

# Sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja

Petar Žugec\*, Ivan Topić†, Dario Rudec‡

## Sažetak

U članku proučavamo geometriju odbojnog Rutherfordovog raspršenja te pokazujemo da ono stvara sjenu, koju analiziramo u različitim promatračkim sustavima.

**Ključne riječi:** *Rutherfordovo raspršenje, kulonsko međudjelovanje, sjena, anvelopa*

## The shadow of repulsive Rutherford scattering

### Abstract

We investigate the geometry of the repulsive Rutherford scattering, showing that it casts a shadow which we analyze in various reference frames.

**Keywords:** *Rutherford scattering, Coulomb interaction, shadow, envelope*

---

\*Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: pzugec@phy.hr

†Magistar edukacije fizike, diplomirao na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, email: topic.ivan@skole.hr

‡Magistar fizike, diplomirao na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, email: dario.rudec@subpixel.hr

## 1 Rutherfordovo raspršenje



Ernest Rutherford (1871.–1937.), otac nuklearne fizike.



Johannes Wilhelm "Hans" Geiger (1882.–1945.), jedan od otkrivača atomske jezgre.



Ernest Marsden (1889.–1970.), jedan od prvih nuklearnih fizičara u povijesti.



Charles-Augustin de Coulomb (1736.–1806.), francuski fizičar po kojem kulonska sila nosi ime.



Isaac Newton (1642.–1726.), engleski fizičar koji je prvi jasno iskazao osnovne zakone klasične mehanike.

Raspršenje dvaju električnih naboja, danas poznato kao Rutherfordovo raspršenje, jedan je od najpoznatijih i najbolje istraženih fenomena u fizici. U nizu povijesnih eksperimenata s početka 20. stoljeća, još u vrijeme nepoznate unutarnje strukture atoma, Hans Geiger i Ernest Marsden oba su jvali su tanke listiće zlata snopom tada već poznatih  $\alpha$ -čestica [1, 2, 3]. Neočekivani ishodi tih eksperimenata ubrzo su doveli Ernesta Rutherforda do otkrića atomske jezgre [4] – duboko skrivene u srcu atoma, u sigurnosti okolnog elektronskog omotača – i osnutka nuklearne fizike. Danas dobro znamo da su bitni rezultati tih eksperimenata objašnjeni odbojnim raspršenjem pozitivno nabijenih  $\alpha$ -čestica u kulonskome polju također pozitivno nabijene atomske jezgre (onih  $\alpha$ -čestica koje uspiju doprijeti u neposrednu blizinu jezgre, gdje elektroni ne „smetaju“ interakciji s jezgrom).

U svrhu njihova jasnog raspoznavanja jedan od dvaju naboja smatrat ćemo metom (što bi u Rutherfordovom eksperimentu odgovaralo atomskoj jezgri zlata), a drugi projektilom (koji bi odgovarao  $\alpha$ -čestici). U tipičnom laboratorijskom sustavu u kojem mirujući uzorak izlažemo snopu nabijenih čestica ovakva podjela je sasvim prirodna, iako u osnovi ništa više od pitanja nomenklature. U promatračkim sustavima poput sustava centra mase u kojem se oba naboja sve vrijeme gibaju, nestaje razlika između koncepta mete i projektila, no i dalje ćemo zadržati uloge koje smo im pri dijelili u laboratorijskom sustavu. Prisjetimo se oblika kulonske sile kojom točkasta nabijena meta (m) djeluje na točkasti nabijeni projektil (p):

$$\vec{F}_{m \rightarrow p} = \frac{Q_p Q_m}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_p - \vec{r}_m}{|\vec{r}_p - \vec{r}_m|^3}. \quad (1)$$

$Q_p$  i  $Q_m$  iznosi su električnih naboja projektila i mete,  $\epsilon_0$  je tzv. permittivnost vakuuma, a  $\vec{r}_p$  i  $\vec{r}_m$  položaji su projektila i mete u danom promatračkom sustavu<sup>1</sup>. Poznavanjem sile kojom projektil i meta međudjeluju, možemo odrediti oblik njihova gibanja, tj. njihove putanje. Za to koristimo drugi Newtonov zakon, najčešće primjenjiv u obliku  $\vec{F} = m\vec{a}$  koji nam govori da ukupna sila  $\vec{F}$  koja djeluje na tijelo mase  $m$  uzrokuje promjenu nje-

<sup>1</sup>Treća potencija koja se pojavljuje u izrazu (1) nije pogreška! Naime, kulonsku silu naviknuli smo izražavati korištenjem relativnog položaja  $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_m$  projektila i mete, kad je notacijski jednostavno koristiti oznaku jediničnog smjera  $\hat{r}$  u kombinaciji s drugom potencijom nad ovisnošću o samoj udaljenosti  $r$ , kako bi se jasno vidjelo poznato opadanje sile s kvadratom udaljenosti:  $\vec{F}_{m \rightarrow p} \propto \hat{r}/r^2$ . Međutim, pri potpunom raspisu preko zasebnih položaja  $\vec{r}_p$  i  $\vec{r}_m$  oznake jediničnih vektora postaju nezgrapne (jer jedinična razlika vektora nije jednaka razlici jediničnih vektora), stoga je uobičajeno u brojniku ostaviti punu vektorsku razliku, a njezinu normu kompenzirati dodatnom normom u nazivniku:  $\vec{r}/r^3 = \hat{r}/r^2$ .

gova stanja gibanja ubrzanjem  $\vec{a}^2$ . Drugi Newtonov zakon jest *diferencijalna jednačnja* drugog reda za određivanje putanje tijela jer je ubrzanje po definiciji druga derivacija vremenske ovisnosti položaja tijela:  $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$ . Pri tome ćemo koristiti tipične Newtonove oznake  $\dot{\vec{r}}$  i  $\ddot{\vec{r}}$  za *vremenske* derivacije, pri čemu broj točkica nad veličinom predstavlja stupanj derivacije. Tako je  $\dot{\vec{r}}$  prva vremenska derivacija položaja, tj. brzina:  $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ , dok je  $\ddot{\vec{r}}$  druga vremenska derivacija položaja, tj. ubrzanje:  $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$ .

Kako sila iz (1) djeluje na projektil, njome je izravno određeno *njegovo* ubrzanje:  $m_p\ddot{\vec{r}}_p = \vec{F}_{m \rightarrow p}$ . Kad bismo poznavali silu  $\vec{F}_{p \rightarrow m}$  kojom projektil djeluje na metu, mogli bismo odrediti i ubrzanje mete tijekom njihova međudjelovanja:  $m_m\ddot{\vec{r}}_m = \vec{F}_{p \rightarrow m}$ . Tu silu znamo iz trećeg Newtonovog zakona prema kojem su sile kojima dva tijela djeluju jedno na drugo istog iznosa, a suprotnog smjera:  $\vec{F}_{p \rightarrow m} = -\vec{F}_{m \rightarrow p}$ . Ovime smo došli do ključnih relacija:

$$m_p\ddot{\vec{r}}_p = \vec{F}_{m \rightarrow p}, \quad (2)$$

$$m_m\ddot{\vec{r}}_m = -\vec{F}_{m \rightarrow p}, \quad (3)$$

kojima je određeno gibanje dvaju naboja. Tehnički problem pri rješavanju ovih jednačnji jest to što su vezane jer je putanja jednog tijela određena putanjom drugog (na ubrzanje svakog pojedinog tijela kroz oblik sile utječe i položaj drugog). Da bismo tome doskočili, definiramo dvije zamjenske veličine, posredstvom kojih će se prethodne diferencijalne jednačnje razvezati. Jedna je položaj centra mase sustava  $\vec{R}_{cm}$ :

$$\vec{R}_{cm} \equiv \frac{m_p\vec{r}_p + m_m\vec{r}_m}{m_p + m_m}. \quad (4)$$

Dvostrukim vremenskim deriviranjem (4) te uvrštavanjem (2) i (3) dolazimo do  $\ddot{\vec{R}}_{cm} = \vec{0}$ , što znači da bez dodatnih vanjskih utjecaja (tj. pod djelovanjem samo unutarnjih sila) sustav kao cjelina ne ubrzava, odnosno ne mijenja svoje stanje gibanja<sup>3</sup>. Rješenje ovakve jednačnje gibanja, tj. diferencijalne jednačnje  $d^2\vec{R}_{cm}/dt^2 = \vec{0}$ , jednoliko je pravocrtno gibanje po pravcu:

$$\vec{R}_{cm}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_{cm}t, \quad (5)$$

<sup>2</sup> $\vec{F} = m\vec{a}$  nije najopćenitiji iskaz drugog Newtonovog zakona! Već je sam Newton iskazao taj zakon u obliku  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ : *sila uzrokuje promjenu količine gibanja ( $\vec{p}$ ) sustava ili tijela na koje djeluje*. Samo se pod određenim, koliko god uobičajenim uvjetima taj izraz svodi na poznatiju inačicu  $\vec{F} = m\vec{a}$ , čija valjanost prestaje svaki put kad se masa na koju djeluje sila mijenja, a sila djeluje i na te promjenjive dijelove mase. Valja naglasiti da drugi Newtonov zakon *ne definira silu* (tj. prirodu sile), već *učinak* sile, tj. posljedice njezina djelovanja.

<sup>3</sup>Ovo nije ništa drugo nego iskaz očuvanja količine gibanja: ukupna količina gibanja *izoliranog* sustava ne mijenja se u vremenu (ne može se promijeniti nikakvim utjecajima iz nutrine sustava; jedino vanjskim djelovanjem, kad sustav prestaje biti izoliran).

konstantnom brzinom  $\vec{V}_{\text{cm}}$ , uz  $\vec{R}_0$  kao položaj centra mase u nekom izabranom početnom trenutku. Na ovu relaciju vratit ćemo se kasnije.

Druga zamjenska veličina relativni je položaj  $\vec{r}$  projektila spram mete:

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_p - \vec{r}_m. \quad (6)$$

Diferencijalnu jednadžbu za vremensku evoluciju relativnog položaja dobivamo dvostrukim deriviranjem prethodne relacije:  $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_p - \ddot{\vec{r}}_m$  kako bismo ponovno iskoristili izraze za  $\ddot{\vec{r}}_p$  i  $\ddot{\vec{r}}_m$  iz (2) i (3):

$$\ddot{\vec{r}} = \left( \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_m} \right) \vec{F}_{m \rightarrow p} = \frac{Q_p Q_m \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 \mu r^2}. \quad (7)$$

Ovdje smo uveli veličinu  $\mu$  koja se naziva reduciranom masom sustava:

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_m}. \quad (8)$$

Dok je ukupnom masom sustava  $m_p + m_m$  određeno gibanje sustava kao cjeline, reduciranom masom određeno je relativno gibanje dvaju tijela unutar sustava te njezinu pojavu možemo razumjeti kao posljedicu pojave inercijalnih sila. Naime, relativni položaj  $\vec{r}$  projektila spram mete (koji je neovisan o promatračkom sustavu) možemo shvatiti i kao apsolutni položaj projektila u *sustavu same mete*, u kojem je ishodište sve vrijeme vezano za metu. Budući da meta sve vrijeme ubrzava zbog kulonske sile projektila, sustav mete je ubrzan, tj. neinercijalan. Za opis gibanja u neinercijalnom sustavu potrebno je u račun uključiti i neinercijalne sile, čija pojavnost se pri zamjeni varijabli  $\vec{r}_p, \vec{r}_m \rightarrow \vec{r}$  manifestira kroz pojavu reducirane mase, tj. efektivne mase zadužene za ispravan opis *relativnog* gibanja unutar sustava. Rješavanjem diferencijalne jednadžbe (7) riješili bismo problem nalaženja putanja projektila i mete. Naime, već smo odredili putanju centra mase iz (5), a inverzijom izraza za  $\vec{R}_{\text{cm}}$  i  $\vec{r}$  iz (4) i (6) uvijek možemo rekonstruirati položaje projektila i mete u bilo kojem promatračkom sustavu:

$$\vec{r}_p = \vec{R}_{\text{cm}} + \lambda_m \vec{r}, \quad (9)$$

$$\vec{r}_m = \vec{R}_{\text{cm}} - \lambda_p \vec{r}, \quad (10)$$

gdje informacija o samome promatračkom sustavu ulazi kroz član  $\vec{R}_{\text{cm}}$ . Za udjele pojedinih masa u ukupnoj masi sustava uveli smo pokrate:

$$\lambda_{p,m} \equiv \frac{m_{p,m}}{m_p + m_m} \quad (11)$$

jer će zauzimati istaknuto mjesto u kasnijim rezultatima.

