*Anton Glavinić**

UDK 330.42 (497.5)
Izvorni znanstveni rad

IZRADA DINAMIČKOG MATEMATIČKOG MODELA U ANALIZI EKONOMSKIH PROCESA

U ovome je radu prikazan kvantitativni postupak u analizi međuovisnosti i povezanosti veličina u gospodarstvu primjenom dinamičkog matematičkog modela. Za izradu takvog modela primjenjuje se diferencijalna jednadžba prvoga reda, rješenje koje će biti izvedeno metodom konačnih razlika. Primjena te metode omogućuje formiranje sustava linearnih jednadžbi, koji može biti prikazan u matričnom obliku. Na taj je način izražen polazni oblik dinamičkog matematičkog modela.

Razvitak računalne tehnologije omogućuje sve širu primjenu matematičkih metoda i modela u analizi gospodarstva. Njihovom se primjenom osobito može obaviti analiza složenih i dinamičkih odnosa međuovisnosti i funkcionalnog povezivanja veličina u gospodarskom sustavu. Takav način analize potiče u gospodarskom sustavu cirkulaciju optimalnih tokova prijeko potrebnih za skladno programiranje razvitka.

Kvantitativnu analizu odnosa između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP) Republike Hrvatske autor prikazuje matematičkim metodama i modelima. Njihova primjena omogućuje utvrđivanje optimalnih rješenja. Postignuta rješenja osiguravaju trajnu ravnotežu i stabilnost ekonomskog sustava i pridonose bržem gospodarskom razvitku.

---

* Anton Glavinić, dr. sc., Fakultet ekonomije i turizma "Dr. Mijo Mirković", Pula. Članak primljen u uredništvo: 14. 4. 2003.

Uvod

Izgradnja stabilnog i optimalnog razvitka gospodarstva i poslovanja u uvjetima primjene novih računalnih i komunikacijskih tehnologija kao poluge bržeg ekonomskog i društvenog razvitka ostvaruje se razvijanjem metoda i modela upravljanja.

Djelotvorno upravljanje složenim sustavima, kao što su ekonomski i poslovni, ostvaruje se uspješno uz pomoć kvantitativnih metoda, a posebno matematičkim metodama i modelima. Tim se matematičkim metodama i modelima utvrđuje – kvantificira međuovisnost između gospodarskih veličina i ispituju se struktura i složena kretanja u njihovoj dinamici. Odnosi između ekonomskih veličina koje stalno variraju mogu se, zahvaljujući brzom razvitku računalne tehnologije, svesti u određena optimalna rješenja. Stoga s razlogom uvodimo i primjenjujemo takve metode i modele, jer one omogućuju istraživanja, predviđanja daljeg razvitka gospodarstva, da bi se upravljanje prilagodilo takvim procesima i njihovim utjecajima.

Mnogi znanstveni i ekonomski problemi u složenim uvjetima mogu se opisati matematički uz pomoć diferencijalnih jednadžbi. Za praktičnu primjenu takvih jednadžbi prihvatljiva su samo efikasna rješenja. Takva rješenja diferencijalnih jednadžbi ostvaruju se primjenom brojčanih metoda.

U ovome će radu biti prikazano rješenje diferencijalne jednadžbe prvoga reda, metodom konačnih razlika. Tom se metodom dobiva sustav linearnih jednadžbi koji se može prikazati u matričnom obliku. Na taj je način izrađen dinamički matematički model kojim će biti analizirani odnosi između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP) Republike Hrvatske za razdoblje od godine 1994. do 1999. U tom su razdoblju korištena dva različita porezna sustava koji su imali značajan utjecaj na gospodarske tijekove, a posebno uvođenjem poreza na dodanu vrijednost (PDV). Da bi se omogućio dalji optimalni razvitak gospodarstva valja razraditi kvantitativne modele u analizi utvrđivanja dinamičke ravnoteže između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP) Republike Hrvatske.

Opća formulacija graničnog problema kod diferencijalnih jednadžbi prvoga reda

Metoda konačnih razlika

Osnovne su metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi: analitičke, grafičke i brojčane. Za određivanje rješenja graničnog problema[1] primjenjuju se brojčane metode. Jedna od metoda navodi se u literaturi kao metoda konačnih razlika. Karakteristika te metode sastoji se u tome što se svi izvodi u diferencijalnoj jednadžbi, pa i u graničnim uvjetima, približno određuju uz pomoć na odgovarajući način podijeljenih konačnih razlika u unaprijed definiranim točkama. Na takav se način obavlja supstitucija diferencijalne jednadžbe sustavom diferencijskih jednadžbi, pa dobivamo aproksimativno rješenje graničnog problema.[2] Ta će metoda biti prikazana na primjeru diferencijalne jednadžbe prvoga reda s graničnim uvjetima. Ako je dana diferencijalna jednadžba prvoga reda i uvjetovana u krajnjim točkama intervala [a, b], na kojem se traže rješenja, onda se interval [a, b] dijeli na N+1 jednakih[3] dijelova, a pripadajuća se dužina označuje sa h.

