ to znači da umjesto 2 neobojena kruga, u mali kvadrat možemo „ubaciti" 2 obojena kruga (izvan tog malog kvadrata)
→ tada bi mali kvadrat bio upotpunosti popunjen tako da je zapravo površina obojenog lika jednaka površini tog malog kvadrata

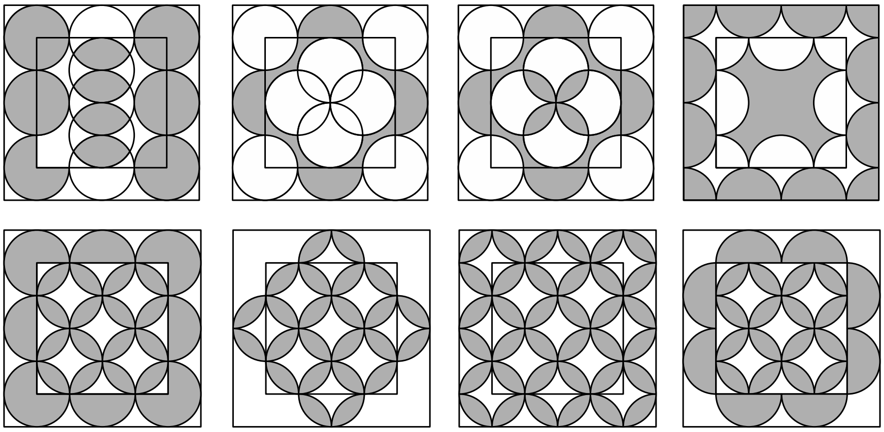
p(mali kvadrat) = p (obojeni lik)

$\boxed{\text{p (obojeni lik)} = 64\ cm^2}$

Bravo!

Zbog potrebe računanja površine određeni broj učenika išao je linijom manjeg otpora pa se odlučivao za sasvim jednostavne motive. No, bilo je i pojedinaca koji su se zaista potrudili i efektnim slikama i mukotrpnijim računanjima. Mašte nije nedostajalo, no nekim „slikama" učenici ipak nisu uspjeli dobro izračunati površine, a nekima, iskreno, nisu ni pokušali.

Posebno je bilo problema s onima na kojima su trebali više puta „mijenjati pogled", tj. nešto oduzimati pa nešto drugo zbrajati. (Neki su se učenici požalili da nisu imali formulu po kojoj je trebalo izračunati!)



Efektni motivi i ornamenti poslužili su i za ponavljanje pojmova osne i centralne simetrije, osnosimetričnih i centralnosimetričnih likova te pojma translacije. Slike su sačuvane, a odabrane planiram iskoristiti u osmom razredu (primjena Talesova i Pitagorina poučka).