## 1.1 Općenito kulonsko međudjelovanje

Jednadžbu (7) izveli smo vodeći se pričom o odbojnom kulonskom međudjelovanju, iako u ovome obliku ni u najmanjoj mjeri ne ovisi o toj pretpostavci; sasvim je valjana i u općenitom slučaju. Njezinim izravnim rješavanjem odredili bismo *vremensku* ovisnost  $\vec{r}(t)$  relativnog položaja dvaju naboja. Budući da su radijalna udaljenost  $r$  i radijalni smjer  $\hat{r}$  koji se pojavljuju u toj jednadžbi prirodni vektorski elementi *sfernog* koordinatnog sustava, tu diferencijalnu jednadžbu najjednostavnije je rješavati upravo u sfernim koordinatama [5]. Za razliku od jediničnih smjerova  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  i  $\hat{z}$  Kartezijevog koordinatnog sustava, čije usmjerenje je jednako u svim točkama prostora, radijalni smjer  $\hat{r}$  (zajedno s preostalim sfernim smjerovima  $\hat{\theta}$  i  $\hat{\varphi}$ ) ovisi o položaju u prostoru te je uvijek usmjeren od ishodišta prema promatranom točki. Upravo zato raspis vektora položaja preko sfernih vektorskih elemenata<sup>4</sup> poprima jednostavan oblik:  $\vec{r} = r\hat{r}$ , no po cijenu toga da oba vektorska elementa ovise o veličini kojom parametriziramo položaj. U slučaju vremenske parametrizacije položaja imali bismo ne samo vremensku ovisnost koordinate  $r(t)$ , već i vremensku ovisnost smjera  $\hat{r}(t)$  unutar koje se „skrivaju“ i ovisnosti preostalih koordinata  $\theta(t)$  i  $\varphi(t)$  kojima je određeno gibanje promatranog tijela. U kontekstu našeg problema sama vremenska ovisnost ponešto je nezahvalna za računanje, a donekle i manje korisna od samog geometrijskog oblika tražene putanje. Na sreću, određenim matematičkim manipulacijama vremenska diferencijalna jednadžba (7) može se prevesti u diferencijalnu jednadžbu po jednoj od sfernih koordinata, najčešće po  $\varphi$ . Njezinim rješavanjem izravno nalazimo geometrijski oblik putanje  $r(\varphi)$ , tj. parametrizaciju jedne geometrijske koordinate drugom. Čitav postupak prikazan je u završnome Dodatku (poglavlje 3), gdje pokazujemo da u slučaju kulonskog međudjelovanja (i općenitije, u slučaju svake centralne sile, poput gravitacijske, koja opada s kvadratom udaljenosti:  $\vec{F} \propto \hat{r}/r^2$ ) oblik relativnog gibanja dvaju tijela odgovara jednoj je od čunjosječnica: kružnici, elipsi, paraboli ili hiperboli. Ovaj ishod omanje je matematičko čudo, jednostavnošću i elegancijom gotovo predobar da bi bio istinit. U polarnim koordinatama ravnine, čiju ulogu preuzimaju sferne koordinate  $r$  i  $\varphi$  trodimenzionalnog prostora promatramo li gibanje u  $x$ - $y$

<sup>4</sup>Ciljano izbjegavamo frazu „raspis u sfernim koordinatama“ jer može podrazumijevati i korištenje sfernih koordinata  $r$ ,  $\theta$  i  $\varphi$  u raspisu komponenata svojstvenih smjerovima nekog drugog koordinatnog sustava. Na primjer, često korišten raspis vektora po Kartezijevim komponentama (smjerovima), a preko sfernih koordinata poprima oblik:

$$\vec{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}.$$

Drugim riječima, sasvim je prihvatljivo i vrlo uobičajeno koristiti jedinične smjerove jednog koordinatnog sustava, a komponente raspisivati u koordinatama nekog drugog.

ravnini<sup>5</sup>, sve klase čunjosječnica mogu se parametrizirati jedinstvenim izrazom:

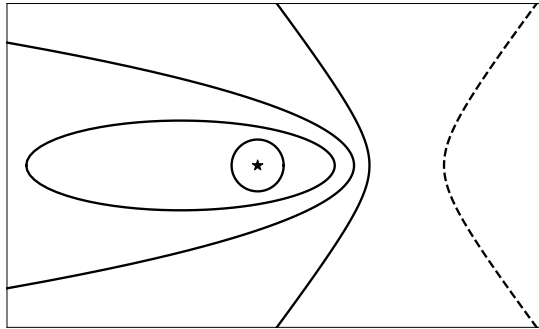
$$r(\varphi) = \frac{r_\vartheta}{1 - e \sin(\varphi - \vartheta)}. \quad (12)$$

Pri tome se parametri  $\vartheta$ ,  $r_\vartheta$  i  $e$  određuju iz početnih uvjeta (početnog položaja  $\vec{r}_0$  i početne brzine  $\vec{v}_0$ ) koji su u uskoj vezi s ukupnom energijom i ukupnom kutnom količinom gibanja dvaju tijela u sustavu.

Vrsta čunjosječnice iz općenite polarne jednadžbe (12) određena je parametrom  $e$ , zvanim ekscentricitet, dok je ishodište radijalne koordinate  $r$  u fokusu (ili jednom od dvaju fokusa) čunjosječnice. Pri tome  $e = 0$  parametrizira kružnicu,  $0 < e < 1$  elipsu,  $e = 1$  parabolu, a  $e > 1$  hiperbolu. Da bismo tim izrazom mogli opisati obje grane hiperbole, moramo dozvoliti i negativne vrijednosti radijalne koordinate. Prema  $\vec{r} = r\hat{r}$  to samo znači da se točka s  $r(\varphi) < 0$  nalazi na položaju zrcaljenom s obzirom na ishodište, tj. na istom položaju kao i točka s radijalnom koordinatom  $|r(\varphi)|$  i kutnom koordinatom  $\varphi + \pi$ . Pri tome valja držati na umu da je ishodište radijalne koordinate  $r(\varphi)$  u jednom od fokusa hiperbole, a ne u točki centralne simetrije, između njezinih dviju grana.

Slika 1 prikazuje po jedan primjer iz svake klase čunjosječnica opisanih izrazom (12). Sve one dijele isto ishodište radijalne koordinate  $r(\varphi)$ , označeno zvjezdicom, koje odgovara fokusu ili jednome od dvaju fokusa svake putanje. Valja naglasiti da ne postoji „hijerarhija veličina“ različitih klasa putanja, što bi slika mogla lažno sugerirati. Niti su sve kružne putanje iz (12) sadržane unutar geometrijskog područja svih eliptičnih putanja, niti eliptične unutar paraboličnih, niti parabolične unutar hiperboličnih. Geometrijsko područje svih mogućih putanja iste klase (tj. svih kružnica, svih elipsa, svih parabola i svih hiperbola) čitava ja ravnina te se mnoge presi-

<sup>5</sup>Činjenica da je gibanje ograničeno unutar ravnine duboko je fizikalna, kao posljedica međudjelovanja *centralnom* silom. Centralna je svaka sila koja djeluje po spojnici dvaju tijela ( $\vec{F} \propto \vec{r}$ ), što je slučaj i kulonske i gravitacijske sile. U sustavu jednog tijela, kao izvora sile, moment sile  $\vec{M}$  kojim ono djeluje na drugo određen je vektorskim produktom njihove spojnice („kraka sile“) i same sile:  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ . U istome sustavu kutna količina gibanja  $\vec{L}$  tijela na koje djeluje sila  $\vec{F}$  određena je vektorskim produktom  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  u kojem se, uz isti  $\vec{r}$ , pojavljuje translacijska količina gibanja  $\vec{p}$  toga drugog tijela. Iz svojstva centralnosti sada slijedi da moment centralne sile kao vektorski produkt kolinearnih vektora iščezava:  $\vec{M} = \vec{0}$ . A iz tzv. „drugog Newtonovog zakona za kružno gibanje“, koji kaže da moment sile uzrokuje promjenu kutne količine gibanja onog tijela na koje djeluje:  $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ , konačno slijedi da je *pod djelovanjem centralne sile kutna količina gibanja očuvana* jer njezina promjena ( $\vec{M}$ ) iščezava. Kako je po definiciji vektorskim produktom kutna količina gibanja okomita na ravninu razapetu vektorima  $\vec{r}$  i  $\vec{p}$ , iz konstantnog usmjerenja očuvane vektorske veličine  $\vec{L}$  slijedi da ravnina gibanja (u kojoj leži translacijska količina gibanja  $\vec{p}$ ) ne zakreće u prostoru! Drugim riječima, gibanje se sve vrijeme odvija unutar jedne te iste ravnine.



Slika 1. Izabrani primjeri čunjosječnica iz (12). Kod privlačnog kulonskog (ili svakog gravitacijskog) međudjelovanja moguće su sve klase putanja: kružnice, elipse, parabole ili hiperbole (pune linije). Kod odbojnog kulonskog međudjelovanja moguće su jedino hiperbolične putanje, i to s „druge“ grane hiperbole (isprekidana linija). Sve putanje dijele isti fokus (zvjezdica) u kojem leži jedno od dvaju tijela.

ječaju. Specifičan odnos putanja sa slike 1 izabran je samo radi vizualne jasnoće. Punim linijama prikazani su mogući oblici putanja u slučaju privlačnog međudjelovanja<sup>6</sup>, poput kulonskog međudjelovanja između električnih naboja suprotnih predznaka ( $Q_p Q_m < 0$ ) ili gravitacijskog međudjelovanja kod kojeg je privlačni scenarij jedini moguć. U slučaju odbojnog međudjelovanja između naboja istih predznaka ( $Q_p Q_m > 0$ ) moguće su jedino hiperbolične putanje duž kojih se naboj u gibanju otklanja od relevantnog fokusa, što je na slici 1 prikazano isprekidanom linijom.

## 1.2 Odbojno kulonsko raspršenje

U eksperimentalnoj fizici, upravo kao u Rutherfordovom pokusu, procesi raspršenja tipično se ispituju propuštanjem usmjerenog snopa čestica (projektila) na centar raspršenja (metu). Kao se upadni snop projektila uobičajeno ispušta s udaljenosti neusporedivo većih od dimenzija na kojima se odvija bitan dio raspršenja (npr. s udaljenosti od nekoliko centimetara spram atomskih dimenzija za samo raspršenje), snop je opravdano mo-

<sup>6</sup>Kod privlačnog međudjelovanja tip putanje određen je ukupnom energijom dvaju tijela unutar sustava. Pri dovoljno niskim energijama sustav je vezan, tj. putanja tijela je zatvorena (elipsa ili kružnica). Za dovoljno visoke energije putanja je otvorena (hiperbolična), tj. tijela su slobodna proizvoljno se udaljiti jedno od drugog. Granični slučaj između tih dvaju scenarija odgovara paraboličnoj putanji. Razlika između eliptične i kružne putanje dodatno je određena ukupnom kutnom količinom gibanja u sustavu.

delirati kao da aproksimativno dolazi iz beskonačnosti, što u mnogočemu olakšava matematički tretman. Stoga ćemo jednadžbe gibanja iz prethodnog poglavlja primijeniti na nabijene projektele koji su na nabijenu metu ispušteni s beskonačne udaljenosti, svi u istome smjeru (usmjereni snop), no s različitim početnim odmacima od osi koja prolazi metom. Ova os, čiji smjer odgovara smjeru početne brzine projektila, prirodno se nameće kao  $z$ -os jer ona ima istaknuto značenje i u sfernom [5] i u cilindričnom [6] koordinatnom sustavu. S  $\varrho_0$  označit ćemo početni otklon projektila od  $z$ -osi, koji odgovara radijalnom odmaku ( $\rho$ -koordinati) iz cilindričnog koordinatnog sustava. Ova početna vrijednost naziva se udarnim parametrom (eng. *impact parameter*) projektila. Početnu brzinu svih projektila, iznosa  $v_0$ , usmjerit ćemo duž pozitivnog smjera  $z$ -osi, što znači da smo projektil ispuštili sa  $z$ -koordinate u *negativnoj* beskonačnosti. Tom položaju odgovara granična vrijednost početne sferne  $\theta$ -koordinate<sup>7</sup> jednaka  $\pi$ . Ovim izborima potpuno smo parametrizirali početni položaj i brzinu projektila (u sustavu mete) te za njih uvodimo posebne oznake  $\vec{r}_0$  i  $\vec{v}_0$ , u smislu:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(\theta \rightarrow \pi) = \varrho_0 \hat{\rho} - \left( \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} z_0 \right) \hat{z}, \quad (13)$$

$$\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(\theta \rightarrow \pi) = v_0 \hat{z}. \quad (14)$$

Pri tome smo početni položaj u negativnoj beskonačnosti izabrali parametrizirati *pozitivnim* parametrom  $z_0$ , uz eksplicitno uveden minus, u svrhu olakšanog uvida u kasnije predznake. Sve ovo činimo kako bismo tu beskonačnost formalno držali pod kontrolom, što će kasnije postati bitno. Ovi početni uvjeti dovoljni su da bismo jednoznačno riješili jednadžbu gibanja (7) te odredili putanju projektila u sustavu mete. Izvod je ponuđen je u završnome Dodatku (poglavlje 3), dok ćemo ovdje samo navesti konačan rezultat.

Kako se različite putanje razlikuju prema udarnome parametru  $\varrho_0$ , možemo ga smatrati identifikacijskom oznakom pojedinog projektila<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>Sada *jest* opravdano prijeći s ranije  $\varphi$ -koordinate iz (12), punog raspona  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , na  $\theta$ -koordinatu raspona  $\theta \in [0, \pi]$  jer unaprijed znamo da za rješenje jednadžbe gibanja očekujemo jednu granu hiperbole, za koju je kutni raspon od najviše  $\pi$  sasvim dovoljan. Prednost takve parametrizacije je što se pri rješavanju problem ponaša kao da je dvodimenzionalan (samo su dvije relevantne koordinate: cilindrične  $\rho$  i  $z$  ili sferne  $r$  i  $\theta$ ).

<sup>8</sup>U trodimenzionalnom prostoru svaki pojedini projektil određen je još i specifičnom vrijednošću  $\varphi$ -koordinate, koja je jednaka i u cilindričnom i u sfernom koordinatnom sustavu. Međutim, zahvaljujući izabranom usmjerenju koordinatnih osi i sfernoj simetriji kulonske sile,  $\varphi$ -koordinata potpuno je nebitna pri rješavanju jednadžbe (7). U tom smislu, zapis početnog položaja iz (13) ne parametrizira samo jedan projektil, već čitav skup projektila: sve s početnim  $\rho$ -otklonom  $\varrho_0$ , a s bilo kojom vrijednošću kutne  $\varphi$ -koordinate. Drugim riječima, (13) predstavlja čitav „prsten“ početnih položaja, čime je osigurana puna trodimenzionalnost problema korištenjem samo dviju cilindričnih ( $\rho$  i  $z$ ) ili sfernih ( $r$  i  $\theta$ ) koordinata.