Uvode se oznake:

$x_0 = a$ $\qquad x_{N+1} = b$

1) $x_n = x_0 + nh \qquad n=1,2,3,\ldots N$

tako da je

2) $$h = \frac{b-a}{N+1}$$

i označuje se pripadajuće vrijednosti za y u tim točkama

3) $y_n = f(x_0 + nh) \quad n = 0,1,2,3,\ldots N+1$

Za formiranje određenog sustava linearnih jednadžbi svaki se izvod supstituira pripadajućom podijeljenom konačnom razlikom. Najviše se rabe centralne[4] konačne razlike, jer se tako postižu najbolja rješenja. Tako se može za pojedine aproksimacije izvoda u točki $x = x_n$ primijeniti formula

---

[1] Vidjeti : P.Pejović (1983), Numerička analiza II. deo Numeričke metode rešavanja jednačina, Naučna knjiga, Beograd, str.223.

[2] Ibidem, str. 223.

[3] Vidjeti : A.Bilimović Diferencijalne jednačine sa dopunama II. izdanje,Tehnička knjiga, Beograd,1966.,str.54.

[4] Vidjeti: P. Pejović: Numerička analiza II. deo Numeričke metode rešavanja jednačina,Naučna knjiga, Beograd, 1983., str.224.

4) $y'(x_n) \approx \dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$

Razmotrit će se linearna diferencijalna jednadžba prvoga reda oblika

5) $p(x)y' + r(x)y = f(x)$

a njezino će se rješenje potražiti na intervalu [a, b], gdje su p(x), r(x) i f(x) neprekidne funkcije za x ε [a, b].

Zadani su sljedeći granični uvjeti:

6) $y(a) = y_a$ *i* $y(b) = y_b$

Diferencijalna jednadžba (5) s graničnim uvjetima (6) ima jedinstveno rješenje na intervalu [a, b]. Ako se interval [a, b] podijeli na N+1 jednakih podintervala dužine h i potraži približna vrijednost y_n rješenja $y(x_n)$ u točkama

$x_n = a_0 + nh$ $n = 1, 2, 3, \ldots N$

prema (4) jednadžba (5) za $x = x_n$ postaje;

7) $p_n \dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + r_n y_n = f_n$

gdje je $p_n = p(x_n)$, $r_n = (x_n)$ i $f_n = f(x_n)$.

Prema graničnim uvjetima (6) za n = 0 i n = N+1 bit će

8) $y_0 = y_a$ *i* $y_{N+1} = y_b$

Sustav (7) može se prikazati u matričnom obliku, jer ima N linearnih jednadžbi, a N nepoznanicom y_1, y_2, …..y_N

9) $A \cdot \overset{*}{q} = \overset{*}{z}$

gdje su $\overset{*}{q}$ i $\overset{*}{z}$ vektori oblika,

10) $$\overset{*}{q} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{bmatrix}$$

11) $$\overset{*}{z} = \begin{bmatrix} f_1 \quad -\left(-\frac{p_1}{2h}\right)y_a \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \quad -\left(\frac{p_N}{2h}\right)y_b \end{bmatrix}$$

a A je tridijagonalna matrica reda N·N oblika

12) $$A = \begin{bmatrix} r_1 & \frac{p_1}{2h} & & & \\ -\frac{p_2}{2h} & r_2 & \frac{p_2}{2h} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & -\frac{p_N}{2h} & r_N & \frac{p_N}{2h} & \end{bmatrix}$$

Budući da je u ovom slučaju y_0 nepoznanica, sustav jednadžbi (7) potrebno je proširiti i na n = 0 i n = N+1.

Pa se za n = 0 dobiva:

13) $$p_0 \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + r_0 y_0 = f_0$$

Iz gornje jednadžbe potrebno je eliminirati y_{-1}. To će biti učinjeno tako da se postavi uvjet

14) $$y_0 - \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 1$$

Rješenje jednadžbe (14) po y_{-1}

15) $$2hy_0 - y_1 + y_{-1} = 2h$$

onda je

16) $$-y_{-1} = 2hy_0 - y_1 - 2h$$

Ako se sada izraz (16) uvrsti u izraz (13)

17) $$p_0 \frac{y_1 + 2hy_0 - y_1 - 2h}{2h} + r_0 y_0 = f_0$$

dobiva se

18) $$(p_0 + r_0) y_0 = f_0 + p_0$$

gdje su $p_0 = p(x_0)$ $r_0 = r(x_0)$ i $f_0 = f(x_0)$, pa se takav sustav linearnih jednadžbi može napisati u matričnom obliku;

19) $B \cdot q = z$

gdje su q i z vektori oblika

Napomena: Formule od red.br. 1. do red. br. 8. preuzete su iz rada P.Pejović : Numerička analiza II. deo Numeričke metode rešavanja jednačina, Naučna knjiga, Beograd, 1983., str.223. i 224. i 225.

20)
$$q=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \\ y_{N+1} \end{bmatrix}$$

21)
$$z=\begin{bmatrix} f_0+(p_0) \\ f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \\ f_{N+1}+\left(-\dfrac{p_{N+1}}{2h}\right) \end{bmatrix}$$

Iz izraza (18) vidi se da je matrica B također tridijagonalna, pa se tako stvoreni sustav linearnih jednadžbi može prikazati u matričnom obliku.

