Osječki matematički list 22 (2022), 33–38

Nesbittova nejednakost

Šefket Arslanagić[*], Daniela Zubović[†]

Sažetak

Nesbittova nejednakost je poznata u matematičkoj literaturi o algebarskim nejednakostima. U radu su dana tri nova dokaza Nesbittove nejednakosti.

Ključne riječi: *Nesbittova nejednakost*

Nesbitt's inequality

Abstract

The Nesbitt's inequality is well known in the mathematical literature on algebraic inequalities. In this paper we give three new proofs of this inequality.

Keywords: *Nesbitt's inequality*

1 Uvodni rezultati o Nesbittovoj nejednakosti

Za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \tag{1}$$

[*]Odsjek za matematiku, Univerzitet u Sarajevu, email: asefket@pmf.unsa.ba
[†]Odsjek za matematiku, Univerzitet u Sarajevu, email: dzubovic@pmf.unsa.ba

Nejednakost (1) je prvi puta postavljena u američkom časopisu Educational Times 1903. godine, kao Problem 15114 od strane A. M. Nesbitta, pa se ona danas u njegovu čast naziva Nesbittova nejednakost. Recimo još da se u [1] nalazi deset raznih dokaza nejednakosti (1) te još jedanaest u [2]. Treba uočiti da je nejednakost (1) ciklička, simetrična i homogena. Za njenih 21 dokaza u [1] i [2] su korištene poznate nejednakosti kao što su nejednakosti između sredina, Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost, Jensenova nejednakost, Čebiševljeva nejednakost, Muirheadova nejednakost te teorem o preuređenju, metoda supstitucije i diferencijalni račun.

U nastavku ćemo prezentirati tri nova dokaza nejednakosti (1).

2 Tri nova dokaza Nesbittove nejednakosti

Dokaz 1.
Za pozitivne realne brojeve a, b, c označimo

$$M = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b},$$

$$A = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

i

$$B = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}.$$

Uočimo

$$A + B = \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} = 3.$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja vrijedi

$$A + M = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{c+a}{a+b}} = 3$$

i

$$B + M = \frac{a+c}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a+c}{b+c} \cdot \frac{a+b}{c+a} \cdot \frac{b+c}{a+b}} = 3.$$

Zbrajanjem prethodne dvije nejednakosti dobijemo

$$6 \leq (M + A) + (M + B) = A + B + 2M = 3 + 2M$$

odakle slijedi

$$M \geq \frac{3}{2},$$

odnosno

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \qquad \square$$

Očigledno, jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Dokaz 2.
Nejednakost (1) je homogena, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a + b + c = 1$. Prvo ćemo dokazati da za sve $x \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi nejednakost

$$\frac{x}{1-x} \geq \frac{9x-1}{4}. \tag{2}$$

Nejednakost (2) je ekvivalentna sa sljedećim nejednakostima

$$\begin{aligned} & 4x \geq (9x-1)(1-x) \\ & \Leftrightarrow 4x \geq 9x - 9x^2 - 1 + x \\ & \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Kako je posljednja nejednakost točna, onda je i nejednakost (2) točna, pri tome jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = \frac{1}{3}$.

Sada na osnovu nejednakosti (2) imamo

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \\ &\geq \frac{9a-1}{4} + \frac{9b-1}{4} + \frac{9c-1}{4} \\ &= \frac{9(a+b+c)-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \qquad \square$$

Dokaz 3.
U prvom koraku ćemo za pozitivne realne brojeve a, b i c dokazati nejednakost

$$f(a,b,c) \geq f(t,t,c), \tag{3}$$

gdje je $f\left(a,b,c\right)=\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$ i $t=\dfrac{a+b}{2}$.

Imamo

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\\
&\quad=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\left(\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{c}{a+b}\right)\\
&\quad=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}-\frac{2\left(a+b\right)}{a+b+2c}\\
&\quad=\frac{a^3+ca^2+cb^2+b^3-2abc-ab^2-a^2b}{\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(a+b+2c\right)}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri, odnosno za dva pozitivna broja vrijedi

$$\begin{aligned}
a^3+ca^2+cb^2+b^3&=\frac{a^3+a^3+b^3}{3}+\frac{a^3+b^3+b^3}{3}+ca^2+cb^2\\
&\geq a^2b+ab^2+2abc. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Sada iz (4) i (5) slijedi

$$f\left(a,b,c\right)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\geq 0,$$

odnosno

$$f\left(a,b,c\right)\geq f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right),$$

i time je dokazana nejednakost (3).

Preostaje nam još dokazati nejednakost

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)=f\left(t,t,c\right)\geq\frac{3}{2}. \qquad (6)$$

Imamo

$$\begin{aligned}
& f(t,t,c) \geq \frac{3}{2} \\
& \Leftrightarrow \frac{t}{t+c} + \frac{t}{t+c} + \frac{c}{2t} \geq \frac{3}{2} \\
& \Leftrightarrow \frac{2t}{t+c} + \frac{c}{2t} - \frac{3}{2} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow 4t^2 + c(t+c) - 3t(t+c) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow t^2 - 2ct + c^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (t-c)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 \geq 0$$

što je točno, pa je i nejednakost (6) točna.

Sada iz nejednakosti (3) i (6) slijedi nejednakosti $f(a,b,c) \geq \frac{3}{2}$, tj. nejednakost (1). $\square$

Recimo još jednom da u (1) vrijedi jednakost ako i samo ako je $a = b = c$.

Inače, ova metoda dokazivanja prezentirana u dokazu 3 je u matematičkoj literaturi na engleskom jeziku poznata pod nazivom *Mixing Variables Method*.

Literatura

[1] Š. Arslanagić , *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[3] Š. Arslanagić, *Jedno poboljšanje Nesbittove nejednakosti i neke njene generalizacije*, MAT-KOL XVII (2011), 5–11, Banja Luka, 2011.

[4] Š. Arslanagić, *O jednoj cikličkoj algebarskoj nejednakosti*, MAT-KOL XIX (2013), 17–23, Banja Luka, 2013.

[5] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997.

[6] Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić, I. Matić, *Nejednakosti, Materijali za mlade matematičare*, Sveska 42, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.

[7] D. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[8] A. M. Nesbitt, *Problem 15114*, Educational Times, ***3*** (1903) 37–38.