Stoga želimo da ovisnost o  $q_0$ , tj. „potpis“ specifične putanje bude jasno vidljiv u zapisu konačnog rješenja<sup>9</sup>:

$$r(\theta; q_0) = \frac{q_0^2}{\sqrt{q_0^2 + \kappa^2} \sin[\theta - \text{arctg}(q_0/\kappa)] - \kappa}. \quad (15)$$

Sve ostale, „pozadinske“ parametre obuhvatili smo pokratom:

$$\kappa \equiv \frac{Q_p Q_m}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2}. \quad (16)$$

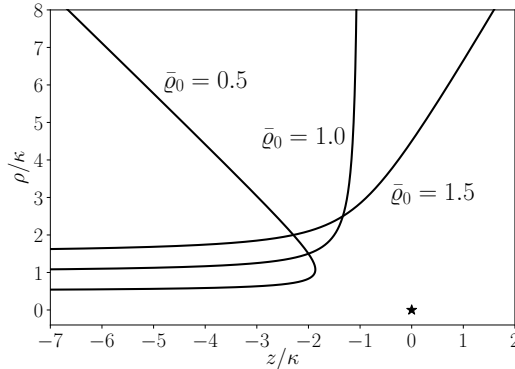
Po završetku izvoda u poglavlju 3, rješenje (15) prikazano je dvama ekvivalentnim oblicima iz (105). Jednakovaljanost svih triju zapisa može se pokazati korištenjem trigonometrijskih identiteta. Svaki ima svoje prednosti, ovisno o potrebama, i svaki posjeduje ovaj ili onaj oblik unutarnje elegancije. Vidimo da se zapis iz (15) savršeno uklapa u općenitu parametrizaciju čunjosječnica iz (12), pri čemu jednostavnom usporedbom izraza možemo identificirati sljedeće korespondencije:

$$\vartheta = \text{arctg}(q_0/\kappa); \quad e = \sqrt{(q_0/\kappa)^2 + 1}; \quad r_\vartheta = -q_0^2/\kappa.$$

Za odbojno raspršenje, kada je  $\kappa$  pozitivan zbog naboja projektila i mete istih predznaka, parametar  $r_\vartheta$  je negativan. To nije problem jer već znamo da je jedna od dviju grana hiperbole uvijek opisana negativnim vrijednostima radialne koordinate  $r$ . Tipično (za pozitivan  $r_\vartheta$ ), to je ona udaljenija od fokusa koji je ishodište te koordinate. U slučaju *odbojnog* raspršenja upravo je ta grana traženo rješenje, jer druga grana ne zadovoljava početne uvjete (13) i (14). Fizikalno, ona odgovara *privlačnom* raspršenju projektila suprotnog naboja, odaslanog iz suprotnog smjera. Stoga negativni parametar  $r_\vartheta$  osigurava da je relevantna grana hiperbole sada pozitivna.

Slika 2 prikazuje hiperbolične putanje projektila za nekoliko različitih vrijednosti udarnog parametra  $q_0$ . Na osima su navedene cilindrične koordinate koje se za svaku točku putanje, u (15) parametrizirane sfernim kutom  $\theta$ , izračunavaju temeljem dobro poznate veze sa sfernim koordinatama:  $z(\theta) = r(\theta) \cos \theta$  i  $\rho(\theta) = r(\theta) \sin \theta$ . Sve duljinske veličine prikazane su u skaliranim, bezdimenzionalnim koordinatama označenima crticom nad danom veličinom, u smislu:  $\tilde{x} = x/\kappa$ . Naime, možemo primijetiti da skaliranjem svih duljinskih veličina duljinskom skalom  $\kappa$  (konkretno,

<sup>9</sup>U ovome radu sustavno koristimo uobičajenu definiciju funkcije arkus *kotangens* ( $\text{arctg } x = \pi/2 - \text{arctg } x$ ) zato jer ona, za razliku od arkus tangens, vraća vrijednosti s prirodnog intervala sfernog kuta  $\theta$ , od 0 do  $\pi$ .



Slika 2. Primjeri hiperboličnih putanja za odbojno Rutherfordovo raspršenje nabijenog projektila (unaprijed, unatrag te okomito na upadni smjer) u sustavu nabijene mete, prikazane zvjezdicom u ishodištu. Udarni parametri izraženi su skaliranim vrijednostima  $\bar{q}_0 = \varrho_0/\kappa$ .

$\bar{r} = r/\kappa$  i  $\bar{q}_0 = \varrho_0/\kappa$ ), jednadžba putanje poprima univerzalan oblik neovisan o pozadinskim parametrima iz  $\kappa$ :

$$\bar{r}(\theta; \bar{q}_0) = \frac{\bar{q}_0^2}{\sqrt{\bar{q}_0^2 + 1} \sin(\theta - \text{arctg } \bar{q}_0) - 1}. \quad (17)$$

Ovo svojstvo propagira se u sve daljnje rezultate te je vrlo prikladno za analizu i prikazivanje rezultata, bez potrebe za izabiranjem specifičnih vrijednosti parametra  $\kappa$ . Stoga sve kasnije grafičke rezultate prikazujemo upravo u tako skaliranim koordinatama. Ovo također pokazuje da Rutherfordovo raspršenje ima prirodnu duljinsku skalu (upravo  $\kappa$ ), unutar koje se odvija bitan dio međudjelovanja, tj. gdje se može očekivati najveći doprinos raspršenju.

Na slici 2 projektili su izabrane tako da je u sustavu mete jedan raspršen unatrag ( $\bar{q}_0 < 1$ ), jedan okomito na upadni smjer ( $\bar{q}_0 = 1$ ), a jedan unaprijed ( $\bar{q}_0 > 1$ ). Da je upravo putanja s  $\bar{q}_0 = 1$ , tj.  $\varrho_0 = \kappa$  ona koja je na granici između tih režima, lako je potvrditi provjerom konačnog kuta raspršenja. On se u (15) manifestira iščezavanjem nazivnika, tj. divergencijom radialne koordinate duž udaljenog kraka hiperbole. Najelegantniji izraz za taj kut raspršenja, u oznaci  $\tilde{\theta}$ , možemo iščitati iz jednog od ekvivalentnih izraza u (105), odakle za relevantnu nultočku nazivnika nalazimo:

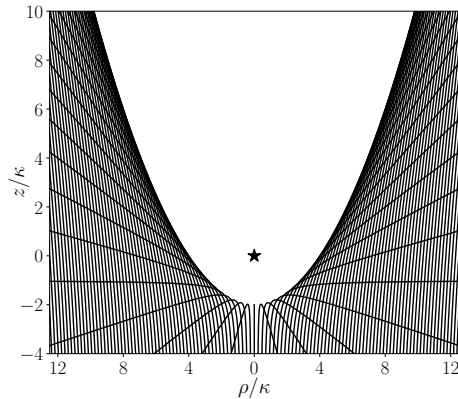
$$\tilde{\theta} = 2 \text{arctg}(\varrho_0/\kappa). \quad (18)$$

Prema tome, upravo  $\varrho_0 = \kappa$  vodi na  $\tilde{\theta} = \pi/2$ , tj. raspršenje okomito na upadni smjer. Zanimljivo je primijetiti da asimptote hiperbole ne prolaze kroz metu, što posebno vrijedi za asimptotu raspršenog kraka. Asimptota okomito raspršene putanje, tako, siječe  $z$ -os u  $z = -1$  umjesto u ishodištu gdje leži meta.

## 2 Sjena odbojnog raspršenja

U (sveučilišnoj) literaturi, a i u popularnim izvorima (npr. [7]) putanje projektila iz usmjerenog snopa dobro su poznate. Čak je dobro istražen i kvantnomehanički opis Rutherfordovog raspršenja u kojem je klasično gibanje projektila po izdvojenim putanjama zamijenjen opisom preko tzv. kvantnomehaničkih valnih funkcija [8]. No malo se poznatom čini činjenica da odbojno Rutherfordovo raspršenje baca sjenu! U to se vrlo lako možemo uvjeriti iscrtavanjem nekolicine različitih putanja na istome grafu, kao na slici 3. Prikazane putanje rješenja su iz (15) za različite vrijednosti udarnog parametra  $\varrho_0$ , uz sve ostale parametre iz  $\kappa$  iste, uključujući i početnu brzinu  $v_0$ . Sasvim je jasno da (u sustavu mete, prikazane zvijezdicom) postoji čitav dio prostora u koji ne dopire nijedna putanja. Upravo taj dio prostora smatramo sjenom raspršenja, u analogiji s uobičajenom, optičkom sjenom u koju ne dopiru zrake svjetlosti. Privlačno raspršenje dvaju naboja suprotnih predznaka ne stvara sjenu jer se putanje projektila (ponovno hiperbole) zakreću prema meti, umjesto od nje. Kako smanjujemo udarni parametar  $\varrho_0$ , tj. putanju projektila približavamo meti, tako se kod privlačnog raspršenja putanje sve više zakreću oko mete, prebrisujući čitav prostor i ne ostavljajući mjesta sjeni.

Najistaknutiji raniji tretmani sjene odbojnog raspršenja mogu se pronaći u [9, 10]. Valja primijetiti da jedan od tih izvora pedesetak, a drugi tridesetak godina star! Stoga postojanje sjene raspršenja nipošto nije novo otkriće. Međutim, ovaj aspekt raspršenja, matematički ne odviše zahtjevan jednom kad su nam poznati oblici putanja iz (15), još uvijek je razmjerno nepoznat i ne nalazi svoje mjesto u konvencionalnoj literaturi čak niti u obliku usputne napomene. U prilog tome govori i činjenica da pokušaji iscrtaivanja nekolicine putanja kao na slici 3 s vremena na vrijeme dovode do „ponovnih otkrića“ sjene raspršenja [11]. Kao odgovor na ovaj problem, na Fizičkome odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu izrađena su dva diplomatska rada [12, 13] te su kao rezultat tih istraživanja objavljena dva stručna članka [14, 15] u kojima su, vjerujemo, otkriveni i neki otprije nepoznati detalji geometrije raspršenja. Ovaj članak dio je nastojanja da se ova zanimljiva tema predstavi i još više približi domaćoj publici.



Slika 3. Nekolicina nagomilanih putanja iz (15), za različite  $\varrho_0$ , koje ukazuju na postojanje sjene odbojnog Rutherfordovog raspršenja.

## 2.1 Sustav mete

Određivanje sjene raspršenja svodi se na nalaženje rubnog područja prostora u koji putanje projektila ne dopiru: tzv. *anvelope* [16] skupa putanja iz (15). Pri tome podsjećamo da u proizvoljnom promatračkom sustavu rješenje (15) predstavlja *relativnu* putanju projektila s obzirom na metu. Prema definiciji relativne koordinate iz (6) vidimo da tu putanju možemo smatrati i apsolutnom ako i samo ako smo u sustavu u kojem od mete zahtijevamo da sve vrijeme miruje u ishodištu ( $\vec{r}_m = \vec{0}$ , identički, tako da  $\vec{r}_p = \vec{r}$ ). Takav sustav, po konstrukciji vezan uz metu, nazivamo upravo sustavom mete. Stoga moramo biti svjesni da izravnim promatranjem putanje iz (15), bez dodatnih preračunavanja oblika putanja između promatračkih sustava, analiziramo raspršenje projektila isključivo u sustavu mete. S fizikalne strane valja razumjeti da smo „učvršćenje“ mete postigli ciljanim izborom koordinatnog sustava, vezavši ishodište za metu svojom odlukom, a ne „pridržavanjem“ mete nekom vanjskom silom. U potonjem slučaju u početnoj jednadžbi gibanja (7) pojavila bi se masa samog projektila  $m_p$  umjesto reducirane mase  $\mu$ .

