Osječki matematički list 22 (2022), 19–31

Prebrojavanje stabala s malim brojem vrhova

Ivan Mihovilović*, Anamari Nakić†

Sažetak

Stablo je povezan jednostavan graf bez ciklusa. Prebrojavanje različitih stabala s n vrhova je težak kombinatorni problem. Za velike vrijednosti n, problem je još uvijek otvoren. U ovom će se članku prebrojiti i konstruirati sva stabla s najviše osam vrhova.

Ključne riječi: *graf, stablo, prebrojavanje stabala*

Counting trees with a small number of vertices

Abstract

A tree is a connected simple graph without cycles. Counting different trees with n vertices is a difficult combinatorial problem. For the large values of n, the problem is still open. In this paper we discuss the numbers and constructions of all trees with up to eight vertices.

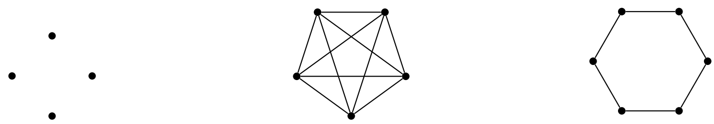
Keywords: *graph, tree, counting of trees*

*Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, Unska 3, 10000 Zagreb, email: ivan.mihovilovic@fer.hr

†Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, Unska 3, 10000 Zagreb, email: anamari.nakic@fer.hr

1 Osnovni pojmovi

Jednostavan graf $G = (V, E)$ je uređeni par nepraznog konačnog skupa vrhova V i konačnog skupa E dvočlanih podskupova skupa V koje zovemo bridovi. U ovom radu jednostavan graf ćemo kraće nazivati grafom.



Nul graf N_4 Potpuni graf K_5 Ciklus C_6

Slika 1.

Ukoliko su dva vrha v i w grafa G povezana bridom $e = vw$ kažemo da su susjedni. Nadalje, kažemo da su vrh v i brid e incidentni. Stupanj vrha v grafa G je broj bridova incidentnih s v; oznaka $\deg(v)$. Vrh stupnja 1 se naziva list. Svakom grafu se pridružuje nerastući niz stupnjeva vrhova.

Niz stupnjeva $(4, 1, 1, 1, 1)$. Niz stupnjeva $(2, 2, 2, 1, 1)$.

Slika 2.

Sljedeća lema posljedica je činjenice da je svaki brid grafa incidentan s točno dva vrha.

Lema 1.1 (Lema o rukovanju). *Ukupna suma stupnjeva u grafu G je paran broj i vrijedi*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

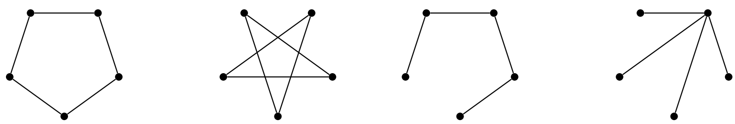
Dakle, niz stupnjeva grafa G s n vrhova i m bridova je particija broja $2m$. S druge strane, nije svaka particija broja $2m$ ujedno i niz stupnjeva nekog grafa. Kažemo da je nenegativan niz $(d_1, \ldots, d_n)$ cijelih brojeva grafički niz ako postoji graf G čiji je to niz stupnjeva.

Neka je $n = 3$, $m = 3$. Niz $(3, 2, 1)$ nije grafički, a $(2, 2, 2)$ jest. Zanimljivi problem određivanja je li zadani niz brojeva grafički detaljno je opisan u [5], gdje su i predstavljena dva najpoznatija kriterija.

Sljedeća tvrdnja je direktna posljedica Leme o rukovanju.

Korolar 1.1. *Broj vrhova neparnog stupnja u grafu G je paran.*

Za grafove $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ kažemo da su izomorfni ako postoji bijektivna korespondencija između skupova vrhova V_1 i V_2 takva da je broj bridova koji spajaju bilo koja dva izabrana vrha u V_1 jednak broju bridova koji spajaju korespondentna dva vrha u V_2. Takva se bijekcija naziva izomorfizam grafova.



Dva izomorfna grafa. Dva neizomorfna grafa.

Slika 3.