Ovdje je q oznaka za veličine prihoda državnog proračuna, a z za veličine bruto domaćeg proizvoda (BDP).

Opća formulacija utvrđivanja upravno proporcionalnih odnosa između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP)

U predhodnim dijelovima ovoga rada razrađen je kvantitativni model u analizi međuovisnosti između povezanih veličina u gospodarstvu. Takvim se modelom omogućuje rješavanje složenih problema u gospodarstvu kao i predviđanja dinamike kretanja.

Napomena: Formule od red.br.9 do red.br.21 rezultat su osobnog izvoda i dio su dinamičkog matematičkog modela.

Za razvitak gospodarstva važno je utvrditi upravno proporcionalne odnose između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP). Takvi odnosi između navedenih veličina omogućuju gospodarstvu povoljne uvjete (veće investicije) za brži razvitak. Zato te odnose valja i kvantitativno razmotriti. U ovim se razmatranjima polazi od udjela prihoda državnog proračuna u bruto domaćem proizvodu (BDP) u analiziranom vremenskome razdoblju. Dalje, za utvrđivanje udjela državnog proračuna u bruto domaćem proizvodu (BDP) izračunavaju se bazni indeksi. Osnovica za utvrđivanje tih indeksa vremensko je razdoblje izvan intervala analize. Koeficijenti upravne proporcionalnosti bit će označeni sa m, a dobivaju se tako da se sto (100) podijeli s izračunanim baznim indeksima.

Kod utvrđivanja upravno proporcionalnih odnosa između prihoda državnog proračuna (q) i bruto domaćeg proizvoda (BDP) (z) polazi se od riješenog oblika modela:

22) $B \cdot q = z$

a tu je veličina q jednaka

23) $q = B^{-1} \cdot z$

Ako se gornji izraz pomnoži slijeva s utvrđenim izravnim koeficijentima upravne proporcionalnosti koji su označeni sa m:

24) $m \cdot q = m \cdot B^{-1} \cdot z$

i ako se unaprijed izračuna

25) $m \cdot B^{-1} = \check{m}$

dobiva se vektor - redak koeficijenata osjetljivosti;

26) $\check{m} = \left(\check{m}_0, \check{m}_1 \ldots\ldots \check{m}_N, \check{m}_{N+1} \right),$

pa su predviđene veličine prihoda državnog proračuna

27) $m \cdot q = \check{m} \cdot z$

Tako je utvrđen izraz koji omogućuje da se za svaki z_n izračuna i veličina q_n.

Ako se želi veličine prihoda državnog proračuna iskazati za svako vremensko razdoblje, tada je potrebno izravne koeficijente upravne proporcionalnosti izraziti u obliku dijagonalne matrice $\overline{m}$

28) $$\bar{m} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & m_1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 \;\; m_N \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots m_{N+1} \end{bmatrix}$$

koju će se pomnožiti s vektor-stupcem q. Tada se dobiva

29) $$\bar{m} \cdot q = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & m_1 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & m_N \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & m_{N+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \\ y_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 \cdot y_0 \\ m_1 \cdot y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ m_N \cdot y_N \\ m_{N+1} \cdot y_{N+1} \end{bmatrix}$$

Taj se postupak mora primijeniti u uvjetima kada prihodi državnog proračuna rastu brže od rasta bruto domaćeg proizvoda (BDP), odnosno kada se promjenom fiskalne politike želi djelovati u korist gospodarskog razvitka.

Prihodi javne potrošnje Republike Hrvatske od godine 1994. do 1999.

Osnovna funkcija prikupljanja prihoda države odnosno fiskalne politike, jest zadovoljavanje potreba javne potrošnje. Pod javnom potrošnjom prema prihvaćenoj terminologiji podrazumijevamo: državni proračun, izvanproračunske fondove, i sredstva lokalne uprave i samouprave (županija, gradova i općina). Sve to daje konsolidirani državni proračun (javnu potrošnju) To je samo jedna od uloga državne aktivnosti u ekonomskoj politici cjelokupne privrede. U suvremenim društvima uloga države postaje sve značajnija, i to kako za razvitak, tako i za stabilnost gospodarstva.

Prikupljanje prihoda države (javne potrošnje) zasniva se na brojnim propisima kojima se utvrđuju izvori ali i kriteriji za raspodjelu prikupljenih sredstava. Izvori prihoda javne potrošnje ostvaruju se uglavnom naplatom poreza, trošarina, pristojbi, doprinosa i na druge načine, da bi se ostvarili ekonomski i socijalni ciljevi društva.

Utjecaj države na gospodarstvo fiskalnom politikom bit će analiziran uglavnom na osnovi dinamike rasta prihoda javne potrošnje i njezinim udjelom u bruto domaćem proizvodu (BDP) za razdoblje od godine 1994. do 1999. Zato je važno sagledati dosadašnji razvitak odnosa i sadašnje stanje sa svrhom pospješiti dosad ostvarene pozitivne procese i uočiti slabosti, ali i da bi se nastale disproporcije otklonile ili ublažile. Razina fiskalnog opterećenja i promjene u proračunskoj potrošnji značajno utječu na promjene koje se zbivaju u dinamici kretanja bruto domaćeg proizvoda (BDP).