Pitanje koje sad postavljamo jest: od svih putanja iz (15) (za isti  $\kappa$ , a za različite  $\varrho_0$ ) koja pod danim kutom  $\theta$  dolazi najbliže metu? Uspijemo li to riješiti, tj. naći udarni parametar  $\varrho_0$  takve putanje, pripadnom točkom s te putanje odredit ćemo jednu od točaka anvelope: upravo onu pod kutom  $\theta$ . Kako je ovisnost o  $\varrho_0$  iz (15) glatka (nema naglih niti skokovitih promjena), udaljenost projektila od mete *pod danim kutom*  $\theta$  minimiziramo tipičnom metodom ekstremizacije, tj. nalaženjem nultočke derivacije po

relevantnom parametru  $q_0$ :

$$\left. \frac{dr(\theta; q_0)}{dq_0} \right|_{\tilde{q}_0} = \frac{\tilde{q}_0 \sin \theta - 2\kappa(1 + \cos \theta)}{\tilde{q}_0^3} r^2(\theta; \tilde{q}_0) = 0. \quad (19)$$

Pri tome tražimo upravo minimizacijsku vrijednost  $\tilde{q}_0$ . Prethodni zapis rezultata derivacije ne treba isprva biti sasvim očit, već preostaje nakon ponešto sređivanja. Derivaciju je pri tome najjednostavnije provesti koristeći jedan od alternativnih zapisa iz (105). Za iščezavanje prethodnog izraza odgovorna je nultočka brojnika, što vodi na minimizacijsku vrijednost:

$$\tilde{q}_0 = \frac{2\kappa(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} = \frac{2\kappa}{\operatorname{tg}(\theta/2)}. \quad (20)$$

Povratkom ove vrijednosti u (15) ili (105), čime pod danim kutom  $\theta$  zadržavamo točku upravo s one putanje koja među svim putanjama prilazi najbliže meti, preostaje:

$$r(\theta; \tilde{q}_0) = \frac{4\kappa}{1 - \cos \theta} = \frac{2\kappa}{\sin^2(\theta/2)}. \quad (21)$$

Ovo je tražena jednadžba ruba sjene (anvelope svih putanja) u sfernim koordinatama! Uspije li nas ovaj oblik rješenja podsjetiti na općenitu parametrizaciju čunjosječnica iz (12), tada možemo prepoznati da smo dobili jednadžbu parabole jer je pripadni ekscentricitet uz kosinusni član jednak 1. Ovime smo potvrdili slutnju koju je još ispočetka sugerirala slika 3. Preciznije, dobili smo jednadžbu *paraboloida* jer ako koordinate  $r$  i  $\theta$  doista tumačimo kao sferne koordinate prostora, nasuprot polarnim koordinatama ravnine, tada je njima parametrizirana dvodimenzionalna (paraboloidna) ploha u trodimenzionalnome prostoru. Međutim, da ne bismo ostali prepušteni nužnosti raspoznavanja parametarske jednadžbe parabole, izraz (21) dovest ćemo u prepoznatljiviji oblik. U tu svrhu prelazimo sa sfernih koordinata na cilindrične uobičajenim transformacijama  $z = r \cos \theta$  i  $\rho = r \sin \theta$ . Primjenom na (21) i eliminacijom člana  $\theta$  između izraza za  $z(\theta)$  i  $\rho(\theta)$  (postupak u nekoliko jednostavnih koraka koji ostavljamo čitatelju za samostalnu vježbu) dolazimo do eksplicitne ovisnosti  $z(\rho)$  jedne cilindrične koordinate sjene o drugoj. Da bismo izbjegli zabunu s jednadžbom putanje projektila, što će kasnije postati bitno, za  $z$ -koordinatu sjene koristit ćemo oznaku  $Z$ . U tako zapisanim cilindričnim koordinatama jednadžba sjene raspršenih projektila u sustavu mete poprima oblik:

$$\boxed{Z(\rho) = \frac{\rho^2}{8\kappa} - 2\kappa,} \quad (22)$$

što je svima prepoznatljiv oblik jednadžbe parabole, tj. paraboloida.

Prisjetimo se neovisnosti oblika putanja iz (17), nakon skaliranja duljinskim parametrom  $\kappa$ . Jednadžbu sjene, kao izravne posljedice takvih putanja, također možemo izraziti skaliranim, bezdimenzionalnim koordinatama:  $\bar{Z}(\bar{\rho}) = \bar{\rho}^2/8 - 2$ . Provjerimo još i fokalnu duljinu  $f$  (udaljenost fokusa i tjemena) dobivenog paraboloida. Budući da je vodeći koeficijent općenite kvadratne forme  $Z(\rho) = a\rho^2 + b\rho + c$  izravno određen fokalnom duljinom:  $a = 1/(4f)$ , temeljem usporedbe s vodećim članom iz (22) lako zaključujemo:  $f = 2\kappa$ . A kako je udaljenost tjemena od ishodišta u kojem leži meta jednaka je toj fokalnoj duljini:  $Z(0) = -2\kappa$ , zaključujemo da se meta nalazi točno u fokusu paraboloidne sjene!

\* \* \*

U [17] posebno je istaknuto kako se postupak minimizacije iz (19) uklapa u općeniti kontekst nalaženja anvelope [18, 19] kad je ovisnost skupa krivulja o relevantnim parametrima glatka. U [20, 21] pokazano je kako se do anvelope u našem specifičnom slučaju može doći i geometrijskom konstrukcijom, zaobilazanjem postupka iz (19).

## 2.2 Sustav centra mase

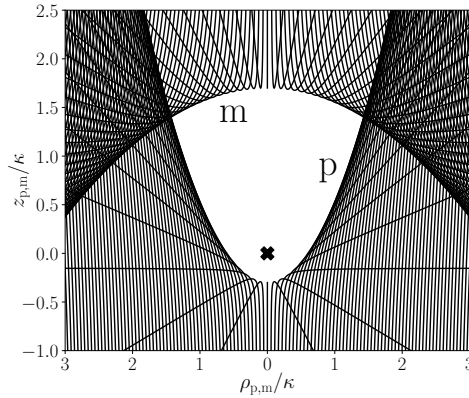
Jedan od najbitnijih sustava u fizici sustav je centra mase. Po (klasičnoj) definiciji to je onaj sustav u kojem centar mase, položaja definiranog u (4), sve vrijeme miruje ( $\vec{V}_{\text{cm}} = \vec{0}$ ) u ishodištu. Drugim riječima, to je onaj sustav za koji u (5) identički vrijedi:  $\vec{R}_{\text{cm}}(t) = \vec{0}$ . Uvrštavanjem tog zahtjeva u (9) i (10), putanje projektila i mete u sustavu centra mase možemo izraziti izravno preko otprije poznate relativne putanje  $\vec{r}$ :

$$\vec{r}_{\text{p}} = \lambda_{\text{m}}\vec{r}, \quad (23)$$

$$\vec{r}_{\text{m}} = -\lambda_{\text{p}}\vec{r}, \quad (24)$$

a koja se u sustavu mete istovremeno podudarala i sa samom putanjom projektila. U sustavu centra mase, čije se ishodište nalazi u samome centru mase negdje između projektila i mete<sup>10</sup>, i projektil i meta se gibaju, i to u suprotnim smjerovima. Stoga smo u (23) i (24) uveli eksplicitnu oznaku projektila i mete, no radi jednostavnosti zapisa izostavljamo oznaku sustava (centra mase) u kojem te relacije vrijede. Slika 4 prikazuje nekolicinu

<sup>10</sup>Transformacije iz (23) i (24) netrivialnije su nego što se čini. Naime, položaj centra mase mete i svakog pojedinog projektila je različit pa zahtjev  $\vec{R}_{\text{cm}} = \vec{0}$  za svaki projektil-meta par podrazumijeva da su „u matematičkoj pozadini“ putanje projektila tako prerasporedene u prostoru da se centri mase svakog projektil-meta para nađu u istoj točki, kako bismo imali jedinstven sustav centra mase za čitav snop projektila.



Slika 4. Nagomilane putanje projektila (odozdo) i mete (odozgo) u sustavu centra mase, za  $\lambda_m = 0.15$ , tj.  $\lambda_p = 0.85$ . U ishodištu (križić) leži centar mase sustava.

putanja iz (23) i (24) za odnos masa  $\lambda_m = 0.15$ , tj.  $\lambda_p = 0.85$ . Zbog središnje važnosti relativnog položaja  $\vec{r}$  unutar (23) i (24), podsjećamo na njegov raspis po svim dosad spominjanim vektorskim smjerovima (sfernim, cilindričnim i Kartezijevim) korištenjem isključivo sfernih koordinata za same komponente jer je upravo njima parametriziran izraz (15):

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{\varrho_0, \varphi}(\theta) &= r(\theta; \varrho_0) \hat{r} \\
 &= r(\theta; \varrho_0) \sin \theta \hat{\rho} + r(\theta; \varrho_0) \cos \theta \hat{z} \\
 &= r(\theta; \varrho_0) \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + r(\theta; \varrho_0) \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + r(\theta; \varrho_0) \cos \theta \hat{z}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Ovdje smo uveli eksplicitne oznake za ovisnost relativne putanje  $\vec{r}$  o *varijabli*  $\theta$  i *parametrima*  $\varrho_0$  i  $\varphi$ . Naime, putanja je jednodimenzionalni objekt pa njezine točke mogu biti parametrizirane samo jednom nezavisnom varijablom, čiju ulogu u našem slučaju ima  $\theta$ . S druge strane, udarni parametar  $\varrho_0$  i druga sferna koordinata  $\varphi$  određuju koju točno putanju promatramo te su za danu putanju konstantni parametri. Pri tome također valja primijetiti da je ishodište relativnog položaja, tj. hvatište jediničnih vektora iz (25) prema definiciji iz (6) u samoj meti. S druge strane, nakon transformacija iz (23) i (24) položaji  $\vec{r}_p$  i  $\vec{r}_m$  u sustavu centra mase izravno nasljeđuju *smjerove* jediničnih vektora iz (25), no prema definicijama (9) i (10) hvatište svih tih jediničnih vektora pomiče se u centar mase kao novo ishodište sustava.

Sada želimo odrediti oblik sjene u sustavu centra mase ponavljanjem postupka minimizacije iz (19), no ovaj put koristeći nove radialne koordinate  $r_p$  projektila iz (23). Sve one samo su skalirane konstantnim članom  $\lambda_m$  s obzirom na one iz (15):  $r_p = \lambda_m r$ . Stoga se minimizacijski uvjet:

$$\left. \frac{dr_p(\theta; \varrho_0)}{d\varrho_0} \right|_{\tilde{\varrho}_0} = \lambda_m \left. \frac{dr(\theta; \varrho_0)}{d\varrho_0} \right|_{\tilde{\varrho}_0} = 0 \quad (26)$$

samo prividno mijenja. Budući da se svodi na nalaženje nultočke istog brojnika kao i u (19), minimizacijsko rješenje  $\tilde{\varrho}_0$  potpuno je jednako onome iz (20). Međutim, njegovim povratkom u  $r_p(\theta; \varrho_0)$ , kao u (21), jednadžba  $r_p(\theta; \tilde{\varrho}_0) = \lambda_m r(\theta; \tilde{\varrho}_0)$  paraboloidne anvelope u sfernim koordinatama nasljeđuje dodatni multiplikativni član  $\lambda_m$ . Isti član propagira se i u cilindrične koordinate anvelope ( $z_p = r_p \cos \theta$  i  $\rho_p = r_p \sin \theta$ ), što nakon eliminacije kuta  $\theta$  vodi na novu jednadžbu sjene projektila u sustavu centra mase:

$$\boxed{\mathbb{Z}_p(\rho_p) = \frac{\rho_p^2}{8\lambda_m \kappa} - 2\lambda_m \kappa,} \quad (27)$$

gdje za  $z$ -koordinatu sjene koristimo oznaku  $\mathbb{Z}_p$ , analognu onoj iz (22). Iz (23) i (24) sasvim je jasno da se u sustavu centra mase giba i meta, i to na način potpuno simetričan gibanju projektila. Stoga u sustavu centra mase i meta baca svoju sjenu. Zahvaljujući uočenoj simetriji gibanja, u sustavu centra mase uvijek možemo zamijeniti uloge projektila i mete jednostavnom zamjenom oznaka  $p \leftrightarrow m$ . Sjenu mete zato ne trebamo izvoditi iznova, već je možemo odmah rekonstruirati iz (27):

$$\boxed{\mathbb{Z}_m(\rho_m) = -\frac{\rho_m^2}{8\lambda_p \kappa} + 2\lambda_p \kappa,} \quad (28)$$

pri čemu smo zamjenom svih predznaka uzeli u obzir da meta dolazi iz suprotnog smjera, s pozitivne strane  $z$ -osi.

U sustavu centra mase sjene dvaju naboja općenito su različitoga oblika, u skladu s primjerom sa slike 4. Za razliku od sustava mete, u sustavu centra mase samo je konačan dio prostora potpuno zasjenjen, na način da u njega ne dopire nijedna putanja, niti projektila niti mete. Provjerom fokalnih duljina temeljem vodećih koeficijenata iz (27) i (28) nalazimo:  $f_p = 2\lambda_m$  i  $f_m = 2\lambda_p$ . Obje duljine ponovno odgovaraju udaljenostima tjemena pripadnih sjena od ishodišta koordinatnog sustava, što je izravno vidljivo iz slobodnih članova. Stoga zaključujemo da obje sjene dijele jedan te isti fokus, koji se također podudara i s položajem centra mase sustava. Još jedna matematička podudarnost gotovo predobra da bi bila istinita!



## 2.3 Kogibajući i laboratorijski sustav

Transformacijama (9) i (10) u mogućnosti smo prijeći u bilo koji promatrački sustav. Ta sloboda izbora manifestira se kroz oblik vremenske (ili kakve druge) ovisnosti položaja centra mase  $\vec{R}_{\text{cm}}$  u izabranom sustavu. Drugim riječima, o izboru promatračkog sustava ovisi gibanje para projektil-meta kao cjeline<sup>11</sup>. Prema tome, sustav iz kojeg promatramo problem izravno određujemo oblikom ponašanja  $\vec{R}_{\text{cm}}$ . Od svih mogućih sustava promatrat ćemo *inercijalne* sustave, tj. neubrzanе sustave u kojima na projektil i metu ne djeluju vanjske sile pa se njihov centar mase po inerciji giba jednoliko pravocrtno, konstantnom brzinom  $\vec{V}_{\text{cm}}$  iz (5). Još restriktivnije, promatrat ćemo samo one sustave u kojima se centar mase projektila i mete giba u smjeru početne brzine projektila. Još od (14) taj smjer odgovara usmjerenju z-osi, tako da razmatramo samo one sustave u kojima se centar mase giba isključivo duž z-osi:  $\vec{V}_{\text{cm}} = V_{\text{cm}}\hat{z}$ . Također ćemo zahtijevati da se meta u početnome trenutku nalazi u ishodištu sustava:

$$\vec{r}_m(t=0) = \vec{0}. \quad (29)$$

Početni položaj projektila mora biti dosljedan s ranijim uvjetom (13) za početni *relativni* položaj projektila i mete. Određujemo ga iz (6), (13) i (29):

$$\vec{r}_p(t=0) = q_0\hat{\rho} - \left( \lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0 \right) \hat{z}. \quad (30)$$

Ovakav specifičan podskup svih mogućih inercijalnih sustava nazvat ćemo *kogibajućim sustavima*, gibanja usporednog početnome snopu projektila. Među njima posebno se ističe *laboratorijski sustav*, definiran dodatnim zahtjevom da meta u početnome trenutku miruje:  $\vec{r}_m(t=0) = \vec{0}$ .