Kažemo da je G nepovezan ukoliko se može prikazati kao unija dva disjunktna grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ tako da je $V = V_1 \cup V_2$ i $E = E_1 \cup E_2$. U suprotnom kažemo da je graf G povezan.

Šetnja u G je konačan slijed bridova oblika v_0v_1, $v_1v_2, \ldots,$ $v_{m-1}v_m$ u kojem su svaka dva uzastopna brida ili susjedna ili jednaka. Šetnju u kojoj su svi bridovi različiti zovemo staza. Staza u kojoj su svi vrhovi $v_0, v_1, \ldots, v_m$ različiti (osim eventualno početni vrh v_0 i krajnji vrh v_m) zove se put. Za stazu ili put kažemo da su zatvoreni ako je $v_0 = v_m$. Zatvoreni put koji sadrži barem jedan brid zovemo ciklus. Šuma je graf bez ciklusa, a stablo je povezana šuma.

Graf šuma. Graf stablo.

Slika 4.

2 Koliko ima stabala?

Prebrojavanje različitih stabala je težak problem. Za početak je potrebno napomenuti da ćemo dva stabla smatrati različitima ukoliko su neizomorfna. Ne postoji zatvorena formula za broj stabala s n vrhova. Stoga su razvijene razne kombinatorne tehnike s ciljem prebrajanja stabala, ili barem određivanja približnog broja. Za velike vrijednosti parametra n problem je još uvijek otvoren. Mi ćemo u ovom članku prebrojiti sva stabla s najviše osam vrhova. Stabla ćemo konstruirati i prebrojiti jednostavnom kombinatornom iscrpnom pretragom. Time ćemo dokazati sljedeći teorem.

Teorem 2.1. *Postoji ukupno 48 stabala s n vrhova, $n \leq 8$.*

Jasno je da su stabla s različitim brojem vrhova neizomorfna. Lako je uočiti da postoji po jedno stablo s jednim, dva i tri vrha.

Slika 5.

Sljedeći rezultat bit će nam od velike pomoći u prebrajanju stabala.

Lema 2.1. *Svako stablo s $n \geq 2$ vrha ima barem dva lista.*

Dokaz. U stablu konstruiramo put maksimalne duljine. S obzirom da stablo ima konačno mnogo vrhova i bridova te nema ciklusa, početni i krajnji vrh maksimalnog puta $v_0v_1, \ldots, v_{m-1}v_m$ bit će listovi. $\square$

Poznat je broj bridova stabla s n vrhova.

Teorem 2.2. *Stablo s n vrhova ima $n-1$ bridova.*

Dokaz. Ovaj ćemo teorem dokazati matematičkom indukcijom po broju vrhova n. Baza indukcije je potvrđena na početku ovog poglavlja. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sva stabla s n vrhova, i neka je T stablo s $n+1$ vrhom. Neka je v jedan list u stablu i e jedini brid od T incidentan s v. Tada stablo $T-e$ nastalo uklanjanjem brida e i vrha v ima n vrhova i, prema pretpostavci indukcije, $n-1$ bridova. Stoga zaključujemo da T ima $n-1+1=n$ bridova, čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Pokažimo da postoje dva stabla s četiri vrha. Stablo s četiri vrha ima 3 brida, a kako bismo lakše konstruirali stabla, identificirat ćemo prvo moguće nizove stupnjeva. Prema Lemi o rukovanju zbroj svih stupnjeva s n = 4 vrha jednak je $2 \cdot (n-1) = 6$. Stablo ima barem dva lista, stoga su mogući nizovi stupnjeva sljedeći: $(2,2,1,1)$ i $(3,1,1,1)$. U oba slučaja moguće je konstruirati jedinstveno stablo. U prvom slučaju je to graf put P_4, a u drugom graf zvijezda.

