Zdravka Aljinović
Snježana Pivac
*Boško Šego**

UDK 336.763:336.78 (497.5)
Izvorni znanstveni rad

CIR MODEL I NJEGOVA PRIMJENA NA DRŽAVNE VRIJEDNOSNICE REPUBLIKE HRVATSKE

Sedamdesetih godina prošlog stoljeća, u takozvanoj zlatnoj dekadi po pitanju primjene teorije vjerojatnosti i stohastičkih procesa u financijama, nastala je i nova teorija vremenske strukture kamatnih stopa. Nova teorija se u ovom radu najprije izlaže, a zatim i aplicira na raščlambu državnih vrijednosnih papira emitiranih od strane Republike Hrvatske na domaćem i međunarodnom tržištu vrijednosnica. Nakon što se izloži kako se gradi opći (jednofaktorski i difuzijski) model vremenske strukture kamatnih stopa, pokazuje se jedna, vjerojatno najčešće korištena varijanta tog modela: (jednofaktorski) Cox, Ingersoll, Rossov (CIR) model. Na temelju podataka vremenskog presjeka o cijeni i datumu dospijeća državnih vrijednosnica Republike Hrvatske vrši se ocjena parametara CIR modela, a zatim daje prognoza kretanja kamatnih stopa (stopa prihoda) za vrijeme od narednih pet godina za dva datuma u 1997. i 1998. godini. Rezultirajuće krivulje stope prihoda su inverzne (padajuće).

Uvod

Teorija vjerojatnosti relativno se dugo koristi u financijskom modeliranju[1], ali do prave revolucije kod problema razvitka i primjene veoma sofisticirane matematičke građe u financijskom modeliranju dolazi tek na početku sedamdesetih

---

* Z. Aljinović, dr. sc., i S. Pivac, mr. sc., asistentice su na Ekonomskom fakultetu u Splitu; B. Šego, prof. dr. sc., izvanredni profesor na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu. Članak primljen u uredništvo: 30. 1. 2003.

[1] D. Lamberton i B. Lapeyre (Lamberton, 1996, str. vii) ističu kako već godine 1900. francuski matematičar L. Bechelier, pokušavajući izgraditi "teoriju špekulacije" ("Theorie de la speculation"),

godina. To se, po mišljenju mnogih, može pripisati jakom valu financijskih inovacija na tržištima kapitala u to vrijeme. Mnogi radovi iz toga razdoblja veoma su aktualni i danas.[2] Iako su se modeli nastali u tome razdoblju mijenjali i razvijali, to je "zlatno desetljeće" dalo novu dimenziju primjeni teorije vjerojatnosti i stohastičkih procesa u financijama. Primjena stohastičkih procesa uznapredovala je kod velikog broja problema iz područja financija, pri čemu se vrednovanje opcija i vrijednosnica s varijabilnim kuponima (to jest s varijabilnom kamatnom stopom) smatra najvažnijim motivima za uvođenje stohastičkih procesa u financije, zbog izrazite neizvjesnosti kada se radi o dotoku novca koji ove vrijednosnice generiraju. U tome razdoblju nastaje i nova teorija vremenske strukture kamatnih stopa koju u ovome radu najprije izlažemo, a zatim apliciramo na raščlambu državnih vrijednosnih papira koji je emitirala Republika Hrvatska na domaćem i međunarodnom tržištu vrijednosnica. Vremenska struktura kamatnih stopa modelira se uvodeći neizvjesnost, i to ponajprije s obzirom na kretanje kratkoročne kamatne stope kao ključne varijable koja određuje stanje ekonomije u razmatranome trenutku. Većinu tih modela karakteriziraju slične pretpostavke i svojstva. Ono po čemu se razlikuju pojedini modeli jest kojim se specifičnim difuzijskim procesom prikazuje kratkoročna kamatna stopa. Pošto izložimo kako se gradi opći (jednofaktorski i difuzijski) model vremenske strukture, pokazat ćemo jednu, vjerojatno najčešće korištenu, varijantu tog modela: (jednofaktorski) Cox, Ingersoll, Rossov (CIR) model.

Kratkoročna kamatna stopa

Jednofaktorski CIR model sadrži samo jednu varijablu. To je *kratkoročna kamatna stopa*[3], a nju možemo definirati kao stopu povrata koju će investitori ostvariti u tijeku sljedećeg veoma kratkog vremenskog intervala. Označimo li sa *r(t)* kratkoročnu kamatnu stopu u nekom trenutku *t*, možemo je definirati ovako[4]:

$$r(t) = \lim_{T \to t} R(t,T) \qquad (1)$$

Budući da je ova varijabla ključna u svim kontinuiranim modelima vremenske strukture kamatnih stopa, važno je utvrditi njezina obilježja i način kako ju je moguće

otkriva nešto što danas nazivamo Brownovim gibanjem (Wienerov proces) i koristi se time čime se uvelike koristimo.

[2] Primjerice, Black i Scholes godine 1973. objavljuju rad "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" u kojem daju, i danas nezaobilazan, model za vrednovanje opcija.

[3] Uobičajeni su i engleski nazivi: very short term interest rate, spot interest rate.

[4] Ovako definiranoj kratkoročnoj kamatnoj stopi u praksi je najbliža prekonoćna kamatna stopa.

aproksimirati. Dakle, u nekom trenutku *t r(t)* označuje stopu povrata u sljedećem vrlo kratkom vremenskom intervalu. Zbog toga što su buduće vrijednosti kratkoročne kamatne stope nepoznate i neizvjesne, pretpostavlja se da je *r(t)* stohastički proces, točnije difuzijski stohastički proces. Poznato je da su difuzijski procesi, zapravo, jedna klasa Markovljevih stohastičkih procesa, pa ćemo se najprije podsjetiti što je Markovljev proces.

Stohastički proces $\{X_t,\ t\in T\}$ naziva se *Markovljevim procesom* ako za svaki prirodni broj $n \geq 3$, svaki izbor $t_1 < t_2 <\ldots< t_n$ iz skupa T i svaki mogući izbor realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$, vrijedi jednakost

$$P\left(X_{t_n} \leq x_n \middle| \left(X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = x_1\right)\right) = P\left(X_{t_n} \leq x_n \middle| X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right). \tag{2}$$

Posljednjom jednakošću iskazuje se činjenica da razdioba vjerojatnosti slučajne varijable X_t u trenutku $t = t_n$ ovisi samo o vrijednosti x_{n-1} procesa u prethodnom trenutku $t_{n-1}\ (t_{n-1} < t)$, ali ona ne ovisi o vrijednostima $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1$ razmatranog procesa u prijašnjim trenucima $t_{n-2} > t_{n-3} >\ldots> t_1$. Drugim riječima, pretpostavlja se da su vrijednosti kratkoročne kamatne stope u budućnosti određene samo njezinom sadašnjom vrijednošću, a neovisne su o vrijednostima koje su prethodile sadašnjem stanju. Razdioba vjerojatnosti segmenta $\{r(\tau), \tau \geq t\}$ u potpunosti je određena vrijednošću od *r(t)*.

Sada ćemo definirati difuzijski stohastički proces.

Kontinuirano vrijedan[5] Markovljev proces $x(t), t \in [0, T]$, naziva se *difuzijskim procesom* ako njegova prijelazna vjerojatnost $P(s,x,t,B)$[6] zadovoljava sljedeća tri uvjeta za svaki $s \in [0, T], x \in R$ i $\varepsilon > 0$:

(*i*) $$\lim_{t\to s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(s,x,t,dy) = 0\,;$$

(*ii*) postoji realna funkcija *f(s,x)* takva da je

$$\lim_{t\to s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)P(s,x,t,dy) = f(s,x)\,;$$

[5] Stohastičke procese možemo podijeliti na procese s diskretnim vrijednostima i na procese s kontinuiranim vrijednostima. Ako je X_t diskretna slučajna varijabla za svaki $t\in T$ kažemo da je $\{X_t\!: t \in T\}$ *stohastički proces s diskretnim vrijednostima,* ako je pak X_t kontinuirana je slučajna varijabla za svaki $t\in T$, $\{X_t\!: t \in T\}$ *stohastički proces s kontinuiranim vrijednostima*. Govori se još o *diskretno vrijednim* i *kontinuirano vrijednim stohastičkim procesima*.

[6] $P(s, x, t, B) = P\,[x(t) \in B \mid x(s) = x]$

(*iii*) postoji realna funkcija *h(s,x)* takva da je

$$\lim_{t \to s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \le \varepsilon} (y-x)^2 P(s,x,t,dy) = h(s,x).$$

f(s,x) se naziva *ciljnim koeficijentom (drift coefficient)*, a *h(s,x) difuzijskim koeficijentom (diffusion coefficient)* difuzijskog procesa *x(t)*.

Uočimo da uvjet (*i*) znači da velike promjene od $x(t)$ u kratkom vremenskom intervalu nisu vjerojatne.

Navodimo sada jedan važan teorem čiji dokaz ovdje nećemo provoditi.[7]

Teorem. Neka je zadana stohastička diferencijalna jednadžba (SDJ)

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + \sigma(t,x(t))dz(t) \qquad (3)$$

s početnim uvjetom $x(0,\omega) = c(\omega) = c$ i pretpostavimo da ona ima jedinstveno rješenje $x(t)$, $t \in [0, T]$. Dalje, pretpostavimo da su funkcije f i σ kontinuirane s obzirom na t. Tada je rješenje $x(t)$ difuzijski proces sa ciljnim koeficijentom $f(t,x)$ i difuzijskim koeficijentom $h(t,x) = \sigma^2(t,x)$.

Dakle, difuzijski proces $x(t)$ zadovoljava SDJ (3). Jednadžba (3) predstavlja opći oblik poznate *Itoove SDJ*, gdje je $x = x(t) = x(t,\omega)$ stohastički proces definiran na nekom prostoru vjerojatnosti (Ω, F, P) za $t \in [0,\infty\rangle$ ili $t \in [0,T]$. Pritom je $z = z(t,\omega) = z(t)$ Wienerov proces[8] na istom prostoru vjerojatnosti.

U Itoovoj SDJ (3) funkcija $f(t,x)$ predstavlja (uvjetno) očekivanje, a funkcija $\sigma^2(t,x)$ varijancu stohastičkog procesa $x(t)$.

Lako se tu pokazuje da difuzijski proces $r(t)$ zadovoljava Itoovu SDJ

$$dr(t) = f(t,r(t))dt + g(t,r(t))dz(t), \qquad (4)$$

gdje je $f(t,r(t))$ ciljni koeficijent, $g^2(t,r(t))$ difuzijski koeficijent (varijanca) i $\{z(t)\}$ standardni Wienerov proces, pa uočavamo da kontinuiranost "osigurava" malu vjerojatnost da će se dogoditi nagle i velike (skokovite) promjene vrijednosti od $r(t)$.

---

[7] Dokaz se može naći u Arnold, 1974, str. 153.