Na prvi pogled može se učiniti da prijelaz u kogibajući sustav nije ništa više od pukog, ne osobito zanimljivog tehničkog postupka. Međutim, sada stvari postaju doista zanimljive, a sve naše možebitne koncepcije o banalnosti postupka redom će se pokazati pogrešnima. Vrlo brzo otkrit ćemo da: (1) suprotno očekivanjima, sjena raspršenja ne može nastati u bilo kojem kogibajućem sustavu; (2) računski postupak postaje bitno zanimljiviji pojavom divergencije koju ćemo morati ukrotiti te polinoma petog stupnja s kojim ćemo se morati numerički obračunati; (3) sjena, ako postoji, više nije paraboloidna; (4) otvara se mogućnost nagle promjene u kvalitativnom ponašanju sjene, koja ima sva matematička obilježja faznog prijelaza nalik termodinamičkome prijelazu između plina i tekućine!

<sup>11</sup> Ako se centar mase projektila i mete giba spram promatrača brzinom  $\vec{V}_{\text{cm}}$ , promatrač se, naravno, spram istog centra mase giba u suprotnome smjeru, brzinom  $-\vec{V}_{\text{cm}}$ . Stoga promatračke sustave jednako dobro možemo razlikovati i prema gibanju samog promatrača.

### 2.3.1 Uvjeti postojanja sjene

Netko s dobrom intuicijom za kinematiku prijelaza između promatračkih sustava mogao bi naslutiti postojanje određenih ograničenja na samu *mogućnost* nastanka sjene raspršenja u danom kogibajućem sustavu. Stoga pokušajmo unaprijed predvidjeti takva ograničenja kako ih naknadno ne bismo morali tražiti među matematičkim svojstvima konačnog oblika sjene, koji će se ionako pokazati podosta složenim za analizu. U takvim razmatranjima obično krećemo od sustava centra mase jer u njemu projektil-meta par *kao cjelina* miruje<sup>12</sup> pa se sustav centra mase ponaša kao svojevrsna referentna točka za analizu bilo kojeg drugog sustava (činjenica da se projektil i meta zasebno ipak gibaju svojstvo je gibanja *unutar* sustava).

Gibanje projektila u sustavu centra mase potpuno je određeno ovisnošću izraza (23) o relevantnim parametrima. Smatramo li poznatom vremensku ovisnost te putanje  $\vec{r}_p(t)$ , dobro utvrđenim matematičkim operacijama iz nje izvlačimo željene podatke: prvom vremenskom derivacijom brzinu projektila, drugom derivacijom njegovo ubrzanje, itd. Stoga za njegovu početnu brzinu imamo:  $\dot{\vec{r}}_p(t=0) = \lambda_m \dot{\vec{r}}(t=0)$ , a posredstvom (14) dalje vidimo:  $\dot{\vec{r}}_p(t=0) = \lambda_m v_0 \hat{z}$ . Dakle, iznos početne brzine projektila u sustavu centra mase jest  $\lambda_m v_0$ . Sad nas zanima iznos brzine projektila u bilo kojem kasnijem trenutku. Dok se približava meti, ona ga odbojnom kulonskom silom usporava, dakle brzina mu se smanjuje. No nakon najbližeg približenja (vidi sliku 2) počinje se udaljavati od mete, koja ga sada odbojnom silom ubrzava od sebe. Vidimo da je tijekom početnog približavanja maksimalni iznos brzine projektila upravo početna vrijednost  $\lambda_m v_0$ , jer se nakon toga smanjuje. No hoće li ga tijekom udaljavanja meta ubrzati na koju veću vrijednost? Primijetimo da pukim skaliranjem iz (23) projektil zadržava hiperbolični oblik putanje (15) iz sustava mete. Kako je hiperbola simetrična oko simetrale svojih asimptota (pravca koji prolazi spojnicom mete i tjemena hiperbole), iznosi kinematičkih veličina također su simetrični duž „ulaznog“ i „izlaznog“ kraka, tijekom približavanja i tijekom udaljavanja. Stoga zaključujemo da iznos brzine projektila tijekom ubrzanja raste upravo prema početnoj vrijednosti  $\lambda_m v_0$ . Prema tome,  $\lambda_m v_0$  je apsolutni maksimum iznosa brzine projektila u sustavu centra mase<sup>13</sup>.

<sup>12</sup>Kogibajući sustav s  $V_{cm} = 0$  ne podudara se sa sustavom centra mase, zbog razlike u ishodištu, a i zbog prostornog preuređenja putanja u sustavu centra mase, koje smo već komentirali. Prema (29), ishodište kogibajućeg sustava podudara se s početnim položajem mete, dok je ishodište sustava centra mase uvijek između projektila i mete. Za  $\vec{R}_0$  iz (5) u sustavu centra mase identički vrijedi  $\vec{R}_0 = \vec{0}$ , a u kogibajućem sustavu s  $V_{cm} = 0$  prema (4), (29) i (30) za svaki pojedini projektil-meta par imamo:  $\vec{R}_0 = \lambda_p \vec{r}_p(t=0)$ .

<sup>13</sup>Ovo se još jednostavnije pokazuje očuvanjem ukupne energije, koja se sastoji od kinetičkih i potencijalnih doprinosa. No energiju nismo dosad spominjali pa nećemo ni ovdje.

Promotrimo sada gibanje projektila u kogibajućem sustavu u kojem se centar mase (tj. projektil-meta par kao cjelina) giba brzinom  $\vec{V}_{\text{cm}} = V_{\text{cm}}\hat{z}$ . Posebno je korisno promatrati ponašanje tjemena sjene, koje nastaje kao posljedica odboja *frontalne* putanje unatrag, tj. putanje projektila udarnog parametra  $\varrho_0 = 0$ , koji izravno nalijeće na metu. Ako se u danom kogibajućem sustavu frontalna putanja uspije odbiti unatrag, tjeme sjene uspjete će se stvoriti. Na temelju kontinuiranosti prijelaza između putanja, tj. glatkog ponašanja putanja s promjenom udarnog parametra  $\varrho_0$ , zaključujemo da će se uspjete oblikovati i dijelovi sjene u neposrednoj blizini tjemena. Stoga zaključujemo da u takvim sustavima sjena raspršenja postoji.

No što ako je brzina  $V_{\text{cm}}$  toliko visoka da se frontalni projektil ne može odbiti unatrag pa se sve vrijeme nastavlja gibati unaprijed? Tjeme sjene više se ne može stvoriti u  $\rho_p = 0$ . Mogu li se barem oblikovati neki ostali dijelovi sjene? Za to promotrimo  $z$ -komponentu konačne brzine bilo kojeg projektila. Već smo zaključili da je  $\lambda_m v_0$  konačni i maksimalni iznos brzine svih projektila u sustavu centra mase. U negativnom  $z$ -smjeru upravo frontalni projektil postiže taj iznos, tj. baš je on „najače odbijen unatrag“. Konačne brzine svih ostalih projektila „manje su usmjerene unatrag“ zbog otklona od  $z$ -osi po završetku raspršenja, i to pod kutom raspršenja iz (18). Zaključujemo: za  $z$ -komponentu brzine bilo kojeg projektila u sustavu centra mase, u privremenoj oznaci  $\mathcal{V}_z(\varrho_0)$ , uvijek vrijedi  $\mathcal{V}_z(\varrho_0) \geq -\lambda_m v_0$ . Ako je frontalni projektil potisnut unaprijed previsokom brzinom centra mase, tako da  $V_{\text{cm}} - \lambda_m v_0 \geq 0$ , onda se niti jedan drugi projektil ni u kojem trenutku ne može raspršiti unatrag. Slijedi da se tjeme sjene nigdje ne može stvoriti, a argumentom kontinuiranosti niti koji drugi dio sjene. Dakle, pod prethodnim uvjetom na brzinu centra mase, ekvivalentnog oblika  $V_{\text{cm}} \geq \lambda_m v_0$ , svi projektili nastavljaju se gibati unaprijed (ne strogo duž  $z$ -osi, već  $z$ -komponenta brzine sve vrijeme ostaje pozitivna). Njihove putanje prebrisuju čitav prostor, a sjena raspršenja postaje neostvariva!

Postoji još jedan zanimljiv, komplementaran scenarij. Kako je  $\lambda_m v_0$  maksimalan iznos ukupne brzine bilo kojeg projektila u sustavu centra mase, to posebno vrijedi i za  $z$ -komponentu; u ranijoj oznaci:  $\mathcal{V}_z(\varrho_0) \leq \lambda_m v_0$ . Samu maksimalnu vrijednost ostvaruju svi projektili u početnome trenutku, kad su tek odaslani prema meti, upravo duž  $z$ -osi. Giba li se sada centar mase tolikom brzinom unatrag da je maksimalna  $z$ -komponenta brzine projektila u kogibajućem sustavu potisnuta unatrag:  $V_{\text{cm}} + \lambda_m v_0 \leq 0$ , tada se i u svakom kasnijem trenutku projektili nastavljaju gibati unatrag. Kako su u kogibajućem sustavu projektili ispušteni s početnog položaja (30) beskonačno udaljenog od ishodišta, pod upravo identificiranim uvjetom  $V_{\text{cm}} \leq -\lambda_m v_0$  svi projektili još se više udaljavaju od ishodišta, nikad ne

dopirući na konačnu udaljenost od mete. Stoga možemo reći da je u tom slučaju zasjenjen čitav prostor (jer nijedna putanja ne zadire u dio prostora „konačnih koordinata“), što nazivamo *trivijalnom sjenom raspršenja*. Sam oblik sjene u tom slučaju određen je beskonačno udaljenom ravninom početnih položaja iz (30) s koje su ispušteni svi projektili.

Vidjeli smo, dakle, da u slučaju  $V_{\text{cm}} \geq \lambda_m v_0$  sjena raspršenja uopće ne postoji, a u slučaju  $V_{\text{cm}} \leq -\lambda_m v_0$  njezina se granica ne nalazi na konačnoj udaljenosti od ishodišta. Zaključujemo da (netrivijalna) sjena postoji jedino pod uvjetom:

$$-\lambda_m v_0 < V_{\text{cm}} < \lambda_m v_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_m > |V_{\text{cm}}|/v_0. \quad (31)$$

Lijevi uvjet zahtjev je na brzinu centra mase projektila i mete znamo li odnos masa iz  $\lambda_m$ . Desni uvjet ograničenje je na odnos njihovih masa znamo li u kojem se kogibajućem sustavu nalazimo. Kako prema (11) uvijek vrijedi  $\lambda_m \leq 1$ , sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja ni u kakvim okolnostima ne može postojati u kogibajućem sustavu u kojem se centar mase projektila i mete giba brže od njihove početne relativne brzine ( $|V_{\text{cm}}| \geq v_0$ ).

### 2.3.2 Putanje u kogibajućem sustavu

Kad bismo htjeli provesti detaljan izvod putanja projektila u kogibajućem sustavu, trebali bismo unaprijed poznavati određene detalje izvoda iz poglavlja 3. Da ovdje ne bismo odveć odvlačili od glavne poante, tek ćemo ukratko predstaviti najvažnije i najzanimljivije korake. Zainteresirani čitatelj čitav izvod može pronaći u [13, 15].

Početni korak je određivanje veze između geometrijskih parametara putanje i vremena  $t$  proteklog od ispuštanja projektila. To vrijeme od središnje je važnosti u (5) za opis gibanja centra mase u danom kogibajućem sustavu. U izvodu iz poglavlja 3 početna točka za određivanje te ovisnosti diferencijalna je jednadžba (62). Dok su u njoj izbor sferne koordinate  $\varphi$  i oblik člana  $\ell$  iz (61) prilagođeni općenitom izvodu putanja u kulonskome polju, ovdje odmah navodimo oblik relacije prilagođen našem specifičnom problemu raspršenja. Notacijskim prijelazom  $\varphi \rightarrow \theta$  te identifikacijom  $\ell = -\varrho_0 v_0$  iz početnih uvjeta (13) i (14), imamo:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varrho_0 v_0}{r^2(\theta; \varrho_0)}. \quad (32)$$

Kako nam je rješenje  $r(\theta; \varrho_0)$  iz (15) poznato kao funkcija kutnog parametra  $\theta$ , prethodni izraz ovako dovodimo u oblik spreman za integraciju:

$$\int_0^{t(\theta; \varrho_0)} dt' = -\frac{1}{\varrho_0 v_0} \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2(\theta'; \varrho_0) d\theta'. \quad (33)$$

gdje crtica formalno razlikuje varijable integracije od varijabli iz granica integracije. Navodimo primitivnu funkciju za integral s desne strane:

$$\int^{\theta} r^2(\theta'; \varrho_0) d\theta' = -(\varrho_0 \cos \theta + \kappa \sin \theta) r(\theta; \varrho_0) + \kappa \varrho_0 \ln \left( \frac{\varrho_0}{\kappa} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - 1 \right) \quad (34)$$

kako bi se čitatelj sam mogao uvjeriti da uvrštavanje donje granice integracije  $\theta_0 \rightarrow \pi$  iz (33) vodi na divergenciju rješenja. Naglašavamo da se doista radi o neograničenome rastu, a ne neodređenome izrazu od kojeg bismo očekivali dobro definiranu konačnu graničnu vrijednost. Ta beskonačnost je stoga nepovratno usađena u rješenje  $t(\theta; \varrho_0)$  trivijalnog (lijevog) integrala iz (33). Posredstvom pomaka  $\vec{V}_{\text{cm}} t$  iz (5) koji je preko (10) ugrađen u putanju mete u kogibajućem sustavu:

$$\vec{r}_m(\theta; \varrho_0) = \vec{R}_0 + \vec{V}_{\text{cm}} t(\theta; \varrho_0) - \lambda_p \vec{r}(\theta; \varrho_0) \quad (35)$$

zaključujemo da će se sama meta odmaknuti beskonačno daleko s početnog položaja prije nego li se nađe s projektilom na kakvoj konačnoj udaljenosti. Ovo je lako razumjeti jer projektil konačnom brzinom mora s početnog položaja (30) prijeći beskonačnu udaljenost do mete, dok se sve to (beskonačno potrebno) vrijeme meta udaljava od ishodišta, i zbog kulonskog odboja i zbog stalnog gibanja centra mase sustava.