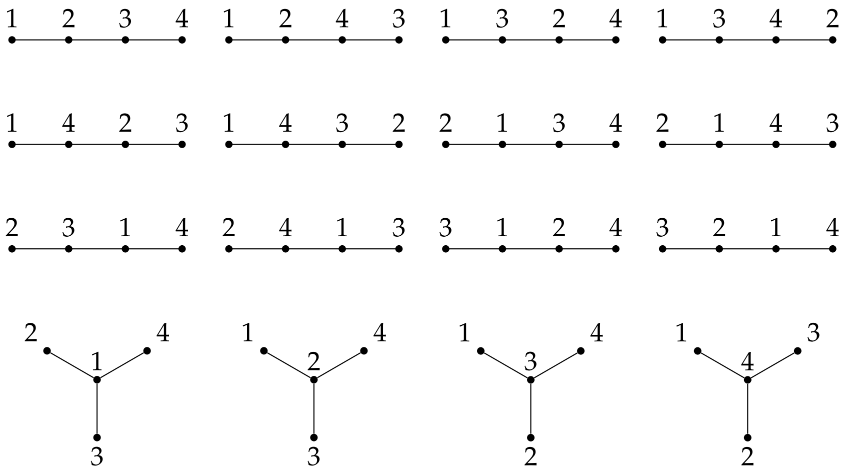
Niz stupnjeva $(2, 2, 1, 1)$. Niz stupnjeva $(3, 1, 1, 1)$.

Slika 6.

U ovom članku bavimo se prebrajanjem stabala s neoznačenim vrhovima. Nije poznata formula za izračun broja stabala s n vrhova s neoznačenim vrhovima. No, uvedemo li oznake za vrhove, poznat je sljedeći rezultat [2].

Teorem 2.3 (Cayley). *Postoji n^{n-2} različitih označenih stabala s n vrhova.*

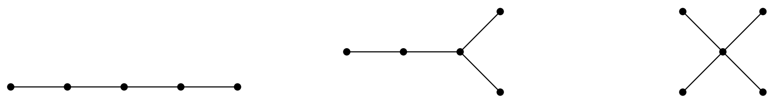
Zaključujemo da postoji $4^2 = 16$ stabala s četiri označena vrha, koje navodimo u nastavku, slika 7. Brojevi označenih stabala s n vrhova, za manje vrijednosti n dostupne su u [7].



Slika 7.

3 Stabla s pet vrhova

Stablo s $n = 5$ vrhova može imati 2, 3 ili 4 lista. Prema Lemi o rukovanju zbroj stupnjeva vrhova jednak je $2 \cdot (n-1) = 8$. Stoga su sljedeći mogući nizovi stupnjeva: $(2,2,2,1,1)$, $(3,2,1,1,1)$ i $(4,1,1,1,1)$. Za svaki od navedenih nizova stupnjeva moguće je konstruirati jedinstveno pripadajuće stablo.



$(2,2,2,1,1)$ $(3,2,1,1,1)$ $(4,1,1,1,1)$

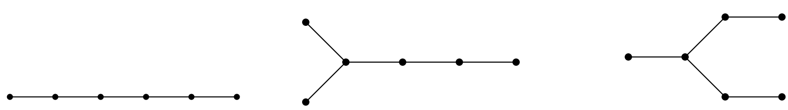
Slika 8.

Teorem 3.1. *Postoje tri stabla s pet vrhova.*

4 Stabla sa šest vrhova

Stablo sa $n = 6$ vrhova ima 5 bridova te 2, 3, 4, ili 5 listova. Prema Lemi o rukovanju zbroj stupnjeva vrhova jednak je 10.

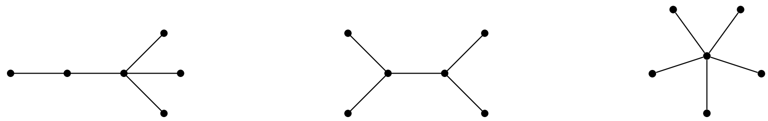
Postoji jedinstveno stablo s dva lista, to je graf put P_6 čiji je niz stupnjeva jednak $(2,2,2,2,1,1)$. U slučaju stabla s tri lista, jedini mogući niz stupnjeva stupnjeva je $(3,2,2,1,1,1)$. Uočimo da stablo s danim nizom stupnjeva ima dva vrha stupnja 2. Ovdje se prvi put susrećemo sa situacijom da možemo konstruirati dva neizomorfna stabla s istim brojem vrhova, bridova i nizom stupnjeva: u jednom su stablu dva vrha stupnja 2 susjedna, a u drugom to nije slučaj. Stoga su ova dva stabla neizomorfna.



$(2,2,2,2,1,1)$ $(3,2,2,1,1,1)$ $(3,2,2,1,1,1)$

Slika 9.