[8] *Wienerov proces* stohastički je proces $\{z(t), t \in [0,\infty\rangle\}$ za koji je $z(t)$ normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem nula i varijancom $s^2(t)=s^2(1)\cdot t$ za svaki $t > 0$, dok je $z(0)=0$ s vjerojatnošću 1.

Općenito o difuzijskim modelima vremenske strukture kamatnih stopa

Većina difuzijskih modela vremenske strukture kamatnih stopa zasniva se na tzv. nearbitražnom principu i karakterizirani su sličnim pretpostavkama i svojstvima:

i) Modeli su jednofaktorski, to jest postoji jedinstvena varijabla koja određuje stanje ekonomije u vremenu t i u svim je modelima to kratkoročna kamatna stopa $r(t)$ koju smo definirali jednadžbom (1);

ii) kratkoročna kamatna stopa ima svojstva difuzijskog procesa (iz toga proizlazi i naziv "difuzijski modeli vremenske strukture kamatnih stopa"), pa je zadana Itoovom SDJ (4);

iii) tržište je efikasno: sve su relevantne informacije dostupne istovremeno svim investitorima, ne postoje porezni ni transakcijski troškovi i svaki se investitor ponaša racionalno (koristi se svim dostupnim informacijama, želeći maksimirati svoj prihod). Ta pretpostavka implicira da svi investitori imaju jednaka očekivanja i da nikakva profitabilna arbitraža nije moguća.

Nepostojanje profitabilne bezrizične arbitraže znači da na konkurentnim financijskim tržištima vrijednosni papiri koji ne sadrže rizik imaju istu očekivanu stopu prihoda.

Cijene vrijednosnih papira usklađuju se zbog toga što ulagači, nastojeći postići što veću stopu prihoda, arbitriraju između različitih vrijednosnih papira, koje uključuju u svoj portfolio. Kada su sve mogućnosti ostvarivanja takvih stopa prihoda iscrpljene, cijene su vrijednosnih papira u stanju ravnoteže i takvo stanje ovdje podrazumijevamo.

U takvoj će ekonomiji cijena obveznice u trenutku t s vremenom dospijeća T, $P(t,T)$, ovisiti, dakle, ponajprije o kamatnoj stopi u vremenu do dospijeća, to jest o segmentu $\{r(\tau), t \leq \tau \leq T\}$, gdje je $r(t)$ difuzijski proces. Stoga možemo pisati

$$P(t,T) \equiv P(t,T,r(t)). \qquad (5)$$

Da bismo dobili diferencijal dP, odnosno SDJ kojom opisujemo promjene cijene obveznice, moramo se koristiti Itoovom lemom, koja je često korišteno oruđe u stohastičkom "računu", a omogućuje računanje stohastičkih diferencijala složenih slučajnih funkcija. Ovdje je navodimo bez dokaza.[9]

---

[9] Dokaz Itoove leme i njen poopćeni oblik i nekoliko veoma ilustrativnih primjera njezine primjene mogu se naći u Malliaris, Brock, 1988, str. 80-92.

Itoova lema. Neka je $u(t, x)$:$[0, T] \times R \to R$ neprekidna funkcija, koje su parcijalne derivacije u_t, u_x, u_{xx} neprekidne funkcije. Pretpostavimo da je $x(t, \omega)$:$[0, T] \times R \to R$ proces sa stohastičkim diferencijalom

$$dx(t) = f(t)dt + \sigma(t)dz(t).$$

Neka je $y(t) = u(t, x(t))$. Tada je i proces $y(t)$ diferencijabilan na segmentu $[0, T]$ i njegov je diferencijal dan sa

$$dy(t) = \left[u_t(t, x(t)) + u_x(t, x(t))f(t) + \frac{1}{2} u_{xx}(t, x(t))\sigma^2(t) \right] dt + u_x(t, x(t))\sigma(t)dz(t).$$

Prema Itoovoj lemi bit će

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial r} dtdr + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (dr)^2 \right). \quad (6)$$

Uvrstimo li diferencijal dr dan jednadžbom (4), a zatim primijenimo multiplikacijska pravila

$$(dt)^2 = 0, \ (dz)^2 = dt, \ dt \times dz = 0, \quad (7)$$

dobivamo

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r}\left(fdt + gdz \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} g^2 dt,$$

to jest

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + f \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + g \frac{\partial P}{\partial r} dz. \quad (8)$$

Definirat ćemo sada funkcije μ i σ na sljedeći način:

$$\mu(t, T, r(t)) = \frac{1}{P(t, T, r)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] P(t, T, r), \quad (9)$$

$$\sigma\big(t,T,r(t)\big) = -\frac{1}{P(t,T,r)} g \frac{\partial}{\partial r} P(t,T,r). \qquad (10)$$

Sada se jednadžba (8) može pisati u obliku:

$$dP = P\mu\big(t,T,r(t)\big)dt - P\sigma\big(t,T,r(t)\big)dz. \qquad (11)$$

Funkcije $\mu\big(t,T,r(t)\big)$ i $\sigma^2\big(t,T,r(t)\big)$ jesu očekivanje i varijanca veličine $\frac{dP}{P}$ u vremenu t obveznice s vremenom dospijeća T, uz danu tekuću stopu $r(t)=r$.

Promotrimo sada situaciju u kojoj neki investitor u vremenu t izdaje količinu W_1 obveznica s vremenom dospijeća T_1 i istovremeno kupuje količinu W_2 obveznica s vremenom dospijeća T_2. Ukupna vrijednost tako konstruiranog portfolia $W = W_2 - W_1$ mijenja se prema jednadžbi

$$dW = \big(W_2\mu(t,T_2) - W_1\mu(t,T_1)\big)dt - \big(W_2\sigma(t,T_2) - W_1\sigma(t,T_1)\big)dz. \qquad (12)$$

Pretpostavimo da su količine W_1 i W_2 odabrane tako da budu proporcionalne $\sigma(t,T_2)$, odnosno $\sigma(t,T_1)$, to jest

$$W_1 = \frac{W\sigma(t,T_2)}{\sigma(t,T_1) - \sigma(t,T_2)} \quad \text{i} \quad W_2 = \frac{W\sigma(t,T_1)}{\sigma(t,T_1) - \sigma(t,T_2)}.$$

Tada u jednadžbi (12) nestaje stohastički dio, to znači da jednadžba poprima oblik:

$$dW = \frac{W\big(\mu(t,T_2)\sigma(t,T_1) - \mu(t,T_1)\sigma(t,T_2)\big)}{\sigma(t,T_1) - \sigma(t,T_2)} dt. \qquad (13)$$

Ovako sačinjen portfolio trenutačno je bez rizika, jer u jednadžbi (13) ne postoji stohastički dio *dz*. Općenito, porast vrijednosti nekog pozajmljenog iznosa *W* uz stopu *r(t)* bit će (u uvjetima izvjesnosti)

$$dW = Wr(t)dt. \qquad (14)$$

Usporedbom jednadžbi (13) i (14) dobivamo

$$\frac{\mu(t,T_2)\sigma(t,T_1)-\mu(t,T_1)\sigma(t,T_2)}{\sigma(t,T_1)-\sigma(t,T_2)}=r(t).$$

Pomnožimo li tu jednadžbu nazivnikom, dobit ćemo

$$\mu(t,T_2)\sigma(t,T_1)-\mu(t,T_1)\sigma(t,T_2)=r(t)\sigma(t,T_1)-r(t)\sigma(t,T_2),$$

pa je

$$\mu(t,T_2)\sigma(t,T_1)-r(t)\sigma(t,T_1)=\mu(t,T_1)\sigma(t,T_2)-r(t)\sigma(t,T_2).$$

Podijelimo li posljednju jednadžbu sa $\sigma(t, T_1)\cdot\sigma(t, T_2)$, nalazimo, da je

$$\frac{\mu(t,T_1)-r(t)}{\sigma(t,T_1)}=\frac{\mu(t,T_2)-r(t)}{\sigma(t,T_2)}. \tag{15}$$

Budući da je ova jednadžba valjana za proizvoljne T_1 i T_2, onda je omjer $\frac{\mu(t,T)-r(t)}{\sigma(t,T)}$ neovisan o T. Označimo sa $q(t,r)$ vrijednost toga omjera za obveznicu bilo kojeg vremena dospijeća, uzimajući da je trenutačna kamatna stopa $r(t)=r$. Dakle,

$$q(t,r)=\frac{\mu(t,T,r)-r}{\sigma(t,T,r)},\quad T\geq t. \tag{16}$$

Veličina $q(t,r)$ naziva se *tržišnom cijenom rizika* zato što određuje porast očekivane trenutačne stope povrata na obveznicu za dodatnu jedinicu rizika. Veličina $\Phi((t,r(t))$ koju definiramo uz pomoć tržišne cijene rizika na sljedeći način

$$\Phi(t,r(t))=q(t,r(t))g(t,r(t)) \tag{17}$$

naziva se *premijom za rizik*.

Jednadžbu (16) možemo pisati i u obliku

$$\mu(t,T,r)-r=q(t,r)\sigma(t,T,r).$$

Supstituiramo li μ i σ izrazima danima jednadžbama (9) i (10), nakon sređivanja dolazimo do jednadžbe

$$\frac{\partial P}{\partial t}+(f+gq)\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{2}g^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP=0,\ t\le T. \quad (18)$$

Ističemo da cijeli naprijed navedeni izvod kao i rezultirajuća jednadžba (18) vrijede zapravo za svaki vrijednosni papir "osjetljiv" na promjenu kamatne stope, kod kojeg nema isplate kamata odnosno prihoda prije vremena dospijeća. Kada su poznati karakter procesa *r(t)* (to jest funkcije *f* i *g* u jednadžbi (4)) i određena tržišna cijena rizika *q(t,r)*, cijena vrijednosnog papira dobiva se rješavanjem jednadžbe (18) s obzirom na odgovarajući početni uvjet. Tako će cijena nul-kupon obveznice *P(t,T,r)* biti izračunana s obzirom na početni uvjet tako da je nominalna cijena te obveznice jedna novčana jedinica, to jest

$$P(T,T,r)=1. \quad (19)$$

Pošto odredimo rješenje jednadžbe (18), vremenska se struktura kamatnih stopa tada lako računa iz jednadžbe (1):

$$R(t,T)=-\frac{\ln P(t,T)}{T-t}.$$

Rješenja stohastičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi paraboličkog ili eliptičkog tipa, kakva je i jednadžba (18), mogu se prikazati u integralnom obliku.[10] Tako se cijena nul-kupon obveznice, kao rješenje jednadžbe (18) s obzirom na početni uvjet (19), može prikazati u obliku

$$P(t,s)=E_t\exp\left(-\int_t^s r(\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_t^s q^2(\tau,r(\tau))d\tau+\int_t^s q(\tau,r(\tau))dz(\tau)\right),t\le s. \quad (20)$$

U posebnom slučaju kada je očekivana trenutačna stopa povrata jednaka za sve obveznice bez obzira na vrijeme dospijeća, i to

$$\mu(t,s)=r(t),\ t\le s,$$

što zapravo znači da je $q=0$, cijena obveznice dana je izrazom

$$P(t,s)=E_t\exp\left(-\int_t^s r(\tau)d\tau\right). \quad (21)$$

[10] Potanje o tome vidjeti primjerice u Friedman, 1975, str.144-150.