Je li ovime daljnji račun postao beznadan? Nipošto! Sve što trebamo je na formalno ispravan način parametrizirati beskonačnost koja se pojavljuje te je limesima izolirati od ostatka izraza. Upravo smo zato još od (13) za početnu udaljenost duž z-osi uveli kontrolni (pozitivni) parametar  $z_0$ . Za koordinate iz sustava mete, iz kojeg smo preuzeli početnu diferencijalnu jednadžbu (32), uvijek vrijedi  $\operatorname{ctg} \theta = z/\rho$ . Stoga isto vrijedi i u početnom trenutku iz (13), kad je  $z(t=0) = -\lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0$  i  $\rho(t=0) = \varrho_0$ . Sada je jednostavno reparametrizirati početni kutni otklon iz (33) kao<sup>14</sup>:

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow \pi} \theta_0 = \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \operatorname{arcctg}(-z_0/\varrho_0), \quad (36)$$

Uvrštavanjem ovako preinačene donje granice integracije u primitivnu funkciju iz (34), od čitavog desnog integrala iz (33) preostaje izraz u kojem neki članovi nose ovisnost o  $\theta$ , dok drugi nose limesom „ukročenu“ beskonačnost  $z_0$ . Još nećemo posebno izolirati te divergentne doprinose, sve dok ne dođemo do relevantnog izraza u kojem će biti najpraktičnije provesti tu ekstrakciju.

<sup>14</sup>Zašto uopće prelazimo na parametrizaciju preko  $z_0$  umjesto da smo samo nastavimo s  $\theta_0$ ? Jer su sve putanje iz (30) puštene s istog početnog  $z_0$ , a ne  $\theta_0$ ! Uskoro će nam trebati i eksplicitan uvid u svu ovisnost o udarnome parametru  $\varrho_0$ , a koja je, prema (36), dijelom skrivena unutar  $\theta_0$ . Stoga je trebamo jasno „ogoliti“.

Kao rezultat uspješno provedene integracije iz (33) sad imamo vremensku ovisnost  $t(\theta; \varrho_0)$  koju ovdje nećemo raspisivati, već ćemo samo ilustrirati daljnji postupak. Kombinacijom (5) i (9) nalazimo izraz za putanju projektila u kogibajućem sustavu:

$$\vec{r}_p(\theta; \varrho_0) = \vec{R}_0 + \vec{V}_{\text{cm}} t(\theta; \varrho_0) + \lambda_m \vec{r}(\theta; \varrho_0) \quad (37)$$

u koji trebamo uvrstiti upravo određeni  $t(\theta; \varrho_0)$ . Podsjećamo da je prema našoj definiciji kogibajućeg sustava:  $\vec{V}_{\text{cm}} = V_{\text{cm}} \hat{z}$ . Raspis relativnog  $\vec{r}$  po komponentama već imamo iz (25). Početni položaj centra mase  $\vec{R}_0$  izravno slijedi uvrštavanjem (29) i (30) u (4), odakle je:  $\vec{R}_0 = \lambda_p \vec{r}_p(t=0)$ . Nakon zgrtanja svih doprinosa, lako identificiramo  $\rho$ - i  $z$ -komponentu rezultata:  $\vec{r}_p(\theta; \varrho_0) = \rho_p(\theta; \varrho_0) \hat{\rho} + z_p(\theta; \varrho_0) \hat{z}$ , gdje je:

$$\rho_p(\theta; \varrho_0) = \lambda_p \varrho_0 + \lambda_m r(\theta; \varrho_0) \sin \theta, \quad (38)$$

$$z_p(\theta; \varrho_0) = -\lambda_p \lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0 + V_{\text{cm}} t(\theta; \varrho_0) + \lambda_m r(\theta; \varrho_0) \cos \theta. \quad (39)$$

Vidimo da se sve beskonačnosti  $z_0$ , neke još uvijek skrivene unutar izraza za  $t(\theta; \varrho_0)$ , pojavljuju samo u  $z$ -komponenti. Nakon detaljnog raspisa (koji ostavljamo čitatelju za vježbu) napokon ih izoliramo od konačnog ostataka izraza, skupljajući ih sve unutar člana:

$$\mathcal{Z}_0 \equiv \left( \frac{V_{\text{cm}}}{v_0} - \lambda_p \right) \lim_{z_0 \rightarrow \infty} z_0 + \frac{V_{\text{cm}}}{v_0} \kappa \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \ln \frac{2z_0}{\kappa e}. \quad (40)$$

Ovdje se dodatno pojavljuje baza e prirodnog logaritma kao posljedica strateške apsorpcije i određenih konstantnih članova, kako ih ne bismo stalno povlačili za sobom u relevantnom ostatku ovisnosti. Sada je  $z$ -komponenta rastavljena na način:  $z_p(\theta; \varrho_0) = \mathcal{Z}_0 + \mathcal{Z}_p(\theta; \varrho_0)$ , gdje je upravo  $\mathcal{Z}_p(\theta; \varrho_0)$  konačan, relevantan ostatak ovisnosti s kojim ćemo dalje računati. Prijelazom na  $\mathcal{Z}_p$ -koordinatu pomaknuli smo ishodište sustava za  $\mathcal{Z}_0$  duž  $z$ -osi, što znači da nastavljamo promatrati raspršenje oko točke beskonačno udaljene od početnog položaja mete.

Koordinatama  $\rho_p(\theta; \varrho_0)$  i  $\mathcal{Z}_p(\theta; \varrho_0)$  sad su potpuno određene putanje projektila u kogibajućem sustavu, no u parametarskom obliku! Kutni parametar  $\theta$  sve je vrijeme ostao izvorna kutna koordinata iz sustava mete (ishodišta vezanog za metu) i više ne odgovara sfernoj kutnoj koordinati  $\theta_p$  iz kogibajućeg sustava<sup>15</sup>, a koja je sada dana s:  $\theta_p = \text{arcctg}(\mathcal{Z}_p / \rho_p)$ .

<sup>15</sup>Zgodno je napraviti usporedbu s poznatom parametrizacijom Kartezijevih koordinata elipse:  $x = a \cos \alpha$  i  $y = b \sin \alpha$ . Uz duljine  $a$  i  $b$  dviju poluosi elipse, parametar  $\alpha$  podsjeća na polarnu koordinatu  $\varphi$ , po analogiji s parametrizacijom kružnice radijusa  $R$ :  $x = R \cos \varphi$  i  $y = R \sin \varphi$ . Da  $\alpha$  ipak nije polarni kut lako se uvjerimo iz:  $\text{tg } \varphi = y/x = (b/a) \text{tg } \alpha$ .

Složenost izraza za  $\rho_p$  i (posredno) za  $Z_p$  iz (38) i (39) sugerira da će biti jednostavnije nastaviti s njima negoli s još složenijom radijalnom udaljenošću  $\sqrt{\rho_p^2 + Z_p^2}$  od novog ishodišta, pomaknutog za  $Z_0$ . Nadalje, radi transparentnosti daljnjih razmatranja želimo izraziti ovisnost jedne koordinate o nekoj drugoj iz istog sustava, stoga iz ovisnosti  $\rho_p(\theta; \varrho_0)$  i  $Z_p(\theta; \varrho_0)$  eliminiramo parametar  $\theta$  kako bismo izravno povezali  $\rho_p$  i  $Z_p$ . Ovaj postupak ostavljamo za vježbu zainteresiranome čitatelju. Pri tome je uputno izraziti član  $\text{tg}(\theta/2)$  u ovisnosti o  $\rho_p$  te ga uvrstiti u izraz za  $Z_p$ , nakon čega preostaje rješenje za oblik putanje projektila u kogibajućem sustavu, pomalo zastrašujućeg izgleda:

$$\boxed{Z_p(\rho_p; \varrho_0) = \frac{V_{\text{cm}}}{v_0} \kappa \left( \frac{\rho_p}{\lambda_m \varrho_0} + \ln \frac{\rho_p - \varrho_0}{\lambda_m \varrho_0} - \frac{\lambda_p}{\lambda_m} \right) + \left( \frac{V_{\text{cm}}}{\lambda_m v_0} + 1 \right) \left( \frac{\varrho_0(\rho_p - \varrho_0)}{2\kappa} - \frac{\kappa(\rho_p - \lambda_p \varrho_0)^2}{2\varrho_0(\rho_p - \varrho_0)} \right)} \quad (41)$$

Puni zapis putanje sada je oblika:  $\vec{r}_p(\rho_p; \varrho_0) = \rho_p \hat{\rho} + [Z_0 + Z_p(\rho_p; \varrho_0)] \hat{z}$ .

### 2.3.3 Sjena u kogibajućem sustavu

Kao i u ranijim postupcima ekstremizacije iz (19) i (26), želimo odrediti krajnju putanju „iza“ koje ne dopire nijedna druga, a kojom će biti određena točka s ruba sjene raspršenja. Pri tome ponovno moramo definirati geometrijske okolnosti pod kojima je tražimo. Ranije smo tražili putanju koja *pod danim kutom*  $\theta$  najbliže prilazi ishodištu radijalne koordinate  $r$ . Kako sada imao ovisnost  $Z$ -koordinate o  $\rho$ -koordinati, pitamo se: *na danoj udaljenosti*  $\rho_p$  *od z-osi*, koja putanja (za koji udarni parametar  $\varrho_0$ ) postiže ekstremalan doseg duž iste osi? Odgovor ponovno nalazimo tipičnim postupkom ekstremizacije: deriviranjem izraza (41) po udarnome parametru  $\varrho_0$  te nalaženjem nultočke  $\tilde{\varrho}_0$  dobivene derivacije:

$$\boxed{\left. \frac{dZ_p(\rho_p; \varrho_0)}{d\varrho_0} \right|_{\tilde{\varrho}_0} = \left\{ (\lambda_m v_0 + V_{\text{cm}}) \tilde{\varrho}_0^2 (\rho_p - 2\tilde{\varrho}_0) (\rho_p - \tilde{\varrho}_0)^2 + \right. \\ \left. [\lambda_m (\lambda_m v_0 + V_{\text{cm}}) \tilde{\varrho}_0 - (\lambda_m v_0 - V_{\text{cm}}) (\rho_p - \tilde{\varrho}_0)] \times \right. \\ \left. \kappa^2 \rho_p (\lambda_p \tilde{\varrho}_0 - \rho_p) \right\} / [2\lambda_m v_0 \kappa \tilde{\varrho}_0^2 (\rho_p - \tilde{\varrho}_0)^2] = 0.} \quad (42)$$

Dok su postupci iz (19) i (26) bili *minimizacije* radijalnih udaljenosti od ishodišta, (42) odgovara *maksimizaciji* dosega putanja u  $z$ -smjeru, ali samo zbog usmjerenja početne brzine iz (14) u pozitivnome smjeru  $z$ -osi.



Gerolamo Cardano (1501.–1576.), talijanski matematičar po kojem rješenje opće kubne jednadžbe nosi ime.



Niccolò Fontana Tartaglia (1499.–1557.), talijanski matematičar od kojeg je Cardano preuzeo opću metodu rješavanja kubnih jednadžbi.



Lodovico Ferrari (1522.–1565.), Cardanov učenik zaslužan za metodu rješavanja opće jednadžbe četvrtog stupnja. [Pretragom na internetu može se pronaći portret koji navodno prikazuje Ferrarija. Detaljnija pretraga otkriva da portret prikazuje kardinala Alessandra Farnesea.]

Ekstremizacijski uvjet iz (42) polinom je petog stupnja za  $\tilde{q}_0$ . Dobro je poznata činjenica, dio opće kulture svakog ozbiljnijeg matematičara, da se rješenja *općenitog* polinoma stupnja većeg od 4 ne mogu zapisati u radikalima (korištenjem osnovnih matematičkih operacija te korijena kojeg god stupnja) [22, 23], za razliku od opće poznatih rješenja kvadratne jednadžbe. Čak i da je ekstremizacijski uvjet ispao polinom trećeg ili četvrtog stupnja za koje postoje analitička rješenja (Cardanovo rješenje za treći stupanj [24, 25] i Ferrarijevo rješenje za četvrti stupanj [26, 27]), ne bismo od toga imali osobite koristi jer je njihov raspis dug i nepregledan. Stoga nultočke brojnika iz (42) moramo određivati numeričkim metodama, koje su danas naširoko i spremno dostupne u raznim programskim jezicima.