Izrazito visoka povećanja javne potrošnje dovode do smanjenja investicijskih ulaganja, što se odražava i na impulse gospodarskom razvitku.

Napomena : Kvantitativni postupak za utvrđivanje upravno proporcionalnih odnosa između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP) rezultat je osobnog izvoda.

Tablica 1.

PRIHODI DRŽAVNOG PRORAČUNA, IZVANPRORAČUNSKIH FONDOVA I LOKALNE UPRAVE I SAMOUPRAVE, I NJIHOV UDIO U BRUTO DOMAĆEM PROIZVODU (BDP) REPUBLIKE HRVATSKE OD GODINE 1994. DO 1999.

u mld. kuna

	1994.	1995.	1996.	1997.	1998.	1999.
Prihodi državnog proračuna	23,142	27,981	31,367	33,846	43,809	46,357
Prihodi izvanprorač. fondova	13,740	15,302	17,029	19,499	21,302	21,186
Prihodi lokalnih uprava i samouprava	3,392	4,368	6,122	7,009	7,861	7,741
Ukupni prihodi	40,274	47,651	54,518	60,354	72,972	75,284

udio u BDP u (%)

	1994.	1995.	1996.	1997.	1998.	1999.
Prihodi državnog proračuna	26,47	28,44	29,05	27,34	31,84	32,54
Prihodi izvanprorač. fondova	15,71	15,55	15,77	15,75	15,48	14,87
Prihodi lokalnih uprava i samouprava	3,88	4,44	5,67	5,66	5,71	5,43
Ukupni prihodi	45,06	48,43	50,49	48,75	53,03	52,84

Napomena : Podaci o veličini bruto domaćeg proizvoda (BDP-a) nalaze se u tablici 3.

Izvor: Preračunane vrijednosti, Mjesečni statistički prikaz, Ministarstvo financija, Zagreb, studeni 1998.i svibanj 2000.; DZS, SLJH/98 str., 190. i 191.; DZS, SLJH/2001. str. 204.

Ostvarena dinamika kretanja prihoda javne potrošnje u vremenskom razdoblju od godine 1994. do 1999. prikazana je u tablici 1. Iz navedene se strukture vidi znatno povećanje sudjelovanja prihoda javne potrošnje u bruto domaćem proizvodu (BDP). Prihodi javne potrošnje znatno sudjeluju u bruto domaćem proizvodu (BDP), oni su povećani s 45,06% u godini 1994. na 52,84% u godini 1999. Na osnovi podataka navedenih u tablici 1. vidi se da su u godini 1994. u strukturi prihoda javne potrošnje prihodi državnog proračuna sudjelovali sa 26,47%, da bi se u godini

1999. udio tih prihoda povećao na 32,54%. U toj strukturi prihodi lokalne uprave i samouprave u godini 1994. iznose 3,88%, a u godini 1999. taj je udio povećan na 5,43%. Ti su prihodi u tome razdoblju značajno porasli, za 128,21%, ali je njihov udio u bruto domaćem proizvodu (BDP) ostao na niskoj razini.

Na osnovi prikazanih podataka u tablici 1. vidi se da su prihodi izvanproračunskih fondova rasli znatno manje od rasta bruto domaćeg proizvoda (BDP), pa je došlo do znatnog opadanja tih prihoda, a osobito u 1999. godini. Udio prihoda izvanproračunskih fondova u bruto domaćem proizvodu (BDP) smanjen je od 15,71% u godini 1994. na 14,87% u godini 1999.

Tako predimenzionirani prihodi države (javne potrošnje), a osobito prihoda državnog proračuna, nepovoljno utječu na dinamičan gospodarski razvitak.

Prihodi državnog proračuna i bruto domaći proizvod (BDP) Republike Hrvatske od godine 1994. do 1999.

Da bi se osiguralo što djelotvornije izvršavanje određenih zadataka i zadovoljavanje važnih društvenih potreba, država prikuplja sredstva primijenjujući različite načine (poreze, trošarine i drugo).

U nastavku dan je prikaz prihoda državnog proračuna.

Tablica 2.

PRIHODI DRŽAVNOG PRORAČUNA REPUBLIKE HRVATSKE OD GODINE 1994. DO 1999.

u mld. kuna

	1994.	1995.	1996.	1997.	1998.	1999.
Ukupni prihodi i potpore	23,142	27,981	31,367	33,846	43,809	46,357
Tekući prihodi	22,788	27,287	30,244	33,385	42,019	40,046
- Porezni prihod	22,377	26,505	28,530	31,338	40,327	38,318
- Neporezni prihod	0,411	0,782	1,714	2,047	1,692	1,728
Prihodi od kapitala	0,354	0,594	1,123	0,461	1,790	6,311
Dotacije	0	0,100	0	0	0	0

Izvor: Mjesečni statistički prikaz, Ministarstvo financija, Zagreb, studeni 1998.i svibanj 2000.

Podaci za posljednjih nekoliko godina prikazani u tablici 2. pokazuju stalno povećanje prihoda državnog proračuna i posebno prihoda od kapitala.

Porezni prihodi čine glavninu prihoda državnog proračuna (oko 90%).