Ono po čemu se razlikuju pojedini jednofaktorski difuzijski modeli vremenske strukture kamatnih stopa jest način na koji se određuju koeficijenti f i g u jednadžbi (4), to znači po tome kojim se specifičnim difuzijskim procesom prikazuje $r(t)$.

Jednofaktorski CIR model vremenske strukture kamatnih stopa

Jednofaktorski CIR model vremenske strukture kamatnih stopa, kao i prethodan opći model, za jedinstvenu varijablu, kojom se koristi u modelu, ima kratkoročnu kamatnu stopu. U ovom modelu ona je zadana kao difuzijski proces:

$$dr(t) = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz(t). \qquad (22)$$

Ovaj proces ima sljedeće važno svojstvo: kamatna stopa $r(t)$ ne odstupa značajno i dugo od svoje *središnje pozicije,* odnosno *dugoročne vrijednosti* θ. Vrijednosti θ kamatna stopa teži *brzinom prilagodbe* k. Za $\sigma, k, \theta > 0$ rješenje $r(t)$ jednadžbe (17) jedinstveno je i nenegativno.

Pretpostavlja se da je tržišna cijena rizika dana izrazom

$$q(t,r(t)) = \lambda\frac{\sqrt{r(t)}}{\sigma},\ \lambda = \text{const}, \qquad (23)$$

pa je, dakle, premija za rizik

$$\Phi(t,r(t)) = \lambda r(t). \qquad (24)$$

Navest ćemo još nekoliko za ovaj proces vrijednih i značajnih rezultata vjerojatnosne prirode, ne dokazujući ih.

Gustoća vjerojatnosti kamatne stope u vremenu s, uvjetovana njezinom vrijednošću u tekućem trenutku t, dana je sljedećim izrazom:

$$f\left(r(s),s;r(t),t\right) = ce^{-u-v}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{Q}{2}} I_Q\left(2(uv)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad (25)$$

gdje je
$$c = \frac{2k}{\sigma^2 (1 - e^{-k(s-t)})},$$
$$u = cr(t)e^{-k(s-t)},$$
$$v = cr(s),$$
$$Q = \frac{2k\theta}{\sigma^2} - 1$$

i I_α modificirana Besselova funkcija prve vrste, reda α:

$$I_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}.$$

Uvjetna očekivana vrijednost[11] i varijanca dani su sljedećim izrazima:

$$E\big(r(s)|r(t)\big) = r(t)e^{-k(s-t)} + \theta\left(1 - e^{-k(s-t)}\right) \quad (26)$$

$$ar\big(r(s)|r(t)\big) = r(t)\left(\frac{\sigma^2}{k}\right)\left(e^{-k(s-t)} - e^{-2k(s-t)}\right) + \theta\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right)\left(1 - e^{-k(s-t)}\right)^2. \quad (27)$$

Iz izraza (26) i (27) lako se može uočiti da vrijedi:

$$\lim_{k\to\infty} E\big(r(s)|r(t)\big) = \theta, \quad \lim_{k\to\infty} Var\big(r(s)|r(t)\big) = 0,$$
$$\lim_{k\to 0} E\big(r(s)|r(t)\big) = r(t), \quad \lim_{k\to 0} Var\big(r(s)|r(t)\big) = \sigma^2 r(t)(s-t).$$

Budući da je u nekom trenutku *t P(t,T,r(t))* cijena bezrizične diskontirane obveznice s vremenom dospijeća *T*, koristeći se Itoovom lemom i diferencijalom *dr* dan jednadžbom (22) ili direktno koristeći se već gotovim rezultatom (18) za prethodan opći model, dobivamo da je trenutačna stopa povrata za tu obveznicu dana izrazom:

---

[11] Ta vrijednost zapravo odgovara rješenju obične diferencijalne jednadžbe (deterministička verzija jednadžbe (17)):
$$dr = k(\theta - r)du, r(t) = r_t.$$

$$\frac{dP}{P} = \left[k(\theta - r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right] \frac{1}{P} dt + \sigma\sqrt{r}\frac{\partial P}{\partial r}\frac{1}{P} dz \,. \tag{28}$$

Na efikasnim tržištima, trenutačna očekivana stopa povrata za bilo koji ulog jednaka je zbroju trenutačnog bezrizičnog povrata r i premije za rizik Φ. Prikažemo li sada trenutačnu stopu povrata nul-kupon obveznice u obliku

$$\frac{dP}{P} = \mu(t,T,r)dt + \upsilon(t,T;r)dz \,, \tag{29}$$

nepostojanje profitabilne bezrizične arbitraže u ovoj ekonomiji znači, dakle, da je

$$\mu(t,T,r) = r + \frac{\lambda\sqrt{r}}{\sigma}\upsilon(t,T,r). \tag{30}$$

Usporedimo li jednadžbe (28) i (29), i umjesto *((t,T,r)* supstituiramo izraz (30), dobit ćemo ovu jednadžbu:

$$rP + \lambda r \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r} k(\theta - r) + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2 r \,. \tag{31}$$

To je osnovna jednadžba za određivanje cijene nul-kupon obveznice vrijednost koje ovisi samo o kratkoročnoj kamatnoj stopi r i o vremenu dospijeća T-t. Zbog početnog uvjeta

$$P(t,T,r) = 1 \,,$$

dobiva se sljedeće rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe (31):

$$P\big(t,T,r(t)\big) = A(t,T)e^{-r(t)B(t,T)} \,, \tag{32}$$

gdje su $A(t,T)$ i $B(t,T)$ funkcije neovisne o r:

$$A(t,T) = \left\{ \frac{\phi_1 e^{\phi_1(T-t)}}{\phi_2\left[e^{\phi_1(T-t)} - 1\right] + \phi_1} \right\}^{\phi_3} \,, \tag{33}$$

$$B(t,T)=\frac{e^{\phi_1(T-t)}-1}{\phi_2\left[e^{\phi_1(T-t)}-1\right]+\phi_1}\,, \tag{34}$$

$$\phi_1=\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}\,,\ \phi_2=\frac{k+\lambda+\phi_1}{2}\,,\ \phi_3=\frac{2k\theta}{\sigma^2}. \tag{35}$$

Cox, Ingersoll i Ross dokazali[12] su da parametri difuzijskog procesa (22) imaju ove učinke na cijenu obveznice:

(1) Cijena obveznice rastuća je konveksna funkcija središnje vrijednosti kamatne stope θ i padajuća konkavna brzine prilagodbe k, ako je kamatna stopa veća od θ, odnosno rastuća konveksna funkcija brzine prilagodbe k, ako je kamatna stopa manja od θ.

(2) Cijena obveznice padajuća je konkavna funkcija varijance σ^2.

Budući da nas konačno zanima vremenska struktura kamatnih stopa, izraz (32) za cijenu obveznice supstituirat ćemo u jednadžbu (1). (U skladu s tim modelom umjesto *R(t,T)* i *P(t,T)* pišemo *R(t,T,r)* i *P(t,T,r)*.) Dobivamo

$$R(t,T,r)=\frac{rB(t,T)-\ln A(t,T)}{T-t}\,. \tag{36}$$

Što je kraće vrijeme do dospijeća, to jest što je manja razlika *T-t*, to je stopa prihoda do dospijeća *R(t,T,r)* sve bliža tekućoj kamatnoj stopi, neovisno o vrijednosti parametara:

$$\lim_{T\to t} R(t,T,r)=r(t) \tag{37}$$

Taj se rezultat lako može dokazati primjenom L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{T\to t}R(t,T,r)=\lim_{T\to t}\frac{rB(t,T)-\ln A(t,T)}{T-t}=r\lim_{T\to t}\frac{B(t,T)}{T-t}-\lim_{T\to t}\frac{\ln A(t,T)}{T-t}=L_1-L_2\,.$$

[12] Vidjeti Cox, 1981.

Prema jednadžbama (33) i (34) vrijedit će dakle:

$$L_1 = r\lim_{T\to t}\frac{\dfrac{e^{\phi_1(T-t)}-1}{\phi_2\left[e^{\phi_1(T-t)}-1\right]+\phi_1}}{T-t} = r\lim_{T\to t}\frac{e^{\phi_1(T-t)}-1}{\left\{\phi_2\left[e^{\phi_1(T-t)}-1\right]+\phi_1\right\}(T-t)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= r\lim_{T\to t}\frac{\phi_1 e^{\phi_1(T-t)}}{\phi_2\phi_1 e^{\phi_1(T-t)}(T-t)+\phi_2 e^{\phi_1(T-t)}-\phi_2+\phi_1} = r\frac{\phi_1}{\phi_1} = r = r(t),$$

$$L_2 = \lim_{T\to t}\frac{\phi_3\ln\dfrac{\phi_1 e^{\phi_2(T-t)}}{\phi_2\left[e^{\phi_1(T-t)}-1\right]+\phi_1}}{T-t} = \phi_3\lim_{T\to t}\frac{\ln\phi_1 e^{\phi_2(T-t)}-\ln\left\{\phi_2\left[e^{\phi_1(T-t)}-1\right]+\phi_1\right\}}{T-t} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \phi_3\lim_{T\to t}\left[\frac{\phi_1\phi_2 e^{\phi_2(T-t)}}{\phi_1 e^{\phi_2(T-t)}} - \frac{\phi_1\phi_2 e^{\phi_1(T-t)}}{\phi_2\left(e^{\phi_1(T-t)}-1\right)+\phi_1}\right] = 0.$$

Prema tome,

$$\lim_{T\to t} R(T,t,r) = L_1 - L_2 = r(t).$$

R(t,T,r) doseže graničnu vrijednost neovisnu o tekućoj kamatnoj stopi:

$$\lim_{T\to\infty} R(t,T,r) = R_\infty = (\phi_1-\phi_2)\phi_3. \qquad (38)$$

I (38) se dokazuje primjenom L'Hospitalovog pravila, analogno dokazu jednakosti (37).