Uz pretpostavku da smo odredili maksimizacijsku vrijednost  $\tilde{q}_0(\rho_p)$ , oblik sjene  $\mathbb{Z}_p$  određujemo povratkom tog rješenja u (41), u smislu:  $\mathbb{Z}_p(\rho_p) = \mathcal{Z}_p[\rho_p; \tilde{q}_0(\rho_p)]$ . No moramo uzeti u obzir da polinom petog stupnja općenito ima do pet različitih rješenja, od kojih neka mogu biti i kompleksna [28]. U slučaju više realnih rješenja, kako prepoznati ono bitno? Hoćemo li uopće imati više netrivialnih kandidata na raspolaganju ili će odmah biti očito koja su rješenja neprihvatljiva? Sva kompleksna i negativna rješenja svakako možemo odbaciti s obzirom da udarni parametar  $\tilde{q}_0(\rho_p)$  kao radijalna udaljenost od z-osi mora biti nenegativan. Štoviše, on mora zadovoljavati i stroži uvjet:

$$0 \leq \tilde{q}_0(\rho_p) \leq \rho_p \quad (43)$$

jer se zbog odbojnog kulonskog potiska projektil neprestano udaljava od z-osi, tj. mogao je krenuti jedino s manjeg radijalnog odmaka od bilo kojeg  $\rho_p$  na kojem ga kasnije nađemo. Detaljna numerička analiza pokazuje da ovaj uvjet ipak nije dovoljan da bismo njime uvijek izdvojili relevantnu nultočku brojnika iz (42), jer se ponekad pojavljuju višestruki realni kandidati koji zadovoljavaju (43). Na sreću, ista analiza nudi i jednostavan recept za identifikaciju bitnog rješenja u tom slučaju. Indeksiramo li s  $i$  sva rješenja  $\tilde{q}_0^{(i)}(\rho_p)$  kompatibilna s (43), jednadžbu sjene nalazimo kao:

$$\mathbb{Z}_p(\rho_p) = \max_i \left\{ \mathcal{Z}_p[\rho_p; \tilde{q}_0^{(i)}(\rho_p)] \right\}. \quad (44)$$

Drugim riječima, nije relevantno maksimalno rješenje, već ono koje rezultira maksimalnim dosegom projektila duž z-osi. Ovaj recept je lako razumjeti. Dok su negativna i kompleksna rješenja samo matematički artefakti, svako nenegativno rješenje doista odgovara nekome od *lokalnih* ekstrema. Ovi ekstremi javljaju se u određenim okolnostima zbog netrivialnog (i donekle neočekivanog) nagomilavanja putanja dalje od ruba sjene; naravno,



unutar dijela prostora ispunjenog putanjama. Međutim, nijednu putanju ne možemo naći „iza“ one putanje koja za dani  $\rho_p$  postiže maksimalan odmak duž  $z$ -osi, stoga upravo ona određuje točku s ruba sjene. Upravo je identifikacija takve putanje smisao postupka iz (44).

Budući da nam nije dostupan zatvoreni analitički izraz za rješenje  $\tilde{q}_0(\rho_p)$  polinoma petog stupnja, nemamo niti zatvoreni izraz za oblik sjene iz (44). Stoga je neke općenite aspekte sjene u kogibajućem sustavu teško istražiti. U takvoj situaciji detaljne numeričke analize mogu biti od velike koristi jer daju naslutiti različita svojstva sjene, koja se ponekad mogu razmjerno jednostavno potvrditi ili opovrgnuti. Zbog nedostatka zatvorenih analitičkih izraza nije čak niti sasvim jednostavno odrediti položaj tjemena sjene, tj. točku  $Z_p(0)$  koja leži na samoj  $z$ -osi. Međutim, vještini a tehnički nezahvajnim dosjetkama ne samo da se može egzaktno odrediti položaj tjemena, već i cjelokupan granični oblik ponašanja sjene: i oko tjemena (za  $\rho_p \rightarrow 0$ ) i u asimptotskom području (za  $\rho_p \rightarrow \infty$ ). U oba granična slučaja sjena ponovno pokazuje paraboloidno ponašanje. Od svih parametara tih dvaju paraboloidnih režima, navodimo samo položaj tjemena:

$$Z_p(0) = -2\lambda_m \kappa + \frac{V_{cm}}{v_0} \kappa \ln \frac{\lambda_m v_0 + V_{cm}}{\lambda_m v_0 - V_{cm}}, \quad (45)$$

koji divergencijom za  $V_{cm} \rightarrow \pm \lambda_m v_0$  jasno odražava uvjete postojanja (netrivijalne) sjene iz (31).

### 2.3.4 Laboratorijski sustav

Da bismo adekvatno ilustrirali neke od posljedica putanja (41) u kogibajućem sustavu, morat ćemo izabrati neke specifične vrijednosti pozadinskih parametara. Laboratorijski sustav, u kojem meta u početnome trenutku miruje:  $\dot{\vec{r}}_m(t=0) = \vec{0}$ , posebno je prikladan iz dva razloga. Prvi je njegova važnost u praksi jer se većina eksperimenata s raspršenjem doista provodi ispuštanjem snopa projektila na mirujuću metu. Drugi razlog će biti smanjenje broja *nezavisnih* parametara koje moramo birati, zahvaljujući ograničenju koje definicija laboratorijskog sustava postavlja na njih. Budući da meta u početku miruje, projektil nosi svu relativnu brzinu iz (14):  $\dot{\vec{r}}_p(t=0) = v_0 \hat{z}$ . Brzinu centra mase (koja je u svakom kogibajućem sustavu konstantna, tako da je možemo odrediti iz bilo kojeg trenutka pa stoga i početnog) nalazimo uvrštavanjem utvrđenih brzina projektila i mete u vremensku derivaciju izraza (4):

$$\vec{V}_{cm} = \dot{\vec{R}}_{cm} = \lambda_p \dot{\vec{r}}_p(t=0) = \lambda_p v_0 \hat{z}, \quad (46)$$

što za iznos brzine iz (41) podrazumijeva:  $V_{cm} = \lambda_p v_0$ . Kako se ona uvijek pojavljuje u omjeru s  $v_0$ , prema  $V_{cm}/v_0 = \lambda_p$  riješili smo se dvaju parame-

tara ( $V_{cm}$  i  $v_0$ ) koje bismo u kojem drugom sustavu morali zasebno birati. Prisjetimo se još da prema (11) uvijek vrijedi  $\lambda_p + \lambda_m = 1$ , stoga je dani laboratorijski sustav određen samo jednim parametrom: ili  $\lambda_p$  ili  $\lambda_m$ .

Prije nego nastavimo, primijetimo jednu zanimljivost. Već smo zaključili da se nasljeđivanjem divergentnih članova unutar (35) meta pomakne za beskonačnu udaljenost  $Z_0$  iz (40) sa svojeg početnog položaja. U kogibajućem sustavu u kojem se meta ispočetka giba, ovaj efekt lako je pripisati toj početnoj brzini. Naime, zamislimo hipotetski scenarij u kojem se projektil giba putanjom (37), istom kao dosad, dok se meta „mistično“ (u potpunom neskladu s trećim Newtonovim zakonom) sve vrijeme giba samo po inerciji, konstantnom brzinom početnog iznosa. Zbog usađene beskonačnosti u vremenskome članu  $t(\theta; q_0)$  iz (37) projektilu je u svakom slučaju potrebno beskonačno vrijeme kako bi dosegnuo metu na kojoj god konačnoj udaljenosti. Do tada će se meta početnom brzinom pomaknuti s početnog položaja, *neovisno o kulonskom odboju od projektila*. Međutim, ovaj argument vrijedi samo u sustavima u kojima meta doista ima početnu brzinu kojom bi se nastavila gibati. No u laboratorijskom sustavu ona ispočetka miruje! Je li stoga u laboratorijskom sustavu pomak  $Z_0$  konačan? To je lako provjeriti uvrštavanjem ranijeg zahtjeva  $V_{cm}/v_0 = \lambda_p$  u (40), za čime preostaje:

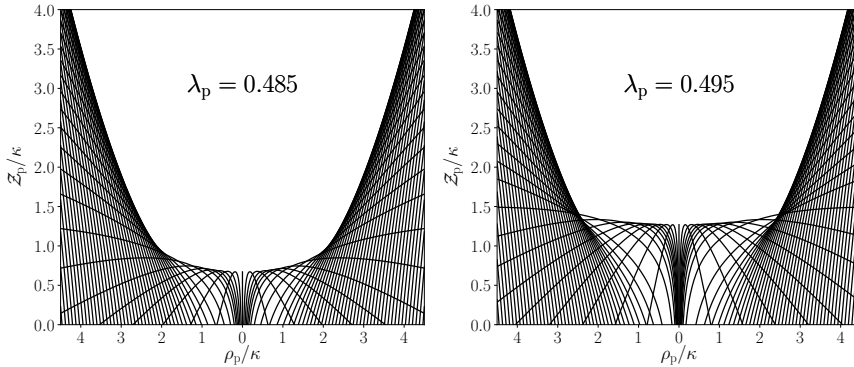
$$Z_0 = \lambda_p \kappa \lim_{z_0 \rightarrow \infty} \ln \frac{2z_0}{\kappa e}. \quad (47)$$

Zaključujemo da je sama kulonska interakcija dovoljno jaka da potisne metu beskonačno daleko s početnog položaja! No njezin doprinos tome pomaku je slabiji od doprinosa početnog gibanja mete jer odavde vidimo da je odgovorna jedino za „mekšu“, logaritamsku divergenciju iz (40).

U nastavku, slika 5 prikazuje nekolicinu putanja projektila u laboratorijskom sustavu, nakon uvrštavanja  $V_{cm}/v_0 = \lambda_p$  u (41). Prema uvjetu iz (31) sjena raspršenja u laboratorijskom sustavu postoji samo ako  $\lambda_m > \lambda_p$ , tj. samo ako je projektil lakši od mete:  $\lambda_p < 0.5$ . Obje prikazane vrijednosti  $\lambda_p$  sa slike 5 razmjerno su visoke jer je pri nižima oblik sjene vizualno sličan paraboli pa nam nije osobito zanimljiv.

Kako se oblik sjene opće može mijenjati između promatračkih sustava? Ne bi li svi promatrači trebali vidjeti istu, paraboloidnu sjenu, koja je svakog pojedinog od njih samo na različitim položajima u prostoru<sup>16</sup>? Za početak primijetimo da čim smo prihvatili da se sam *oblik* putanja iz (41) mije-

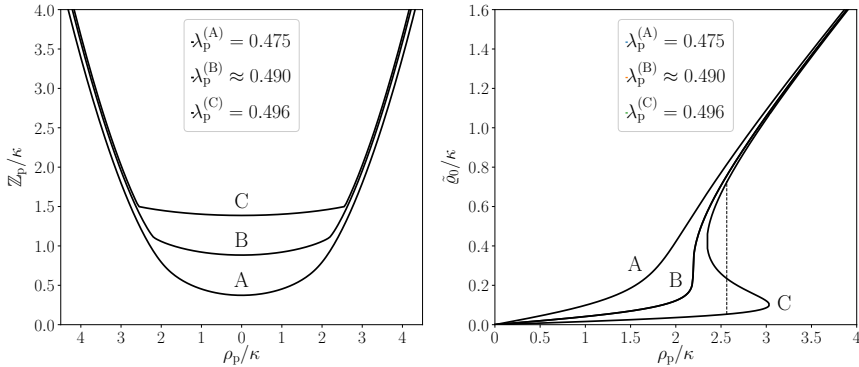
<sup>16</sup>Promjena oblika paraboloida između sustava mete i sustava centra mase – (22) i (27) – nije neočekivana jer je pomak ishodišta između tih dvaju sustava različit za svaki pojedini projektil pa su time putanje artifičijelno preraspoređene između tih dvaju sustava. No razlika između kogibajućih sustava je samo u brzini gibanja promatrača duž z-osi. Ta razlika ne utječe na početnu prostornu raspodjelu projektila iz (30) jer je brzina centra mase svakog pojedinog projektil-meta para ista, tj. ne ovisi o njihovim položajima.



Slika 5. Putanje projektila u laboratorijskom sustavu za dvije vrijednosti  $\lambda_p$  vrlo bliske gornjoj granici za postojanje sjene raspršenja ( $\lambda_p < 0.5$ ).

nja s prijelazom između kogibajućih sustava (koji se odražava kroz ovisnost o  $V_{cm}$ ), nužno smo prihvatili i mogućnost promjene svake njihove geometrijske posljedice, pa tako i same sjene. Pozadinski razlog promjene oblika je to što se čitava sjena ne formira istovremeno! Među svim projektilima *ispuštenima* istovremeno, svaki pojedini doseže svoju točku na sjeni u različitim trenucima; detalj koji je postao bitan sve otkad je vremenska evolucija putanja ušla u igru preko člana  $t(\theta; q_0)$ . Stoga ne trebaju svi promatrači vidjeti „jednu te istu“ sjenu, zbog vremenske zadržke u formiranju različitih točaka sjene. Razlika u gibanju dvaju promatrača tijekom te vremenske zadržke dovodi i do razlike u pomaku pojedinih točaka sjene iz jednog sustava, što opravdava promjenu njezina cjelokupnog oblika u drugome sustavu.