Pretpostavimo li da stablo ima 4 lista, dva su moguća niza stupnjeva: $(4,2,1,1,1,1)$ te $(3,3,1,1,1,1)$. U oba se slučaja može konstruirati po jedino stablo. Konačno, postoji jedinstveno stablo s pet listova, čiji je niz stupnjeva jednak $(5,1,1,1,1,1)$.



(4, 2, 1, 1, 1, 1) (3, 3, 1, 1, 1, 1) (5, 1, 1, 1, 1, 1)

Slika 10.

Ovim smo postupkom dokazali sljedeći teorem.

Teorem 4.1. *Postoji šest stabala sa šest vrhova.*

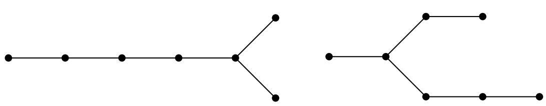
5 Stabla sa sedam vrhova

Stablo sa 7 vrhova ima 6 bridova, a prema Lemi o rukovanju zbroj stupnjeva stabla s $n = 7$ vrhova jednak $2 \cdot (n-1) = 12$. S obzirom da stablo ima između 2 i 6 listova, postoji 8 mogućih nizova stupnjeva te možemo, pokazat ćemo, konstruirati 11 neizomorfnih stabala sa sedam vrhova.

Prvi, jednostavni slučaj je stablo s dva lista, niz stupnjeva je jedinstven kao i stablo: graf put P_7.

Slika 11. $(2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$

Postoje tri neizomorfna stabla s tri lista, sva tri imaju isti niz stupnjeva: $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$. Razlikujemo ih prema tome je li jedinstveni vrh stupnja 3 susjedan s dva, jednim ili niti jednim listom.



Slika 12. $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$

Pretpostavimo li da stablo ima četiri lista, zbroj stupnjeva preostala tri vrha jednak je 8. Postoje dva rješenja ove jednadžbe: $(3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$ i $(4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$.

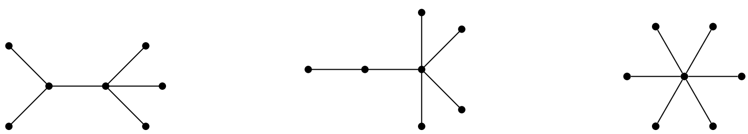
U prvom slučaju možemo konstruirati dva neizomorfna stabla: u jednom su stablu dva vrha stupnja 3 susjedna, a u drugom nisu.

Slika 13. $(3,3,2,1,1,1,1)$

I u drugom slučaju možemo konstruirati dva stabla: u jednom su stablu vrhovi stupnja 2 susjedni, a u drugom nisu.

Slika 14. $(4,2,2,1,1,1,1)$

Postoje dva stabla s 5 listova i imaju različite nizove stupnjeva $(4,3,1,1,1,1,1)$ i $(5,2,1,1,1,1,1)$. Konačno, pregled stabala sa sedam vrhova završavamo konstrukcijom jedinstvenog stabla sa šest listova.



$(4,3,1,1,1,1,1)$ $(5,2,1,1,1,1,1)$ $(6,1,1,1,1,1,1)$

Slika 15.

Ovime smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 5.1. *Postoji 11 stabala sa sedam vrhova.*

6 Stabla s osam vrhova

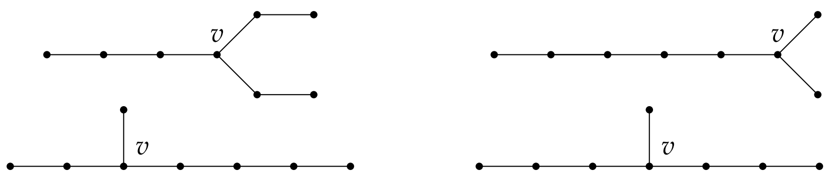
S povećanjem broj vrhova, povećava se i broj različitih nizova stupnjeva koji zadovoljavaju nužne uvjete, ali i broj neizomorfnih stabala koja imaju isti niz stupnjeva. Prebrajanje postaje sve kompleksnije s mnoštvom slučajeva koje je potrebno pažljivo obraditi kako bismo proveli iscrpnu pretragu. Stoga ćemo ovaj pregled završiti s prebrajanjem stabala s 8 vrhova kojih ima 23. Za nastavak prebrajanja stabala s većim brojem vrhova primjerenije je koristiti računalo i kompleksnije kombinatorne tehnike.