Iz izraza za ϕ_1 danog pod (35) možemo dobiti da je

$$\sigma^2 = \frac{\phi_1^{\,2}-(k+\lambda)^2}{2} \qquad (39)$$

Ako u (35) uvrstimo (39), R_∞ možemo pisati u sljedećem obliku:

$$R_\infty = (\phi_1 - \phi_2)\phi_3 = \left(\phi_1 - \frac{k+\lambda+\phi_1}{2}\right)\frac{2k\theta}{\frac{\phi_1^2 - (k+\lambda)^2}{2}} =$$

$$= \frac{\phi_1 - (k+\lambda)}{2}\,\frac{4k\theta}{\big(\phi_1 - (k+\lambda)\big)\big(\phi_1 + (k+\lambda)\big)} = \frac{2k\theta}{k+\lambda+\phi_1}\,.$$

Imamo, dakle, da je

$$R_\infty = (\phi_1 - \phi_2)\phi_3 = \frac{2k\theta}{k+\lambda+\phi_1}\,. \tag{40}$$

Dalje, ako se u jednakosti (39) koristimo formulom za razliku kvadrata, nalazimo da je

$$\sigma^2 = 2\phi_2(\phi_1 - \phi_2)\,. \tag{41}$$

Konačno, navodimo još jedan zanimljiv rezultat do kojeg dolaze autori modela u radu [13]. Ako je

$$\frac{2k\theta}{k+\lambda+\phi_1} < r(t) < \frac{k\theta}{k+\lambda},$$

tada vremenska struktura kamatnih stopa, to jest krivulja stope prihoda poprima grbavi oblik. Rastućeg je oblika ako su vrijednosti od *r(t)* manje od granične vrijednosti R_∞, a padajućeg ako su vrijednosti od *r(t)* veće od $\frac{k\theta}{k+\lambda}$.

Unatoč velikoj prihvaćenosti jednofaktorskog CIR modela, on je naravno doživio i određene kritike. CIR model najčešće se prikazuje izdvojen iz okvira u kojem je nastao. Stoga se ne vidi kako se došlo do upravo ovog difuzijskog procesa u prikazivanju promjene kratkoročne kamatne stope (jednadžba (22)), i do ovog oblika tržišne cijene rizika (jednadžba (23)). Naime, te jednakosti imaju svoje "zaleđe", to znači da se one izvode u tom širem okviru, što se u takvom načinu prikazivanja modela ne vidi. Isto se tako često kritizira nepromjenjljivost dugoročne kamatne stope u tijeku vremena, što u praksi najčešće nije slučaj.

Primjena CIR modela na državne vrijednosnice Republike Hrvatske

O državnim vrijednosnicama Republike Hrvatske

Kratkoročni vrijednosni papiri

Prve su kratkoročne vrijednosnice u Hrvatskoj (dragovoljni) *blagajnički zapisi*, koje je emitirala Hrvatska narodna banka počevši s aukcijama blagajničkih zapisa u studenom godine 1993. Dakle, blagajnički su zapisi osnovni vrijednosni papiri kojima središnje banke provode politiku otvorenog tržišta, regulirajući količinu novca u optjecaju, a kamatna stopa na blagajničke zapise orijentacijska je kamatna stopa pri ugovaranju drugih vrsta kredita ili pri emisiji vrijednosnih papira. U Hrvatskoj se izdavanjem blagajničkih zapisa HNB htjelo pridonijeti razvitku financijskih tržišta, odnosno njihovim se uvođenjem željelo postići da se banke i druge financijske institucije navikavaju na poslovanje kredibilnim vrijednosnim papirom za koji se zna da ima izuzetno mali kreditni rizik. Dalje, veoma važnu ulogu blagajnički zapisi imaju u sterilizaciji viška likvidnosti domaće valute. Cilj je, dakle, da banke u svojoj aktivi nemaju novac koji će plasirati kao kredite, nego da ga zamijene nekim drugim oblikom imovine, a to je u ovom slučaju blagajnički zapis HNB. To, naravno, donosi i određeni prinos.

Blagajnički zapisi prodaju se uz diskont, to znači promptnim umanjenjem nominalne vrijednosti blagajničkih zapisa za iznos pripadajućih kamata, što, dakle, odgovara definiciji nul-kupon obveznice. Vrijeme dospijeća blagajničkih zapisa u Hrvatskoj mijenjalo se nekoliko puta. Primjerice 12. lipnja 1996. uvodi se mogućnost upisa blagajničkih zapisa s rokom dospijeća 182 dana, a dokida se mogućnost upisa blagajničkih zapisa s rokom dospijeća 7 dana. Naime, dragovoljni su blagajnički zapisi instrument sterilizacije novca, kojima Hrvatska narodna banka nastoji imobilizirati višak likvidnosti u financijskom sustavu na određeni rok. Blagajničkim zapisima na rok upisa od 7 dana ne postižu se efekti imobilizacije sredstava, već oni predstavljaju pretvaranje visoko likvidnih sredstava u neznatno manje likvidna sredstva. Osim toga, smatralo se da je upis blagajničkih zapisa s rokom dospijeća od 7 dana na određeni način kočnica daljem razvitku sekundarnog tržišta. Imajući u vidu razvitak sekundarnog tržišta, jednako kao i ukupnu likvidnost financijskog sustava i potrebu za imobilizacijom viška likvidnosti na dulji rok, uvodi se mogućnost upisa dragovoljnih blagajničkih zapisa s rokom dospijeća od 182 dana.[13]

---

[13] Dospijeća su blagajničkih zapisa 35, 91 i 182 dana. Blagajničke zapise Hrvatske narodne banke na primarnome tržištu mogu kupovati banke, štedionice i štedno-kreditne zadruge. Prema važećim propisima nije ograničena kupnja blagajničkih zapisa na sekundarnom tržištu. Blagajničke

Blagajnički su zapisi Hrvatske narodne banke nematerijalizirani, a po potrebi HNB izdaje Potvrde o blagajničkim zapisima. Apoeni blagajničkih zapisa bili su 100000 kuna, 500000 kuna, 1000000 kuna i 10000000 kuna. Navedeni su apoeni od svršetka godine 1997. zamijenjeni jednim apoenom od 100000 kuna.

Ista obilježja kao i blagajnički imaju i *trezorski zapisi* Ministarstva financija. Prva aukcija trezorskih zapisa s rokom dospijeća 45 dana održana je 26. srpnja 1996. Osim tog roka dospijeća izdaju se i za rok dospijeća, od 182, 91 i 35 dana. Pravo sudjelovanja u aukciji trezorskih zapisa imaju domaće fizičke i pravne osobe.[14]

Dugoročni vrijednosni papiri

Republika Hrvatska izdaje obveznice na domaćem i na međunarodnom tržištu vrijednosnica. Domaće tržište vrijednosnica čine uglavnom obveznice koje je Republika Hrvatska izdala u svrhu restrukturiranja gospodarstva, sanacije bankarskog sustava i radi preuzimanja duga od građana koji su ostali bez svojih deviznih depozita. Tim se vrijednosnim papirima ne trguje na sekundarnom tržištu, već oni uglavnom figuriraju kao dematerijalizirani oblik koji banke potražuju od države. Obveznice izdane na domaćem tržištu, a koje su predmet trgovanja na sekundarnom tržištu sljedeće su:

1) *Obveznice Serije JDA* izdane su kao oblik refinanciranja glavnice po osnovu stare devizne štednje, jer tu glavnicu Republika Hrvatska po dospijeću stare devizne štednje nije mogla platiti.Te su obveznice izdane 30. lipnja godine 1995. Izdane su u ukupnoj vrijednosti od DEM 153.700.000,00. Nose kamate od 12% godišnje. Glavnica i kamate amortiziraju se u 6 polugodišnjih isplata, a prva isplata dospijeva na naplatu 1. rujna godine 1996. Datumi plaćanja anuiteta, dakle, jesu 1. ožujka i 1. rujna svake godine. Dospijeće je obveznica u godini 1999.

---

zapise na sekundarnom tržištu mogu kupovati svi zainteresirani investitori, bilo pravne ili fizičke osobe. U tijeku kolovoza godine 1995. Hrvatska narodna banka primila je više upita o mogućnosti i zahtjeva za upisom blagajničkih zapisa HNB od banaka u svoje ime za tuđi račun, od stranih inozemnih osoba. Postojalo je prilično veliko zanimanje stranih investitora za upis blagajničkih zapisa zbog relativno visokih kamata i malog rizika. No, s aspekta provođenja monetarne politike nema interesa da se strancima dopusti da upisuju blagajničke zapise. Kada bi se to dopustilo, veoma važan cilj uvođenja blagajničkih zapisa ne bi bio ispunjen. Devize bi ušle u zemlju, čime se pojavljuje dodatni pritisak na aprecijaciju tečaja, dodatni kapitalni priljev. Ne bi bilo riječi ni o kakvoj sterilizaciji.

[14] Stranim investitorima nije dopušten direktni pristup na aukcije trezorskih zapisa. Registarsku knjigu upisanih trezorskih zapisa vodi Zavod za platni promet, a na zahtjev kupca izdaje se Potvrda o upisanim trezorskim zapisima u sljedećim apoenima: 100000, 500000 i 1000000 kuna.

2) *Obveznice serije JDB* izdane su u godini 1996. sa svrhom refinanciranja drugog dospjelog anuiteta po osnovu obveznica po staroj deviznoj štednji. Izdane su u ukupnoj vrijednosti od DEM 147.100.000,00. Nose kamate od 8% godišnje. Isplata glavnice i kamata po tim obveznicama obavlja se u šest polugodišnjih isplata, počevši od 1. travnja godine 1997. Datumi plaćanja kamata, dakle, 1. travnja i 1. listopada svake godine. Dospijeće je obveznica u godini 1999.

Obveznice Serije JDA i JDB uvrštene su u prvu kotaciju Zagrebačke burze i jedne su od najlikvidnijih vrijednosnih papira kojima se trguje na toj burzi. Međunarodno tržište hrvatskih državnih obveznica nešto je aktivnije od domaćega.

3) U siječnju godine 1997. Republika Hrvatska izdala je *Eurokunske obveznice* u ukupnoj vrijednosti od HRK 300.000.000,00. Obveznice su plasirane na domaćem i na međunarodnom tržištu, a značaj je njihova izdavanja jačanje domaćeg tržišta kapitala. Obveznice nose kamate od 12,50% godišnje. Kamate se plaćaju polugodišnje na dane 18. lipnja i 18. prosinca. Dospijeće je glavnice 18. prosinca godine 1998. Obveznice kotiraju na Zagrebačkoj i Luksemburškoj burzi vrijednosnica.

4) U veljači 1997. Hrvatska je izdala *eurodolarske obveznice*. Vrijednost emisije bila je USD 300.000.000,00. Obveznice nose fiksne kamate od 7% godišnje, koje se plaćaju polugodišnje 27. veljače i 27. kolovoza. Dospijeće je tih obveznica godine 2002. Obveznice kotiraju na Luksemburškoj burzi vrijednosnica.

5) U srpnju godine 1997. Republika Hrvatska izdala je i *euroobveznice u DEM*. Obveznice su izdane u vrijednosti od DEM 300.000.000,00 uz kamatnu stopu od 6,125% godišnje. Isplata kamata je godišnja. Plaća se 16. srpnja svake godine, počevši od 1998. Glavnica ima dospijeće 16. srpnja godine 2004. Obveznice su uvrštene na Frankfurtsku burzu vrijednosnica.