U tablici 2. također se vidi tendencija povećanja neporeznih prihoda u promatranome razdoblju. Porast prihoda državnog proračuna u promatranome razdoblju povećan je za 100%, a najveći je porast ostvaren kod prihoda od kapitala, i to za 320%. Takva je fiskalna politika nepovoljno utjecala na hrvatsko gospodarstvo (pad investicija i izvoza, porast zaduživanja i broja nezaposlenih).

Potpuna ocjena dinamike kretanja veličina prihoda državnog proračuna bit će utvrđena na osnovi uspoređivanja s promjenama kretanja bruto domaćeg proizvoda (BDP) za analizirano vremensko razdoblje.

Prihodi državnoga proračuna i bruto domaći proizvod (BDP) u razdoblju od godine 1994. do 1999. kretali su se ovako.

Tablica 3.

BRUTO DOMAĆI PROIZVOD (BDP) I PRIHODI DRŽAVNOG PRORAČUNA REPUBLIKE HRVATSKE OD 1994. DO 1999.GODINE

u mld. kuna

	Bruto domaći proizvod	Prihodi državnog proračuna	Bazni indeksi 1994.=100 bruto dom. proiz.	Bazni indeksi 1994.=100 prihod. držav. prorač.
1994.	87,441	23,142	100,00	100,00
1995.	98,382	27,981	112,51	120,91
1996.	107,981	31,367	123,49	135,54
1997.	123,811	33,846	141,59	146,25
1998.	137,604	43,809	157,37	189,31
1999.	142,469	46,357	162,93	200,32

Izvor: Preračunane vrijednosti

DZS, SLJH/2001., str. 180.; Mjesečni statistički prikaz, Ministarstvo financija, Zagreb, studeni 1998. i svibanj 2000.

Iz prikazanih podataka u tablici 3. vidi se da je za analizirano razdoblje bruto domaći proizvod (BDP) povećan za 62,93%, a prosječna godišnja stopa rasta iznosi 10,26% , pritom su prihodi državnog proračuna porasli za 100,32%, a prosječna godišnja stopa rasta iznosi 14,91%. Značajno povećanje prihoda državnog proračuna zabilježeno je u godinama 1998. i 1999. U godini 1999. bazni je indeks porasta prihoda državnog proračuna 200,32, a bazni je indeks porasta bruto domaćeg proizvoda (BDP) 162,93.

Takvo značajno povećanje prihoda državnog proračuna u godini 1998. ostvareno je zbog uvođenja poreza na dodanu vrijednost (PDV).

Vođenje ekonomske politike u hrvatskome gospodarstvu tako je svedeno na proračun, odnosno na kratkoročno programiranje.

Kvantitativna analiza međuovisnosti između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP) Republike Hrvatske

Primjena diferencijalne jednadžbe prvoga reda u analizi međuovisnosti između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP)

Da bi se složeni problemi koji se javljaju u gospodarstvu, brže i bolje rješavali, sve se više koriste – primjenjuju diferencijalne jednadžbe.

Ovdje će biti prikazana primjena diferencijalne jednadžbe prvoga reda u analizi međuovisnosti između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP). Takva diferencijalna jednadžba prvoga reda ima ovaj oblik

30) $$y'+ky=x$$

gdje su:

x = bruto domaći proizvod (BDP)

y = prihodi državnog proračuna

k = koeficijent proporcionalnosti

Rješavanje graničnog problema (30) sa graničnim uvjetima

31) $$y_{(0)}-y'_{(0)}=1$$

y_6 = 43,808 milijardi kuna

na intervalu: $x \varepsilon [87{,}441,\ 142{,}469]$,

i s korakom $$h = \frac{142{,}469 - 87{,}441}{6} = 9{,}17133$$

Traže se približne vrijednosti y_n n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 rješenja $y(x_n)$, gdje je x_n = 9,17133 n

Aproksimacija diferencijalne jednadžbe (30) prema (7) glasi

$$9{,}17133\, n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + k_n y_n = x_n \tag{32}$$

za n = 0 iz (32) je

$$9{,}17133 \cdot 0 \frac{y_1 - y_{-1}}{18{,}34266} + 3{,}77845\, y_0 = 87{,}441$$

$$0 + 3{,}77845 y_0 = 87{,}441$$

Na isti je način za n=5 iz (32)

$$9{,}17133 \cdot 5 \frac{y_6 - y_4}{18{,}34266} + 3{,}07330\, y_5 = 142{,}469$$
$$-2{,}5 y_4 + 3{,}07330\, y_5 + 2{,}5 y_6 = 142{,}469$$
$$-2{,}5 y_4 + 3{,}07330\, y_5 = 142{,}469 - 2{,}5 y_6$$
$$-2{,}5 y_4 + 3{,}07330\, y_5 = 142{,}469 - 2{,}5 \cdot 43{,}808$$
$$-2{,}5 y_4 + 3{,}07330\, y_5 = 32{,}949$$

Tako je formiran sustav linearnih jednadžbi koji se može prikazati u matričnom obliku.