Zbroj stupnjeva stabla s osam vrhova jednak je 14. Najveći mogući broj listova je 7, a najmanji 2.

Kao i u prethodnim slučajevima, jedinstveno stablo s dva lista je graf put P_8.

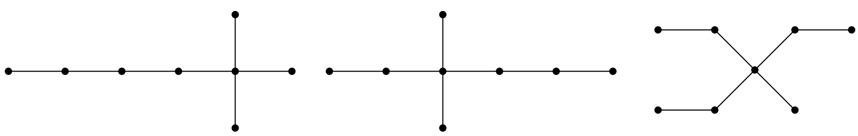
Slika 16. $(2,2,2,2,2,2,1,1)$

Pretpostavimo li da stablo ima tri lista, postoji jedinstveni niz stupnjeva koji zadovoljava nužne uvjete: $(3,2,2,2,2,1,1,1)$. Postoje četiri stabla s ovim nizom stupnjeva. Uočimo jedinstveni vrh v stupnja 3. Vrh v je susjedan s jednim, dva ili niti jednim listom. Stabla su jedinstvena u slučaju susjedstva jedinstvenog vrha v s dva ili niti jednim listom (prva dva slučaja na sljedećoj slici). Kada je v susjedan s jednim listom i dva vrha stupnja dva, potrebno je uočiti da postoje dva načina na koji možemo dovršiti graf: ili su oba susjeda od v stupnja 2 susjedna s vrhovima stupnja 2 ili nisu (posljednja dva grafa na sljedećoj slici).



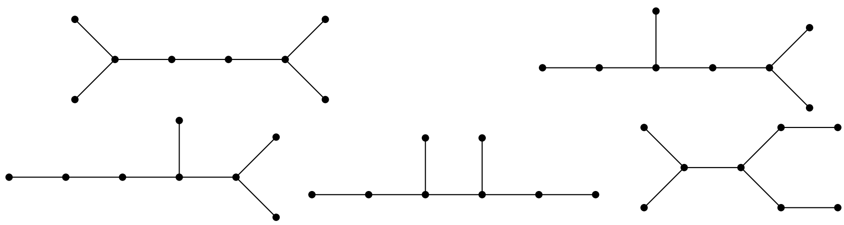
Slika 17. $(3,2,2,2,2,1,1,1)$

Pretpostavimo li da stablo ima četiri lista, rješavanjem jednadžbe dolazimo do dva moguća niza stupnjeva: $(4,2,2,2,1,1,1,1)$ i $(3,3,2,2,1,1,1,1)$. U prvom slučaju možemo konstruirati tri neizomorfna stabla. Stabla se razlikuju po tome je li jedinstveni vrh stupnja 4 susjedan s jednim, dva ili tri vrha stupnja 2.



Slika 18. $(4,2,2,2,1,1,1,1)$

U drugom slučaju, za niz stupnjeva $(3,3,2,2,1,1,1,1)$ moguće je konstruirati 5 stabala koja se razlikuju u susjedstvu vrhova stupnjeva 2 i 3. Na sljedećoj slici kod prva dva konstruirana stabla vrhovi stupnja 3 nisu susjedni, a u preostala tri stabla jesu.

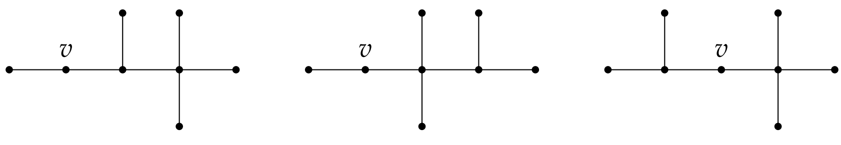


Slika 19. $(3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

Uz pretpostavku da stablo ima pet listova, sljedeća tri niza stupnjeva zadovoljavaju nužne uvjete: $(5, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ i $(3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$. U prvom slučaju možemo konstruirati dva neizomorfna stabla. Razlikujemo ih po tome jesu li vrhovi stupnja 2 susjedni ili ne.