6) U ožujku godine 1998. Republika Hrvatska izašla je i na španjolsko tržište vrijednosnica, emisijom *obveznica u španjolskim pesetama*. Emitirano je obveznica u vrijednosti od ESP 15.000.000.000,00. Kamate na te obveznice su fiksne i iznose 6,50%, a plaćaju se godišnje. Prve kamate dospijevaju na naplatu 26. ožujka godine 1999., a glavnica će u cijelosti biti isplaćena 26. ožujka godine 2001.

Prilagodba modela i formiranje ulaznih podataka

U 4. točki zaključili smo da je cijena jedinične nul-kupon obveznice u vremenu t koja dospijeva u vremenu T dana izrazom (32):

$$P\big(t,T,r(t)\big)=A(t,T)e^{-r(t)B(t,T)},$$

gdje je

$$A(t,T)=\left\{\frac{\phi_1 e^{\phi_2(T-t)}}{\phi_2\left[e^{\phi_1(T-t)}-1\right]+\phi_1}\right\}^{\phi_3},$$

$$B(t,T)=\frac{e^{\phi_1(T-t)}-1}{\phi_2\left[e^{\phi_1(T-t)}-1\right]+\phi_1},$$

$$\phi_1=\quad(k+\lambda)^2+2\sigma^2\ ,\ \phi_2=\frac{k+\lambda+\phi_1}{2},\ \phi_3=\frac{2k\theta}{\sigma^2}.$$

Ali smo vidjeli da su u Hrvatskoj jedine nul-kupon obveznice blagajnički, odnosno trezorski zapisi, a sve su ostale obveznice s kuponskom isplatom kamata. Najčešće je takva situacija i u drugim zemljama. No, i obveznice s kuponom možemo vrednovati uz pomoć ovoga modela, promatramo li svaku od njih kao portfolio diskontiranih budućih isplata. Promatramo, dakle, klasičnu obveznicu koja imaocu obveznice garantira određeni broj preostalih isplata (periodičnih kamata i konačno nominalnog iznosa obveznice), kojih vrijednosti izražavamo vektorom C, a koje se moraju realizirati u točno određenim vremenima, koja ćemo pohraniti u vektor D. Vrijednost (cijena) takve obveznice u trenutku t sada je dana sljedećim izrazom:

$$V(t,C,D)=\sum_{d_i>t}c_i P(t,d_i,r). \tag{42}$$

Koristimo li se tim izrazom, nul-kupon obveznica može se prikazati kao obveznica s jednom preostalom isplatom koja se mora realizirati na datum dospijeća te obveznice. Promatrajući obveznice s kuponskom isplatom kamata kao portfolio diskontiranih budućih isplata, to jest koristeći se relacijom (42), na osnovi podataka o dugoročnim obveznicama Republike Hrvatske[15] i pregledom postignutih uvjeta na aukcijama blagajničkih i trezorskih zapisa (Prilog 1. i Prilog 2.), dolazimo do

[15] Izvor: Ministarstvo financija Republike Hrvatske, Odjel za javni dug.

ulaznih podataka za ocjenu parametara CIR modela. Preciznije, za dva datuma: 16. srpnja 1997. i 26. ožujka 1998. na osnovi spomenutih podataka dolazimo do 45, odnosno 39 opservacija o datumu dospijeća, o vremenu do dospijeća izraženom u godinama, o godišnjoj kamatnoj stopi i o cijeni državnih obveznica Republike Hrvatske s fiksnim prihodom (s fiksnom kamatnom stopom). Dobijeni ulazni podaci prikazani su u *Tablici* 1. i *Tablici* 2.

Tablica 1.

PODACI O VREMENU DOSPIJEĆA, O KAMATNOJ STOPI
I O CIJENI DRŽAVNIH OBVEZNICA NA DATUM 16. SRPNJA 1997.

Redni broj opservacije	*Datum dospijeća*	*Vrijeme do dospijeća izraženo u godinama*	*Godišnja kamatna stopa (u %)*	*Cijena*
1.	30. 07. 1997.	0,03836	7,00	0,99741
2.	30. 07. 1997.	0,03836	8,50	0,99688
3.	31. 07. 1997.	0,04110	10,95	0,99574
4.	13. 08. 1997.	0,07671	7,00	0,99482
5.	20. 08. 1997.	0,09589	7,00	0,99353
6.	21. 08. 1997.	0,09863	9,00	0,99154
7.	27. 08.1997.	0,11507	7,00	0,99224
8.	01. 09. 1997.	0,12877	12,00	0,98551
9.	10. 09. 1997.	0,15342	8,50	0,98756
10.	11. 09. 1997.	0,15616	10,75	0,98418
11.	25. 09. 1997.	0,19452	10,15	0,98137
12.	01. 10. 1997.	0,21096	8,00	0,98390
13.	08. 10. 1997.	0,23014	8,50	0,98140
14.	15. 10. 1997.	0,24932	8,50	0,97987
15.	20. 11. 1997.	0,34795	11,25	0,96358
16.	18. 12. 1997.	0,42466	12,50	0,95121
17.	18. 12. 1997.	0,42466	11,25	0,95574
18.	15. 01. 1998.	0,50137	10,50	0,95117
19.	27. 02. 1998.	0,61918	7,00	0,95897
20.	01. 03. 1998.	0,62466	12,00	0,93166
21.	01. 04. 1998.	0,70959	8,00	0,94685
22.	18. 06. 1998.	0,92329	12,50	0,89696

Redni broj opservacije	*Datum dospijeća*	*Vrijeme do dospijeća izraženo u godinama*	*Godišnja kamatna stopa (u %)*	*Cijena*
23.	16. 07. 1998.	1,00000	6,125	0,94229
24.	27. 08. 1998.	1,11507	7,00	0,92733
25.	01. 09. 1998.	1,12877	12,00	0,87992
26.	01. 10. 1998.	1,21096	8,00	0,91101
27.	18. 12. 1998.	1,42466	12,50	0,84552
28.	27. 02. 1999.	1,61918	7,00	0,89624
29.	01. 03. 1999.	1,62466	12,00	0,83184
30.	01. 04. 1999.	1,70959	8,00	0,87672
31.	16. 07. 1999.	2,00000	6,125	0,88790
32.	27. 08. 1999.	2,11507	7,00	0,86666
33.	01. 09. 1999.	2,12877	12,00	0,78564
34.	01. 10. 1999.	2,21096	8,00	0,84353
35.	27. 02. 2000.	2,61918	7,00	0,83760
36.	16. 07. 2000.	3,00000	6,125	0,83666
37.	27. 08. 2000.	3,11507	7,00	0,80997
38.	27. 02. 2001.	3,61918	7,00	0,78281
39.	16. 07. 2001.	4,00000	6,125	0,78837
40.	27. 08. 2001.	4,11507	7,00	0,75698
41.	27. 02. 2002.	4,61918	7,00	0,73160
42.	16. 07. 2002.	5,00000	6,125	0,74287
43.	27. 08. 2002.	5,11507	7,00	0,70746
44.	16. 07. 2003.	6,00000	6,125	0,69999
45.	16. 07. 2004.	7,00000	6,125	0,65959

Izvor: Ministarstvo financija Republike Hrvatske, Odjel za javni dug i izračun autora.

Tablica 2.

PODACI O VREMENU DOSPIJEĆA, O KAMATNOJ STOPI I O CIJENI DRŽAVNIH OBVEZNICA NA DATUM 26. OŽUJKA 1998.

Redni broj opservacije	*Datum dospijeća*	*Vrijeme do dospijeća izraženo u godinama*	*Godišnja kamatna stopa (u %)*	*Cijena*
1.	1. 4. 1998.	0,01370	8,00	0,99895
2.	8. 4. 1998.	0,03562	9,00	0,99694
3.	8. 4. 1998.	0,03562	9,77	0,99669
4.	15. 4. 1998.	0,05479	8,49	0,99555
5.	15. 4. 1998.	0,05479	10,00	0,99479
6.	16. 4. 1998.	0,05753	8,90	0,99511
7.	16. 4. 1998.	0,05753	10,25	0,99440
8.	29. 4. 1998.	0,09315	9,00	0,99200
9.	29. 4. 1998.	0,09315	10,00	0,99116
10.	30. 4. 1998.	0,09589	9,90	0,99099
11.	13. 5. 1998.	0,13151	10,00	0,98754
12.	14. 5. 1998.	0,13425	9,90	0,98741
13.	27. 5. 1998.	0,16986	9,50	0,98470
14.	27. 5. 1998.	0,16986	10,00	0,98394
15.	10. 6. 1998.	0,20822	10,00	0,98035
16.	10. 6. 1998.	0,20822	9,50	0,98128
17.	17. 6. 1998.	0,22740	10,00	0,97856
18.	18. 6. 1998.	0,23014	12,50	0,97326
19.	8. 7. 1998.	0,28493	10,00	0,97321
20.	16. 7. 1998.	0,30685	6,125	0,98192
21.	29. 7. 1998.	0,34247	9,50	0,96940
22.	18. 8. 1998.	0,39726	10,40	0,96146
23.	1. 9. 1998.	0,43562	12,00	0,95183
24.	9. 9. 1998.	0,45735	10,00	0,95733
25.	1. 10. 1998.	0,51781	8,00	0,96093
26.	18. 12. 1998.	0,73151	12,50	0,91745
27.	1. 3. 1999.	0,93151	12,00	0,89981
28.	26. 3. 1999.	1,00000	6,50	0,93897
29.	1. 4. 1999.	1,01370	8,00	0,92495
30.	16. 7. 1999.	1,30685	6,125	0,92525

Redni broj opservacije	*Datum dospijeća*	*Vrijeme do dospijeća izraženo u godinama*	*Godišnja kamatna stopa (u %)*	*Cijena*
31.	1. 9. 1999.	1,43562	12,00	0,84985
32.	1. 10. 1999.	1,51781	8,00	0,88975
33.	26. 3. 2000.	2,00000	6,50	0,88166
34.	16. 7. 2000.	2,30685	6,125	0,87185
35.	26. 3. 2001.	3,00000	6,50	0,82785
36.	16. 7. 2001.	3,30685	6,125	0,82153
37.	16. 7. 2002.	4,30685	6,125	0,77412
38.	16. 7. 2003.	5,30685	6,125	0,72944
39.	16. 7. 2003.	6,30685	6,125	0,68734

Izvor: Ministarstvo financija Republike Hrvatske, Odjel za javni dug i izračun autora.