$$\begin{bmatrix} 3,77845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 3,51603 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,0 & 3,44250 & 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 & 3,65807 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2,0 & 3,14100 & 2,0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2,5 & 3,07330 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87,441 \\ 98,382 \\ 107,981 \\ 123,811 \\ 137,604 \\ 32,949 \end{bmatrix}$$

Rješenje ovog sustava jednadžbi izračunanog na pet decimala glasi

*

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,26466 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,03628 & 0,27413 & -0,03614 & 0,00843 & -0,00265 & 0,00173 \\ 0,00957 & 0,07229 & 0,25416 & -0,05928 & 0,01865 & -0,01214 \\ 0,00335 & 0,02529 & 0,08892 & 0,21251 & -0,06686 & 0,04351 \\ 0,00140 & 0,01061 & 0,03730 & 0,08914 & 0,18169 & -0,11824 \\ 0,00114 & 0,00863 & 0,03034 & 0,07251 & 0,14780 & 0,22920 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 87,441 \\ 98,382 \\ 107,981 \\ 123,811 \\ 137,604 \\ 32,949 \end{bmatrix}$$

y_0=23,142, y_1=26,975, y_2=30,219, y_3=30,928, y_4= 37,336, y_5=41,093, y_6=43,808

Tako izračunane veličine prihoda državnog proračuna i njihova dinamika ne predstavljaju optimalna rješenja ni proporcionalna izdvajanja iz bruto domaćeg proizvoda (BDP). Sa druge strane, utvrđene veličine prihoda državnog proračuna pokazuju značajne razlike u dinamici kretanja, a rezultat su primjene različitih poreznih sustava i nedostatak koegzistentne fiskalne politike u tome razdoblju. To pokazuje da su ostvarenja prihoda državnog proračuna predimenzionirana u odnosu na mogućnosti gospodarstva (veličine bruto domaćeg proizvoda (BDP)).

Utvrđivanje upravno proporcionalnih odnosa između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP) Republike Hrvatske

Dalji korak u analizi odnosa između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP) jest naći - utvrditi upravno proporcionalne odnose. Tako utvrđeni odnosi potiču i omogućuju brži gospodarski razvitak. Opći postupak

* Matrica je invertirana na fakultetu Ekonomije i turizma Dr. "Mijo Mirković" u Puli na računalu intel pentium 350 programom SCLIAB 2.5

utvrđivanja upravno proporcionalnih koeficijenata opisan je u prethodnom dijelu ovoga rada. Postupak utvrđivanja takvih odnosa prikazuje se na sljedeći način.

Tablica 4.

UTVRĐIVANJE UPRAVNO PROPORCIONALNIH KOEFICIJENATA

u mld. kuna

	Bruto domaći proizvod	Prihodi državnog proračuna	Udio prihoda drž. prorač. u bruto domaćem proizvodu	Bazni indeksi udjela 1993.=100	Koeficijent i upravno prop. 100/baz. indekse
1993.	39,009	8,382	0,21487	100,00	1,0000
1994.	87,441	23,142	0,26466	123,172	0,81187
1995.	98,382	27,981	0,28441	132,364	0,75549
1996.	107,981	31,367	0,29049	135,193	0,73968
1997.	123,811	33,846	0,27337	127,226	0,78600
1998.	137,604	43,809	0,31837	148,169	0,67491
1999.	142,469	46,357	0,32538	151,431	0,66037

Izvor: Preračunane vrijednosti

DZS, SLJH/2001., str. 180.; Mjesečni statistički prikaz, Ministarstvo financija, Zagreb, studeni 1998. i svibanj 2000.

Utvrđivanje upravno proporcionalnih veličina prihoda državnog proračuna za svako razdoblje bit će učinjeno primjenom izraza (29)

$$\bar{m} \cdot q = \begin{bmatrix} 0{,}81187 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75549 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}73968 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}78600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}67491 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}66037 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 23{,}142 \\ 27{,}981 \\ 31{,}367 \\ 33{,}846 \\ 43{,}809 \\ 46{,}357 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18{,}788 \\ 21{,}139 \\ 23{,}202 \\ 26{,}603 \\ 29{,}567 \\ 30{,}613 \end{bmatrix}$$

U navedenom računskom postupku iskazano je upravno proporcionalno povećanje prihoda državnog proračuna u odnosu na povećanja bruto domaćeg proizvoda (BDP). Tako je bruto domaći proizvod (BDP) u godini 1999. u odnosu na 1998. povećan za 3,54%, isto tako i prihodi državnog proračuna za to razdoblje.

Optimalne veličine bruto domaćeg proizvoda (BDP) Republike Hrvatske

U suvremenim uvjetima upravljanja u gospodarstvu i u društvu zahtijeva se rješavanje složenih problema za koje postoji više alternativnih rješenja. U problematici rješavanja gospodarskih problema linearno programiranje ima raznovrsnu primjenu. Linearnim programiranjem rješavaju se problemi u kojima se postavljaju kriteriji maksimuma ili kriteriji minimuma, u ovome slučaju maksimalnim poreznim prihodima. Rješenja koja zadovoljavaju postavljene uvjete za kriterij i ograničenja uvjeta nazivaju se optimalnim rješenjima. U tim je razmatranjima problem sljedeći: odrediti veličine bruto domaćeg proizvoda (BDP) tako da porezni prihodi budu maksimalni pri danim ograničujućim uvjetima.