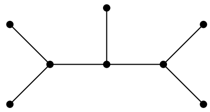
Slika 20. $(5, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$

U drugom slučaju možemo konstruirati tri stabla koja razlikujemo po stupnjevima susjeda od jedinstvenog vrha v stupnja 2.



Slika 21. $(4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$

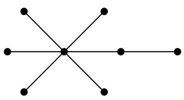
U posljednjem slučaju, vrhovi stupnja 3 nužno su susjedni stoga je pridruženo stablo jedinstveno.



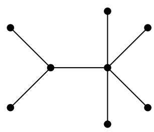
Slika 22. $(3,3,3,1,1,1,1,1)$

Dakle, postoji 6 neizomorfnih stabala s 8 vrhova i 5 listova.

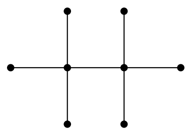
Pretpostavimo li da stablo ima 6 listova možemo konstruirati tri niza stupnjeva i za svaki od njih jedinstveno stablo: $(6,2,1,1,1,1,1,1)$, $(5,3,1,1,1,1,1,1)$ i $(4,4,1,1,1,1,1,1)$.



$(6,2,1,1,1,1,1,1)$



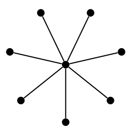
$(5,3,1,1,1,1,1,1)$



$(4,4,1,1,1,1,1,1)$

Slika 23.

Konačno, stablo sa 7 listova je jedinstveno.



Slika 24. $(7,1,1,1,1,1,1,1)$

Ovime smo završili prebrajanje stabala s osam vrhova.

Teorem 6.1. *Postoje 23 stabla s osam vrhova.*

Evo i pregleda rezultata koje smo prikazali u ovom članku. Sustavno smo konstruirali i pobrojali sva stabla s $n \leq 8$ vrhova i k listova. Označimo li dobivene vrijednosti s $T(n,k)$, $n \geq 2$, $2 \leq k \leq n$, dobiveni dvodimenzionalni niz može se pogodno prikazati u obliku trokuta gdje svaki redak odgovara jednoj vrijednosti parametra $n \geq 2$, a k-ti stupac broju stabala s $k+1$ listom

[8].

$$\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 0 & & & & & \\
1 & 1 & 0 & & & & \\
1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
1 & 2 & 2 & 1 & 0 & & \\
1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & \\
1 & 4 & 8 & 6 & 3 & 1 & 0
\end{array}$$

Zbrojimo li sve vrijednosti u n-tom retku, dobit ćemo ukupan broj stabala s n vrhova: $T(n) = \sum_{k=2}^{n} T(n,k)$, $n \geq 2$.

Broj vrhova n	1	2	3	4	5	6	7	8
Broj stabala $T(n)$	1	1	1	2	3	6	11	23

Članak zaključujemo s nizom brojeva stabala s većim brojem vrhova za ilustraciju čitatelju o kompleksnoj prirodi problema prebrojavanja stabala [6].

n	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$T(n)$	47	106	235	551	1301	3159	7741	19320	48629

n	18	19	20	21	22	23
$T(n)$	123867	317955	823065	2144505	5623756	14828074

n	24	25	26	27	28
$T(n)$	39299897	104636890	279793450	751065460	2023443032

Literatura

[1] M. Bóna, *A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, World Scientific, 2016.

[2] A. Cayley, *A Theorem on Trees*, Quart. J. Pure Appl. Math. 23(1889), 376–378.

[3] D. Kovačević, M. Krnić, A. Nakić, M. O. Pavčević, *Diskretna matematika 1*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2020.

[4] D. Kreher, D. Stinson, *Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search*, CRC Press, 1998.

[5] S. Majstorović, D. Begović, *Niz stupnjeva grafa*, Osječki matematički list 20 (2020), 39—52.

[6] OEIS Foundation Inc. (2022), *Number of trees with n unlabeled nodes*, A000055, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, oeis.org (pristupljeno 27. 03. 2022.)

[7] OEIS Foundation Inc. (2022), *Number of trees on n labeled nodes*, A000272, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, oeis.org (pristupljeno 27. 03. 2022.)

[8] OEIS Foundation Inc. (2022), *Triangle of trees with n nodes and k leaves*, A055290. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, oeis.org (pristupljeno 27. 03. 2022.)