Rezultati

Ocjena parametara

Primjena CIR modela, odnosno jednadžbi (32)-(35):

$$P\big(t,T,r(t)\big) = A(t,T)e^{-r(t)B(t,T)},$$

$$A(t,T) = \left\{ \frac{\phi_1 e^{\phi_2 (T-t)}}{\phi_2\left[e^{\phi_1(T-t)} - 1\right] + \phi_1} \right\}^{\phi_3},$$

$$B(t,T) = \frac{e^{\phi_1(T-t)} - 1}{\phi_2\left[e^{\phi_1(T-t)} - 1\right] + \phi_1},$$

$$\phi_1 = \quad (k+\lambda)^2 + 2\sigma^2 \ , \ \phi_2 = \frac{k+\lambda+\phi_1}{2}, \ \phi_3 = \frac{2k\theta}{\sigma^2},$$

zahtijeva ocjenu parametara k, θ i σ. Različiti autori primjenjuju različite metode u ocjeni tih parametara. Neki se autori koriste podacima vremenskih nizova, a neki podacima vremenskog presjeka. Izdvaja se metoda koju, na iskustvima drugih autora, razvijaju i primjenjuju dvojica talijanskih autora (vidjeti [De Felice, 1993]), a u kojoj se koriste podacima vremenskog presjeka i vremenskih nizova zajedno. No, doista mlado hrvatsko tržište državnih vrijednosnica ne omogućuje nam korištenje vremenskih nizova podataka, odnosno ne postoji dovoljno dugo razdoblje kvalitetnih podataka. Stoga smo se odlučili na ocjenu parametara, služeći se podacima vremenskog presjeka, i to koristeći se metodom koju primjerice 1989. u radu (Castellani, 1989) koriste Castellani, De Felice i Moriconi, zatim Brown i Dybvig godine 1986. u radu (Brown, 1986) i Moriconi u radu (Moriconi, 1991). Riječ je o jednoj od *metoda maksimalne vjerodostojnosti,* gdje se za procijenjene parametre uzimaju oni koji u jednadžbi

$$P(t,T,r(t)) = A(t,T)e^{-r(t)B(t,T)}$$

najbolje "podržavaju" odnos cijene i vremena dospijeća svih opservacija. Nažalost, budući da je riječ o izuzetno složenoj jednadžbi (naravno uzimamo u obzir i jednadžbe (33)-(35)), nije bilo moguće postići da se ocijene parametri k, θ i σ, pa su ocijenjeni parametri ϕ_1, ϕ_2 *i* ϕ_3, i kratkoročna kamatna stopa $r(t)$.

Na osnovi podataka danih u *Tablici* 1. za datum 16. srpnja 1997., odnosno u *Tablici* 2. za datum 26. ožujka 1998., koristeći se statističkim paketom *STATISTICA, Version* 5.0 iz godine 1995., firme *StatSoft, Inc.,* i to *Rosenbrock pattern search* metodom, dolazimo do sljedećih ocjena parametara.

Za datum 16. 7. 1997. dobijene su sljedeće vrijednosti parametara:

$$\phi_1 = 0.251444,$$
$$\phi_2 = 0.250254,$$
$$\phi_3 = 19.72783,$$
$$r = 0.093376\ .$$

Prema jednadžbama (38) i (41) sada lako možemo izračunati dugoročnu kamatnu stopu i varijancu osnovnog procesa promjene kratkoročne kamatne stope:

$$R_\infty = 0.02348,$$
$$\sigma^2 = 0.000596.$$

Za datum 26. 3. 1998. dobijene su sljedeće vrijednosti parametara:

$$\phi_1 = 0.250914,$$
$$\phi_2 = 0.250559,$$
$$\phi_3 = 20.1707,$$
$$r = 0.093491$$

i pripadajuće vrijednosti dugoročne kamatne stope i varijance:

$$R_\infty = 0.00716,$$
$$\sigma^2 = 0.000178.$$

Od dobijenih vrijednosti posebno je zanimljiv, ili bolje reći, neobičan rezultat za dugoročnu kamatnu stopu R_∞,vrijednost koje je izuzetno mala u oba slučaja. Tako male dugoročne kamatne stope ukazuju na padajuće krivulje stope prihoda, odnosno na smanjenje kamatnih stopa s porastom vremena dospijeća.

Prognoza vremenske strukture kamatnih stopa

Dobijene vrijednosti parametara uvrstimo u jednadžbe (32)-(35) i za proizvoljno odabrano vrijeme dospijeća izračunamo vrijednost, odnosno cijenu nul-kupon obveznice ili bilo kojeg vrijednosnog papira osjetljivog na promjenu kratkoročne kamatne stope, kod kojeg nema isplate kamata, odnosno prihoda, prije vremena dospijeća. Izračunane vrijednosti cijene uvrstimo zatim u jednadžbu (1):

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t},$$

pa za svako vrijeme dospijeća lako izračunamo pripadajuću stopu prihoda.

Za oba datuma izračunali smo cijene i kamatne stope po kvartalima za vrijeme od narednih pet godina i po polugodištima za vrijeme od narednih osam godina. Rezultati su dani u tablicama 3-6.

Kao što se dalo naslutiti prema vrijednostima dugoročne kamatne stope, dobili smo da se kamatne stope *R(t,T,r)* smanjuju s porastom vremena dospijeća.

Prema rezultatima danima u tablicama nacrtali smo odgovarajuće krivulje stope prihoda. Dobili smo, dakle, da su pripadajuće krivulje padajućeg oblika, to jest riječ je o tzv. inverznim krivuljama stope prihoda (*Slika* 6-*Slika* 9).

Tablica 3.

REZULTIRAJUĆE VRIJEDNOSTI CIJENE I KAMATNIH STOPA IZRAČUNANIH KVARTALNO ZA VRIJEME OD PET GODINA ZA DATUM 16. 7. 1997.

(prema ocijenjenim parametrima: $\phi_1 = 0.251444$, $\phi_2 = 0.250254$, $\phi_3 = 19.72783$, $r = 0.093376$*)*

Vrijeme dospijeća izraženo u kvartalima	***Cijena***	***Kamatna stopa***
1	0.97745	0.09125
2	0.95638	0.08920
3	0.93666	0.08724
4	0.91818	0.08536
5	0.90084	0.08355
6	0.88452	0.08181
7	0.86915	0.08014
8	0.85465	0.07853
9	0.84095	0.07699
10	0.82799	0.07550
11	0.81570	0.07408
12	0.80404	0.07270
13	0.79295	0.07138
14	0.78240	0.07011
15	0.77234	0.06889
16	0.76274	0.06771
17	0.75356	0.06658
18	0.74477	0.06548
19	0.73635	0.06443
20	0.72827	0.06342

Izvor: Izračun autora.

Tablica 4.

REZULTIRAJUĆE VRIJEDNOSTI CIJENE I KAMATNIH STOPA IZRAČUNANIH KVARTALNO ZA VRIJEME OD PET GODINA ZA DATUM 26. 3. 1998.

(prema ocijenjenim parametrima: $\phi_1 = 0.250914$, $\phi_2 = 0.250559$, $\phi_3 = 20.1707$, $r = 0.093491$*)*

Vrijeme dospijeća izraženo u kvartalima	***Cijena***	***Kamatna stopa***
1	0.97754	0.09086
2	0.95681	0.08830
3	0.93763	0.08587
4	0.91986	0.08353
5	0.90338	0.08129
6	0.88807	0.07914
7	0.87383	0.07707
8	0.86057	0.07508
9	0.84821	0.07317
10	0.83667	0.07133
11	0.82588	0.06957
12	0.81578	0.06787
13	0.80633	0.06623
14	0.79746	0.06466
15	0.78913	0.06315
16	0.78130	0.06170
17	0.78305	0.06030
18	0.76699	0.05895
19	0.76045	0.05765
20	0.75427	0.05640

Izvor: Izračun autora.

Tablica 5.

REZULTIRAJUĆE VRIJEDNOSTI CIJENE I KAMATNIH STOPA IZRAČUNANIH POLUGODIŠNJE ZA VRIJEME OD OSAM GODINA ZA DATUM 16. 7. 1997.

(*prema ocijenjenim parametrima:* $\phi_1 = 0.251444$, $\phi_2 = 0.250254$, $\phi_3 = 19.72783$, $r = 0.093376$)

Vrijeme dospijeća izraženo u polugodištima	***Cijena***	***Kamatna stopa***
1	0.95638	0.08920
2	0.91818	0.08536
3	0.88452	0.08181
4	0.85461	0.07853
5	0.82799	0.07550
6	0.80404	0.07270
7	0.78240	0.07011
8	0.76274	0.06771
9	0.74477	0.06548
10	0.72827	0.06342
11	0.71302	0.06150
12	0.69887	0.05972
13	0.68567	0.05806
14	0.67330	0.05651
15	0.66166	0.05507
16	0.65066	0.05372

Izvor: Izračun autora.

Tablica 6.

REZULTIRAJUĆE VRIJEDNOSTI CIJENE I KAMATNIH STOPA IZRAČUNANIH POLUGODIŠNJE ZA VRIJEME OD OSAM GODINA ZA DATUM 26. 3. 1998.

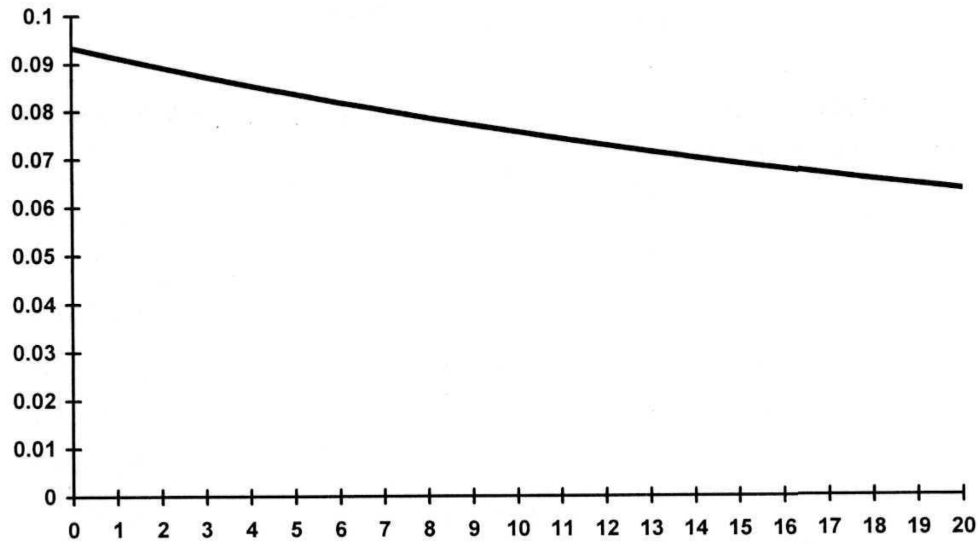
(*prema ocijenjenim parametrima:* $\phi_1 = 0.250914$, $\phi_2 = 0.250559$, $\phi_3 = 20.1707$, $r = 0.093491$)

Vrijeme dospijeća izraženo u polugodištima	***Cijena***	***Kamatna stopa***
1	0.95681	0.08830
2	0.91986	0.08353
3	0.88807	0.07914
4	0.86057	0.07508
5	0.83667	0.07133
6	0.81578	0.06787
7	0.79746	0.06466
8	0.78130	0.06170
9	0.76699	0.05895
10	0.75427	0.05640
11	0.74292	0.05403
12	0.73272	0.05183
13	0.72355	0.04978
14	0.71525	0.04787
15	0.70771	0.04610
16	0.70082	0.04444

Izvor: Izračun autora.