Ovdje će se porezni prihodi izraziti kao funkcija bruto domaćeg proizvoda (BDP) uz pomoć koeficijenta osjetljivosti i bit će označeni $\overset{v}{u}$

To će biti funkcija cilja $\bar{s}$ koju se želi maksimizirati:

33) $$\bar{s} = \overset{v}{u} \cdot x$$

Budući da su funkcija cilja i sustav ograničenja linearni, problem se svodi na linearno programiranje.

Taj se model može definirati prema osobnim izvornim postavkama na ovaj način:

34) $$\max s = \overset{v}{u} \cdot x$$

uz ograničenja

35) $$B^{-1} \cdot x = \leq P$$

i sa P su označene veličine prihoda državnog proračuna korigirane za godinu 1999.

Za konkretan je primjer formulacija problema:

$$\max s = \check{u}_0 x_0 + \check{u}_1 x_1 + \check{u}_2 x_2 + \check{u}_3 x_3 + \check{u}_4 x_4 + \check{u}_5 x_5$$

$$36)\quad \begin{aligned}
&r_{00}x_0 + r_{01}x_1 + r_{02}x_1 + r_{03}x_3 + r_{04}x_4 + r_{05}x_5 \leq P\\
&r_{10}x_0 + r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 \leq P\\
&r_{20}x_0 + r_{21}x_1 + r_{22}x_1 + r_{23}x_3 + r_{24}x_4 + r_{25}x_5 \leq P\\
&r_{30}x_0 + r_{31}x_1 + r_{32}x_1 + r_{33}x_3 + r_{34}x_4 + r_{35}x_5 \leq P\\
&r_{40}x_0 + r_{41}x_1 + r_{42}x_1 + r_{43}x_3 + r_{44}x_4 + r_{45}x_5 \leq P\\
&r_{50}x_0 + r_{51}x_1 + r_{52}x_1 + r_{53}x_3 + r_{54}x_4 + r_{55}x_5 \leq P\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Taj se postavljeni problem može riješiti poznatim metodama linearnog programiranja.[5]

Ako se u formulu (36) uvrste odgovarajuće vrijednosti za koeficijente osjetljivosti poreznih prihoda $(\check{u})$

inverzni koeficijenti (r_{ij}), i korigirane veličine prihoda državnog proračuna (P), onda je:

$$\overset{*}{\max}\, s = 0{,}30429x_0 + 0{,}36573x_1 + 0{,}33870x_2 + 0{,}29282x_3 + 0{,}24197x_4 + 0{,}11150x_5$$

$0{,}26466x_0$	$0x_1$	$0x_2$	$0x_3$	$0x_4$	$0x_5$	$\leq 23{,}142$
$0{,}03628x_0$	$0{,}27413x_1$	$-0{,}03614x_2$	$0{,}00843x_3$	$-0{,}00265x_4$	$0{,}00173x_5$	$\leq 27{,}981$
$0{,}009570x_0$	$0{,}07229x_1$	$0{,}25416x_2$	$-0{,}05928x_3$	$0{,}01865x_4$	$-0{,}01214x_5$	$\leq 31{,}367$
$0{,}00335x_0$	$0{,}02529x_1$	$0{,}08892x_2$	$0{,}21251x_3$	$-0{,}06686x_4$	$0{,}04351x_5$	$\leq 33{,}846$
$0{,}00140x_0$	$0{,}01061x_1$	$0{,}03730x_2$	$0{,}08914x_3$	$0{,}18169x_4$	$-0{,}11824x_5$	$\leq 43{,}809$
$0{,}00114x_0$	$0{,}00863x_1$	$0{,}03034x_2$	$0{,}07251x_3$	$0{,}14780x_4$	$0{,}22920x_5$	$\leq 37{,}586$

[5] Vidjeti: Lj. Martić: (1979.) Matematičke metode za ekonomske analize, II. svezak, 3. izdanje, Narodne novine, Zagreb.

Tada su optimalna rješenja linearnog programa:

x_0=87,441, x_1=102,495, x_2=113,847, x_3=142,474, x_4=145,084, x_5=5,991

Na osnovi izračunanih optimalnih veličina bruto domaćeg proizvoda (BDP) utvrđuje se maksimalna veličina poreznih prihoda.

s max = 0,30429·87,441+0,36573·102,495+0,33870·113,847+0,29282·

· 142,474+0,24197 ·145,084+0,11150 ·5,991

s max = 180,145 miljardi kuna.

Prema prikazanim je podacima za analizirano razdoblje poreznih prihoda prikupljen iznos od 187,395 milijardi kuna. Razlika između ostvarenih i utvrđenih poreznih prihoda (187,395 – 180,145) iznosi 7,250 milijardi kuna.