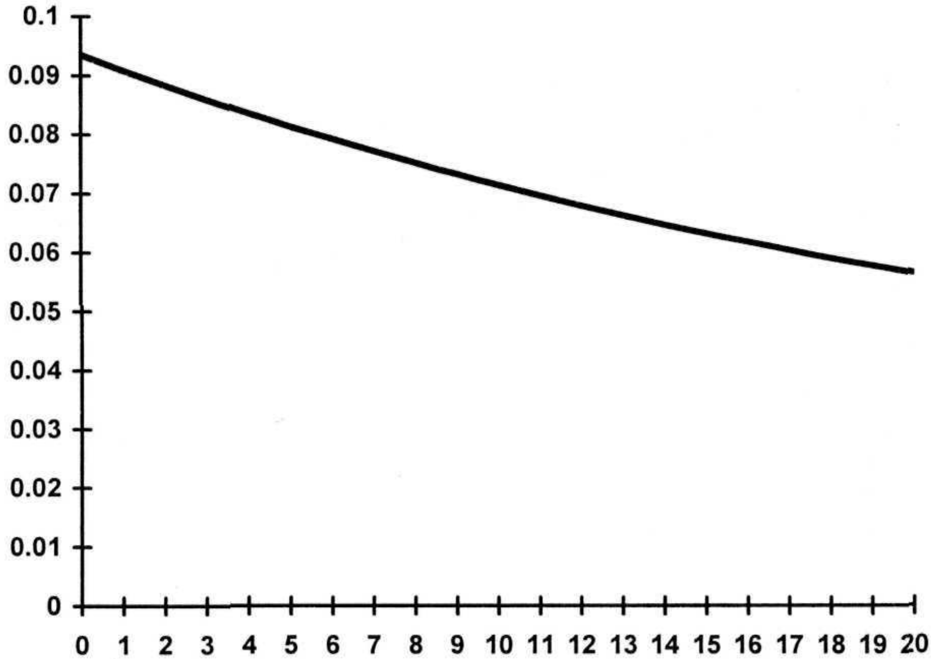
Slika 1.

PROCIJENJENA KRIVULJA STOPE PRIHODA NA DAN 16. 7. 1997.
ZA VRIJEME OD PET GODINA
(Na osi apscisa vrijeme dospijeća izraženo u kvartalima.)



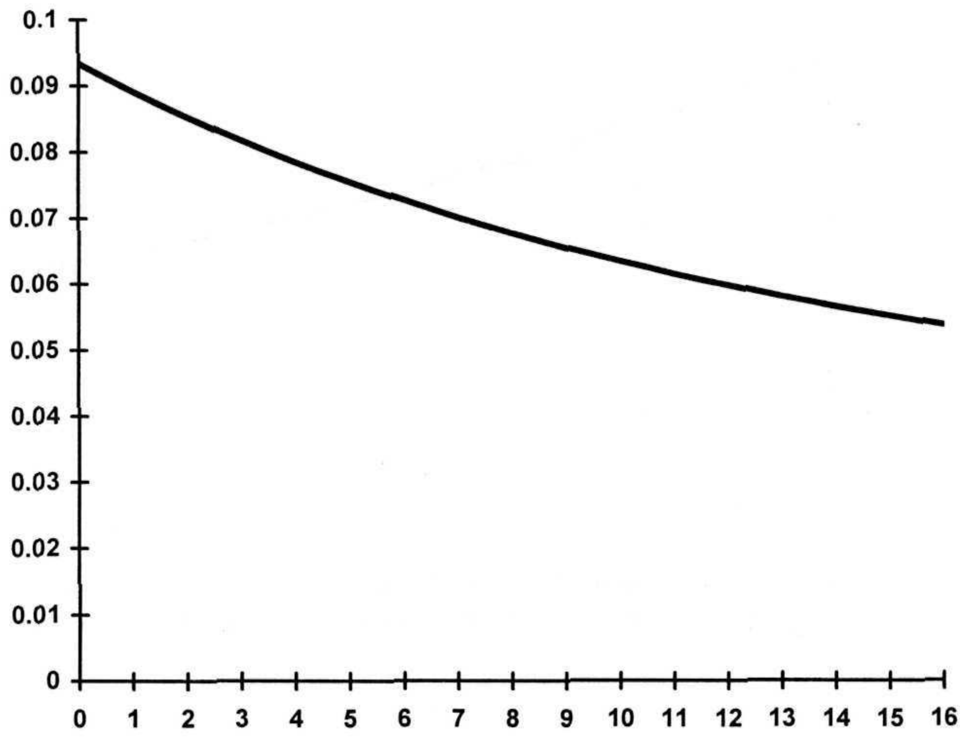
Slika 2.

PROCIJENJENA KRIVULJA STOPE PRIHODA NA DAN 26. 3. 1998.
ZA VRIJEME OD PET GODINA
(Na osi apscisa vrijeme dospijeća izraženo u kvartalima.)



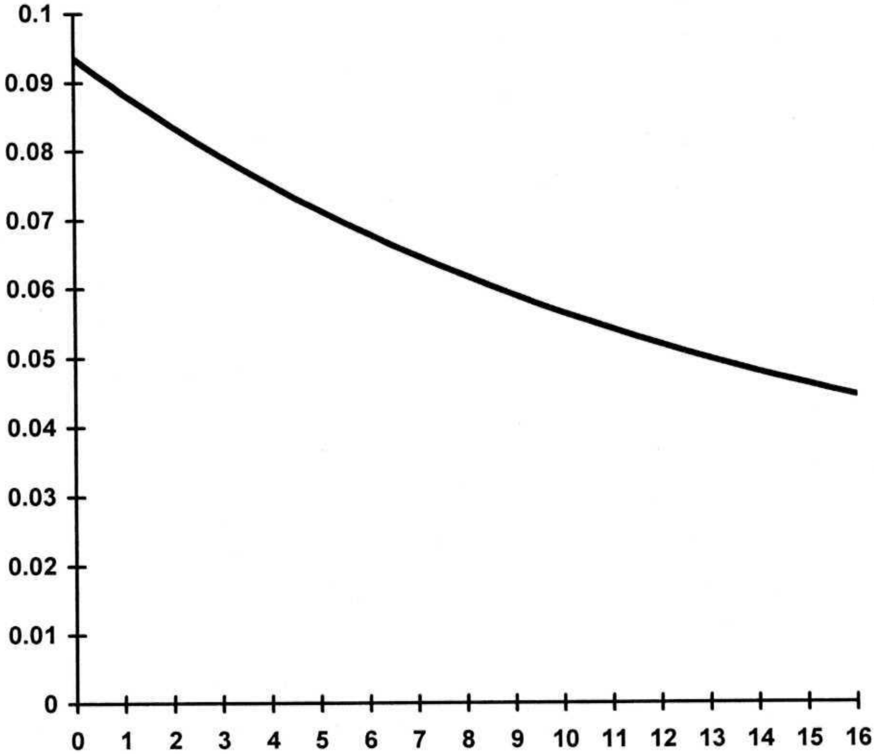
Slika 3.

PROCIJENJENA KRIVULJA STOPE PRIHODA NA DAN 16. 7. 1997.
ZA VRIJEME OD OSAM GODINA
(Na osi apscisa vrijeme dospijeća izraženo u polugodištima.)



Slika 4.

PROCIJENJENA KRIVULJA STOPE PRIHODA NA DAN 26. 3. 1998.
ZA VRIJEME OD OSAM GODINA
(Na osi apscisa vrijeme dospijeća izraženo u polugodištima.)



Za oba se datuma, dakle, kamatne stope smanjuju s vremenom dospijeća. To je smanjenje izraženije za datum 26. 3. 1998. S tako malim kamatnim stopama, vrijednost kojih se s vremenom smanjuje, bilo bi besmisleno raditi procjenu za vrijeme dulje od osam godina.

Što se tiče dobijenih vrijednosti dugoročne kamatne stope, one nam, zapravo, nisu granica, kao što je to inače slučaj. Jasno je da se ulaganja neće vršiti ni u slučaju mnogo većih vrijednosti kamatne stope, a osobito ne za vrijednosti kamatne stope koje su bliske vrijednostima R_∞=2,348% ili čak R_∞ = 0,716%!

Dakle, zanimljive su samo kratkoročne kamatne stope, odnosno postoji interes za vezivanje sredstava samo na kratak rok.

U mnogobrojnim su dosadašnjim primjerima primjene ovoga modela u zemljama razvijenog financijskog tržišta rijetki rezultati s padajućom krivuljom stope prihoda. Franco Moriconi, primjerice, u radu (Moriconi, 1991), služeći se jednofaktorskim CIR modelom i također podacima za vremenski presjek, procjenjuje krivulju stope prihoda za svaki tjedan u vremenu od 9. siječnja 1990. do 21. srpnja 1992., za talijansko tržište državnih obveznica. Svakog se tjedna kamatne stope prognoziraju za vrijeme od narednih šest godina. Do svršetka 1990. rezultirajuće krivulje stope prihoda rastućeg su oblika, ravnog su oblika u tijeku godine 1991., od siječnja godine 1992. padajućeg su oblika. Inverzni oblik krivulje stope prihoda događa se pred ekonomsku recesiju u Italiji i dobro odražava stanje nestabilnosti i veliku krizu povjerenja. Naime, pojavljuje se sumnja u bezrizičnost državnih obveznica. Rizik da država ne vraća posuđena sredstva nije, doduše, uključen u naš model, ali je vjerojatno da se racionalnim očekivanjima uključuje u formiranje tržišnih kamatnih stopa i na taj se način odražava u rezultirajućim krivuljama stopa prihoda.

Ako bismo to iskustvo prenijeli na naš slučaj, mogli bismo zaključiti da u Hrvatskoj još uvijek ne postoji sigurnost kada se radi o dugoročnijem vezivanju sredstava i da je, nažalost, trend padajućih kamatnih stopa još izraženiji za kasniji datum, 26. 3. 1998. Naime, kamatne stope za narednih pet godina na dan 16. 7. 1997. kreću se u rasponu vrijednosti od 9,338% do 6,342%, a za datum 26. 3. 1998. one se kreću u rasponu od 9,349% do 5,640%.

Što se tiče nagovještaja ekonomske recesije krivuljom stope prihoda, ne bismo htjeli povjerovati u buduće još lošije stanje u nezaposlenosti, proizvodnji i u gospodarskim investicijama u Hrvatskoj. No, premda smo ovu analizu radili na osnovi podataka iz godina 1997. i 1998., stvarnost je u proljeće 1999. u skladu s iznesenim prognozama.

Postavlja se pitanje valjanosti usporedbe rezultata dobijenih za talijansko i hrvatsko tržište državnih vrijednosnica. Isti je model kojim se koristi, ista je metoda za ocjenu parametara, ali je velika razlika u kvaliteti korištenih podataka. Talijansko tržište državnih vrijednosnica veoma je raznovrsno i za svaki je datum "bogato" doista širokim spektrom različitih vremena dospijeća. Promatraju se cijene i kamatne stope na sekundarnom tržištu, za koje je karakteristična izrazito visoka frekvencija trgovanja državnim vrijednosnicama. Svi potrebni podaci dobro se prate i bilježe, pa su lako dostupni.

Podaci koji su korišteni u ovome radu jesu cijene i kamatne stope na primarnome tržištu, jer drugi, zapravo, i ne postoje (osim za obveznice Serije JDA i JDB kojima se trguje na Zagrebačkoj burzi i doista su jedne od najlikvidnijih vrijednosnih papira). Što se tiče blagajničkih i trezorskih zapisa, njihove bismo cijene, odnosno pripadajuće kamatne stope, možda mogli smatrati "tržišnima", jer se one utvrđuju na aukcijama na osnovi odnosa ponude i potražnje. Ipak, ostaje činjenica da bi mnogo mjerodavniji bili podaci, to jest cijene i kamatne stope ostvarene na sekundarnom tržištu.

Rezultat dobijen na osnovi takvih podataka, i to uz manji broj opservacija za svaki datum (manji broj različitih vremena dospijeća) nego u "talijanskom slučaju", može biti upitan.

Stoga bismo ponajprije poželjeli bogatiju i raznovrsniju ponudu državnih vrijednosnica za kojima postoji velika potražnja i kojima se intenzivno trguje na sekundarnom tržištu, a zatim redovito praćenje i bilježenje za izloženu analizu potrebnih podataka. Ti bi podaci, naravno, morali biti lako dostupni, što bi ukazivalo na postojanje zanimanja za rezultate ovoga tipa. Do toga vremena, nadamo se, da ovaj rad može biti barem dobar primjer primjene jednofaktorskih difuzijskih modela vremenske strukture.

LITERATURA

1. Arnold L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons
2. Bannock G., Manser W. (1974). *Dictionary of Finance*. London: Penguin Books Ltd.
3. Benninga S. (1974). *Financial Modeling*. London: The MIT Press
4. Bianchi C., Cesari R., Panattoni L. (1994). "Alternative Estimators of the Cox, Ingersoll and Ross Model of the Term Structure of Interest Rates: A Monte Carlo Comparison". U: *Temi di discussione del Servizio Studi*, 11
5. Black F., Scholes M. (1973). "The pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, (81), 3: 637-654
6. Brown J.S., Dybvig P.H. (1986) "The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, (41), 3: 617-630

7. Cakici N., Chatterjee S. (1993). "Market discipline, bank subordinated debt, and interest rate uncertainty", *Journal of Banking and Finance*, 17: 747-762
8. Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (1989). "Price and Risk of Variable Rate Bonds: An Application of the Cox, Ingersoll, Ross Model to Italian Treasury Credit Certificates", Research Group on "Models of the Term Structutre of Interest Rates", Working paper n.1
9. Cecchetti S.G. (1988). "The Case of the Negative Nominal Interest Rates: New Estimates of the Term Structure of Interest Rates during the Great Depression", *Journal of Political Economy*, (96), 6: 1111-1141
10. Cesari R. (1992). "Diffusion Processes in Financial Economics: The Case of the Term Structure of Interest Rates".U: Wolfgang Runggaldier (ur.), *Stochastic Processes: Applications in Mathematical Economics-Finance*, Proceedings of the 15th Course of the International School of Mathematics "G. Stampacchia", Erice-Sicily, 5-16
11. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. (1981). "A Reexamination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, (36), 4: 769-799
12. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. (1985). "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, (53), 2: 363-384
13. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, (53), 2: 385-407
14. De Felice M., Moriconi F. (1991) "Uno schema per la valutazione e la gestione di titoli del debito pubblico", *Ricerche applicate e modelli per la politica economica*, Banca d'Italia
15. De Felice M., Moriconi F., Salvemini M.T. (1993). "Italian Treasury Credit Certificates (CCTs): Theory, Practice and Quirks", *Banca Nazionale del Lavoro Quarterly Review*, 185: 127-168
16. De Felice M. (1994). "Immunization Theory: An Actuarial Perspective on Asset-Liability Management", U: G. Ottaviani (ur.), *Financial risk in Insurance*. Berlin: Springer-Verlag, 63-85
17. Dieffenbach B.C. (1975). "A Quantitative Theory of Risk Premiums on Securities with an Application to the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, (43), 243-269
18. Dobson S., Sutch R., Vanderford D. (1976). "An Evaluation of Alternative Empirical Models of the Term Structure of interest Rates", *Journal of Finance*, (31), 4: 1035-1065
19. Dothan L. U. (1978). "On the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, (6), 1: 59-69

20. Dua P. (1991). "Survey Evidence on the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Economics and Business*, 43: 133-142
21. Friedman A. (1975). *Stochastic Differential Equations and Applications*. New York: Academic press
22. Gibson R. (1991). *Option Valuation, Analyzing and Pricing Standardized Option Contracts*. New York: McGraw-Hill
23. Gregory A. W., Voss G. M. (1991). "The term structure of interest rates: departures from time-separable expected utility", *Canadian Journal of Economics,* (24), 4: 265-289
24. Johnson H. J. (1993). *Financial Institutions and Markets: A Global Perspective*. New York: McGraw-Hill
25. Katz E., Prisman E. Z. (1991). "Arbitrage, Clientele Effects, and the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (26), 4: 435-443
26. Kohn M. (1994). *Financial Institutions and Markets*. New York: Mc Graw-Hill
27. Lamberton D., Lapeyre B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. London: Chapman & Hall
28. Lee B. S. (1991). "Government deficits and the term structure of interest rates", *Journal of Monetary Economics*, (27)
29. Leko V., Mates N. (ur.) (1993). *Rječnik bankarstva i financija*. Zagreb: Masmedia
30. Long J. B. (1974). "Stock Prices, Inflation, and the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, (1)
31. Longstaff F. A. (1989). "A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, (23), 2: 195-224
32. Longstaff F. A. (1990). "Time Varying Term Premia and Traditional Hypotheses about the Term Structure", *Journal of Finance*, (45), 4: 1307-1314
33. Malliaris A. G., Brock W. A. (1988). *Stochastic Methods in Economics and Finance*, Advanced Textbooks in Economics, Vol. 17. Amsterdam: North-Holland
34. Marsh T. A., Rosenfeld E. R. (1983). "Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium bond Prices", *Journal of Finance*, (38), 2: 635-646
35. Moriconi F. (1991). "Analyzing Default-Free Bond Markets by Diffusion Models", U: G.Ottaviani (ur..): *Financial Risk in Insurance*. Berlin: Springer-Verlag, 25-46

36. Moriconi F. (1992). "Applying the Cox, Ingersoll and Ross Model to the Italian Treasury Bond Market". U: Wolfgang Runggaldier (ur.): *Stochastic Processes: Applications in Mathematical Economics-Finance, Proceedings of the 15th Course of the International School of Mathematics "G.Stampacchia*", Erice-Sicily, 45-48
37. Pauše Ž. (1974). *Vjerojatnost. Informacija. Stohastički procesi*. Zagreb: Školska knjiga
38. Prohaska Z. (1994). *Upravljanje vrijednosnim papirima*. Zagreb: Poslovna knjiga, Infoinvest
39. Richard S. F. (1978). "An arbitrage model of the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, (6), 1: 33-57
40. Ritter L. S., Silber (1991). *Principles of Money, Banking, and Financial Markets*. New York: Basic Books
41. Roll R. (1971). "Investment Diversification and Bond Maturitiy", *Journal of Finance*, (26), 51-66
42. Samuelson P. A., Nordhaus W.D. (1992). *Ekonomija*. Zagreb: MATE
43. Talay D. (1992). "Statistics for an Interest Rate Model". U: Wolfgang Runggaldier (ur.): *Stochastic Processes: Applications in Mathematical Economics-Finance, Proceedings of the 15th Course of the International School of Mathematics "G.Stampacchia"*, Erice-Sicily
44. Talay D. (1995). "*Simulation of Stochastic Differential Systems*", Reprint of Chapter 3 in "Probabilistic Methods in Applied Physics", P.Kree and W.Wedig (ur.), Lecture Notes in Physics 451, Berlin: Springer-Verlag. 63-105
45. Van Horne J.C. (1993). *Financijsko upravljanje i politika (Financijski menedžment)*. Zagreb: MATE
46. Vasicek O. (1977). "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, (5), 2: 177-188

THE CIR MODEL AND ITS APPLICATION TO GOVERNMENT SECURITIES OF THE REPUBLIC OF CROATIA

Summary

The term structure of interest rates has a long history of traditional theories. It is important to economists because the relationship among interest rates on default free securities that differ in their term to maturity, reflects the information available to the market about the future course of events. The spread of inherently risky instruments (variable rate securities and options) in the seventies, posed critical questions for traditional theories, based on the hypotheses of certainty, and gave rise to a golden decade of revolution in the methods of financial analysis on the basis of probability theory. In this paper we present the basic new term structure model as one of the key products of this golden decade. It was developed in this framework: continuous time, perfect and frictionless markets, diffusion processes, no-arbitrage condition i.e. prices constrained by the hypotheses that equivalent assets (or portfolios) in terms of cash flows and other characteristics must earn the same return. We also show how Cox, Ingersoll and Ross specialize the basic model.

The CIR model is then used to extract the term structure of interest rates from observed prices of (fixed rate) Croatian Government bonds. We assume, as the model requires, that the risk of default can be ignored. The parameters of the model and the spot rate value are estimated using cross-sections of prices for two dates in 1997 and 1998. The resulting yield curves, corresponding to the estimated parameters, are the so-called inverse yield curves, for both dates.

In many examples of the CIR model application in the countries with developed financial markets, it is rather rare to find the results with falling yield curve. If there is such a result, it may forecast the economic recession and reflect the existing state of instability.

The results in the present study show that in Croatia interest rates decrease with maturity for both chosen dates, indicating that long term investment is not favourable. The trend of falling interest rates is even more pronounced for the later date.

It is also important to emphasize that there is a significant difference between our results and the results of similar research in countries with long tradition of developed financial markets. Although the used model is the same, as well as the method for parameters estimation, there is a difference between the quality of data. While in those countries the observed prices and interest rates were taken from very frequent and liquid secondary markets, we had to use the data from primary market, because the data on secondary markets were very scarce.