Veličine prihoda državnog proračuna koje proizlaze iz optimalnih veličina bruto domaćeg proizvoda (BDP) jesu:

37) $$\overset{*}{y} = B^{-1} \cdot x = \begin{bmatrix} 23{,}142 \\ 27{,}982 \\ 31{,}368 \\ 33{,}846 \\ 43{,}807 \\ 37{,}586 \end{bmatrix}$$

Ukupno ostvareni prihodi državnog proračuna za analizirano razdoblje iznose 206,502 milijardi kuna, a utvrđeni na osnovi optimalnih veličina bruto domaćeg proizvoda (BDP) iznose 197,731 milijardi kuna. Razlika je između navedenih veličina (206,502-197,731) 8,771 milijardi kuna. To znači da je potrebno smanjiti poreznu presiju u gospodarstvu ako se želi investirati u razvitak – povećati bruto domaći proizvod (BDP).

---

* Rezultati linearnog programa izračunani su na fakultetu Ekonomije i turizma “Dr. Mijo Mirković” u Puli na računalu Intel pentium 350 programom STORM 3,0

** Razlika između dinamike ostvarenja prihoda državnog proračuna i izračunanih na trećoj je decimali zbog zaokruživanja optimalnih veličina bruto domaćeg proizvoda (BDP).

Potrebno je naglasiti da zadržavanje neusklađenosti odnosa između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP) reproducira nestabilnost – poremećaj u gospodarstvu.

Zaključak

Promjene, što ih donosi i razvija moderna računalna i komunikacijska tehnologija na području gospodarstva i društva (ubrzavanje razvitka), nameću i zahtjev za razvitak dinamičkih matematičkih metoda i modela. Matematičke metode i modeli u posljednjih nekoliko desetljeća nalaze sve širu primjenu u području izgradnje i analize funkcioniranja gospodarskog sustava. Takvim se metodama i modelima uspostavlja međuovisnost i povezuju se ekonomske pojave i procesi značajni za analizu strukturnih i dinamičkih odnosa. Njihovo potpuno značenje dolazi do izražaja kada se naprave simuliranja i programiranja fiskalne politike (državni proračun). Tako je u ovome radu proračunano nekoliko različitih načina odnosa između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP) Republike Hrvatske. Pritom je kvantitativno utvrđen upravno proporcionalni odnos između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP). Takvi odnosi onemogućuju zaduživanja državnog proračuna, a mogu pozitivno utjecati na gospodarski razvitak. Tim matematičkim modelom, uz zadana polazna ograničenja, proračunano je degresivno kretanje prihoda državnog proračuna u odnosu na ostvarenje. Zato se takva formulacija može aktualizirati kada je potrebno ograničiti zahvat fiskalne politike u bruto domaći proizvod (BDP). Pronalaženje najpovoljnijih odnosa za usklađivanje potreba društva i mogućnosti gospodarstva posebno je važno: pronaći – utvrditi optimalne međuodnose. U razradi tih odnosa utvrđena je i kvantificirana maksimalna veličina poreznih prihoda koja iznosi 180,145 milijardi kuna uz optimalne veličine bruto domaćeg proizvoda (BDP), pri navedenim ograničenim veličinama prihoda državnog proračuna.

Skladno dimenzioniranje tih odnosa osigurava kvalitativnu i kvantitativnu ravnotežu između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP), odnosno gospodarskoga sektora Republike Hrvatske.

Autor je u ovome radu pokušao ukratko iznijeti – opisati svu složenu problematiku odnosa između prihoda državnog proračuna i bruto domaćeg proizvoda (BDP) uz pristup drugih ideja i dimenzija.

LITERATURA

1. Conte S.D. (1965.): Elementary Numerical Analysis: an Algorithmic Approach. Mc Graw Hill, New York.
2. Bilimović Anton (1966.): Diferencijalne jednačine sa dopunama II. izdanje, Tehnička knjiga, Beograd.
3. Henrici P. (1962.): Discrete Variable Methods in Ordinary Diferential Equations, John Wiley and Sons, New York.
4. Phillips G.M. and Taylor P.J. (1973.): Theory and Applications of Numerical Analysis. Academic Press, London and New York.
5. Martić Lj. (1979.): Matematičke metode za ekonomske analize, II svezak, 3. izdanje, Narodne novine, Zagreb.
6. Pejović T. (1979.): Diferencijalne jednačine I i II. Naučna knjiga, Beograd.
7. Pejović P. (1983.): Numerička analiza II deo Numeričke metode rešavanja jednačina, Naučna knjiga, Beograd.

MAKING OF DYNAMIC MATHEMATICAL MODEL IN THE ECONOMIC PROCESSES ANALYSIS

Summary

The paper outlines the quantitative method in the analysis of interdependences and correlation of magnitudes in economy, by application of dynamic mathematical model. Making of such a model applies the first-class differential equation which will be followed through the final differences method.The application of this method enables the formation of the linear equation system which can be shown in a matrix form. This is the starting form of dynamic mathematical model.

Development of computer technology enables increasingly broader application of mathematical methods and models in the analysis of economy. This is especially important in the analysis of complex and dynamic relations of interdependences and functional correlation of sizes in the economic system. In economic system, such analysis initiates the optimum flows circulation which is indispensable for well-proportioned development programming.

The author shows the quantitative analysis of relations among government revenues and gross domestic product of the Republic of Croatia by mathematical methods and models. Its application enables the establishment of optimum solutions. The achieved solutions ensure permanent equilibrium and stability of economic system, and contribute to faster economic development.