Oblik sjene u laboratorijskom sustavu, jasno vidljiv na primjerima sa slike 5, nalazimo iz ekstremizacijskog uvjeta (42), uz  $V_{cm} = \lambda_p v_0$ . Problem se svodi na numeričko nalaženje nultočaka  $\tilde{q}_0(\rho_p)$  polinoma petog stupnja iz brojnika. Pri tome numeričko nalaženje iznova ponavljamo za svaku pojedinu vrijednost koordinate  $\rho_p$  u kojoj želimo iscrtati ili na koji drugi način ispitati sjenu, jer se variranjem  $\rho_p$  mijenja sam polinom (tj. njegovi koeficijenti). Istaknuti primjeri tako određenih sjena prikazani su na lijevome grafu sa slike 6. Desni graf prikazuje ponašanje ekstremizacijskih rješenja  $\tilde{q}_0(\rho_p)$  konzistentnih sa zahtjevom (43). Slučaj A prikazuje „idealnu“ okolnost kad za svaku vrijednost  $\rho_p$  imamo samo jedno prihvatljivo rješenje, kojim je bez ikakve zadržke određena točka s ruba sjene:  $Z_p(\rho_p) = Z_p[\rho_p; \tilde{q}_0(\rho_p)]$ . Međutim, u slučaju C postoji raspon koordinate  $\rho_p$  unutar kojega se javljaju višestruki kandidati za  $\tilde{q}_0(\rho_p)$  – na ovome pri-



Slika 6. Primjeri sjene raspršenja u laboratorijskom sustavu (lijevi graf) te ponašanje rješenja  $\tilde{q}_0$  ekstremizacijskog problema (42) u trima prikazanim slučajevima (desni graf). Slučaj B odgovara faznome prijelazu između glatke sjene (slučaj A) i prelomljene sjene (slučaj C).

mjeru do tri različita! Upravo je svrha postupka iz (44) izdvojiti bitno rješenje, odgovorno za formiranje sjene. Na ovome primjeru porastom  $\rho_p$  prihvatljivo rješenje diskontinuirano prelazi s donje grane na gornju, na mjestu označenom vertikalnom isprekidanom linijom. To znači da postoji čitav niz putanja projektila, određenih udarnim parametrima  $\varrho_0$  duž tog vertikalnog skoka, koje uopće ne doprinose stvaranju sjene. Te putanje „uvukle“ su se u dio prostora potpuno prebrisan ostalim putanjama, udalivši se od ruba sjene. Taj diskontinuirani prekid među putanjama koje oblikuju sjenu dovodi do njezina „prijeloma“ te stvaranja oštrog vrha duž njezina ruba. Način na koji do toga dolazi međuigrom pojedinih putanja jasno je prikazan desnim grafom sa slike 5. Sada razumijemo da oštri prijelom sjene s tog grafa nije tek vizualni artefakt koji bi se tobože ispostavio glatkim kad bismo ga pobliže pregledali, već da se doista radi o usječenome vrhu. Slučaj B sa slike 6 prikazuje prijelazni scenarij između A i C, kad po prvi put dolazi do prijeloma sjene, tj. ispoljavanja oštrog vrha. Preciznija vrijednost parametra  $\lambda_p$  pri kojoj se to događa iznosi  $\lambda_p \approx 0.489756$ , što odgovara omjeru masa  $m_p/m_m \approx 0.959846$ , te se ona nalazi numerički. Ono što oduzima dah jest činjenica da takva kvalitativna promjena u ponašanju rješenja  $\tilde{q}_0(\rho_p)$  i posljedično sjene ima sva matematička svojstva faznog prijelaza! Upravo takav matematički oblik faznog prijelaza nalazimo u dobro poznatom prijelazu između tekućine i plina unutar van der Waalsovog modela realnog plina. U slučaju sjene raspršenja radi se samo o matematičkoj analogiji jer je fazni prijelaz između onoga što bismo mogli nazvati

glatkom sjenom (slučaj A) i prelomljenom sjenom (slučaj C) ovisan o gibanju promatrača, a ne samo o intrinzičnim svojstvima projektila i mete<sup>17</sup>. Dru-  
gim riječima, stanje sjene ovisi o promatračkom sustavu, a fazni prijelaz se  
događa u promatračevu viđenju sjene. Nastavak rasprave o ovoj uzbud-  
ljivoj analogiji s termodinamičkim faznim prijelazom zainteresirani čitatelj  
može pronaći u [15].

### 3 Dodatak

Krećući od diferencijalne jednadžbe (7) izvest ćemo općenito rješenje (12)  
za relativno gibanje dvaju tijela koja međudjeluju silom oblika  $\vec{F} \propto \hat{r}/r^2$ .  
Unaprijed ćemo koristiti činjenicu da je pod djelovanjem centralne sile pu-  
tanja ograničena unutar jedne ravnine zbog očuvanja kutne količine giba-  
nja kao vektorske veličine, okomite na ravninu gibanja. Zahvaljujući tome  
opravdano je birati najpovoljnije usmjerenje koordinatnih osi i ravnina, koje  
će nam olakšati daljnje račune. Jedan od najprirodnijih koordinatnih sus-  
tava za opis gibanja u ravnini cilindrični je sustav, u čijim koordinatama  
raspis položaja  $\vec{r}$ , brzine  $\dot{\vec{r}}$  i ubrzanja  $\ddot{\vec{r}}$  poprima oblik:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}, \quad (48)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}, \quad (49)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}. \quad (50)$$

Međutim, za potrebe opisa hiperboličkih putanja iz (15) najprikladnije su  
sferne koordinate (jer je njima pravilno opisan način na koji smo izabrali  
„uroniti“ sve te putanje u trodimenzionalni prostor), stoga ćemo koristiti  
raspis kinematičkih veličina u sfernim koordinatama, općenitog oblika:

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad (51)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}, \quad (52)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \\ (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\phi}. \quad (53)$$

Namjeravamo izvesti općenit oblik putanje pod djelovanjem  $\vec{F} \propto \hat{r}/r^2$  sile,  
među kojima se nalaze i zatvoreni oblici (elipse i kružnice) koje je teško

<sup>17</sup>Pokazuje se da je za dane mase projektila i mete fazni prijelaz uvijek moguće postići va-  
riranjem brzine  $V_{\text{cm}}$ , tj. prilagodbom promatračeva gibanja. Međutim, za danog proma-  
trača (unaprijed određeni  $V_{\text{cm}}$ ) fazni prijelaz može se izazvati promjenom masa projektila  
i mete samo ako je  $V_{\text{cm}} < 0$  ili  $V_{\text{cm}}/\lambda_m v_0 > 6\sqrt{15}/25 \approx 0.9295$  [15].

parametrizirati sfernom  $\theta$  koordinatom čiji je raspon  $\theta \in [0, \pi]$ . Stoga ciljano provodimo izvod preko  $\varphi$  koordinate ( $\varphi \in [0, 2\pi)$ ). U svrhu pojednostavnjenja postupka postaviti ćemo se u jedinu ravninu unutar koje je kut  $\theta$  konstantan:  $x$ - $y$  ravninu Kartezijevog sustava, gdje je sferna  $\theta$  koordinata svake točke jednaka  $\theta = \pi/2$ . Uvrštavanjem ove vrijedosti u (52) i (53) ostaje:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}, \quad (54)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{\varphi}. \quad (55)$$

Za potrebe opisa hiperboličkih putanja pod djelovanjem odbojne kulonske interakcije, ovisnost o kutu  $\theta$  osigurat ćemo jednostavnim „preimenovanjem“  $\varphi \rightarrow \theta$ . Ovaj postupak opravdan je time što bismo dobili isti oblik diferencijalnih jednadžbi da smo ih izabrali rješavati izravno po  $\theta$ , a postavivši se u ravninu konstantnoga kuta  $\varphi$ <sup>18</sup>.

Budući da tražimo općenito rješenje jednadžbe gibanja (7), dozvolit ćemo proizvoljne početne uvjete; naravno, unutar  $x$ - $y$  ravnine koju smo unaprijed postavili tako da se poklapa s ravninom gibanja. Početne uvjete čine početni položaj  $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$  i početna brzina  $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0)$  u nekom proizvoljnom početnom trenutku  $t_0$ . Unutar  $x$ - $y$  ravnine proizvoljne početne uvjete ispočetka ćemo parametrizirati Kartezijevim koordinatama:

$$\vec{r}_0 = r_0 (\cos \varphi_0 \hat{x} + \sin \varphi_0 \hat{y}), \quad (56)$$

$$\vec{v}_0 = v_0 (\cos \Phi_0 \hat{x} + \sin \Phi_0 \hat{y}), \quad (57)$$

gdje je  $\varphi_0$  kutni otklon vektora početnog položaja od  $x$ -osi, a  $\Phi_0$  kutni otklon vektora smjera početne brzine od  $x$ -osi. Kako ćemo račun nastaviti u sfernim koordinatama, ove vektore prikladno je izraziti preko komponenta svojstvenih sfernim jediničnim smjerovima  $\hat{r}$  i  $\hat{\varphi}$ . Oblik početnog položaja je trivijalan:  $\vec{r}_0 = r_0 \hat{r}$ . Što se tiče vektora brzine, komponentu uz željeni smjer (uz uvjet da su relevantni smjerovi međusobno okomiti) uvijek je lako odrediti projekcijom na taj smjer, u čemu nam pomaže skalarni produkt:  $\vec{v}_0 = (\vec{v}_0 \cdot \hat{r})\hat{r} + (\vec{v}_0 \cdot \hat{\varphi})\hat{\varphi}$ . Imajući raspis vektora  $\vec{v}_0$  u jednom skupu koordinata iz (57) te znajući njihovu vezu s novim skupom koordinata<sup>19</sup>,

<sup>18</sup>Pozivamo čitatelja da provjeri da se dobivaju jednadžbe istog oblika kao (54) i (55) bilo da rješavamo problem u cilindričnim koordinatama unutar ravnine  $z = \text{const.}$ , bilo u sfernim koordinatama unutar ravnine  $\varphi = \text{const.}$

<sup>19</sup>Unutar  $x$ - $y$  ravnine relevantne veze Kartezijevih i sfernih jediničnih smjerova su:

$$\hat{r} = \cos \varphi_0 \hat{x} + \sin \varphi_0 \hat{y},$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi_0 \hat{x} + \cos \varphi_0 \hat{y},$$

i ovise o koordinatama trenutnog položaja (dakle kuta  $\varphi_0$ ), bez obzira na to što transformiramo komponente vektora neke druge vrste (u ovome slučaju brzine, relevantnog kuta  $\Phi_0$ ). Odavde imamo redom:  $\hat{x} \cdot \hat{r} = \cos \varphi_0$ ,  $\hat{y} \cdot \hat{r} = \sin \varphi_0$ ,  $\hat{x} \cdot \hat{\varphi} = -\sin \varphi_0$ ,  $\hat{y} \cdot \hat{\varphi} = \cos \varphi_0$ .

u nekoliko jednostavnih tehničkih koraka nalazimo:

$$\vec{r}_0 = r_0 \hat{r}, \quad (58)$$

$$\vec{v}_0 = v_0 [\cos(\varphi_0 - \Phi_0) \hat{r} - \sin(\varphi_0 - \Phi_0) \hat{\varphi}], \quad (59)$$

gdje smo radi preglednosti zapisali i oblik početnog položaja.

Uz sve sastojke spremne, rješavanje jednadžbe gibanja (7) počinjemo usporedbom članova uz neovisne (međusobno okomite) smjerove  $\hat{r}$  i  $\hat{\varphi}$  s onima iz (55). U (7) član uz  $\hat{\varphi}$  iščezava, što za pripadni član iz (55) znači:

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \quad (60)$$

Ovdje je od velike praktične koristi bilo prepoznati da izraz s lijeve strane jednakosti možemo prikazati derivacijom jedinstvenog člana  $r^2\dot{\varphi}$  jer iščezavanje čitave derivacije znači da je član pod njom konstantan. Primijetimo da se on izravno pojavljuje u vektorskom produktu položaja iz (51) i brzine iz (54):  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = -r^2\dot{\varphi}\hat{\theta}$ , jer je  $\hat{r} \times \hat{\varphi} = -\hat{\theta}$ . Stoga ga možemo izolirati jednostavnom projekcijom na dani smjer:  $r^2\dot{\varphi} = -(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \hat{\theta}$ . Kako je taj član u svim trenucima jednak nekoj konstantnoj vrijednosti:  $r^2\dot{\varphi} = \ell$ , traženu konstantu  $\ell$  možemo odrediti upravo iz početnih uvjeta:

$$\ell = -(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) \cdot \hat{\theta} = -r_0 v_0 \sin(\varphi_0 - \Phi_0). \quad (61)$$

Sada možemo izraziti član kutne brzine kao:

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{r^2}, \quad (62)$$

što uvrštavanjem u  $\hat{r}$ -komponentu ubrzanja iz (55) te usporedbom s pripadnom komponentom iz (7) vodi na središnju diferencijalnu jednadžbu:

$$\ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} = \frac{Q_p Q_m}{4\pi\epsilon_0\mu} \frac{1}{r^2} \quad (63)$$

koju je potrebno riješiti po radijalnoj koordinati  $r$ . Ova jednadžba rješava se tipičnom supstitucijom:

$$u \equiv \frac{1}{r}. \quad (64)$$

Namjeravamo zaobići nalaženje vremenske ovisnosti  $r(t)$  te umjesto toga izravno odrediti geometrijski oblik putanje  $r(\theta)$ , stoga operator vremenske derivacije proširenim deriviranjem povežujemo s operatorom kutne derivacije:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} = \ell u^2 \frac{d}{d\varphi}. \quad (65)$$

Ovdje smo prepoznali pojavu kutne brzine  $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$  te na njezino mjesto uvrstili već poznat izraz iz (62) i koristili (64). Primjenom ove relacije drugu vremensku derivaciju radijalne koordinate iz (63) možemo prevesti u:

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \frac{1}{u} \right) = \ell u^2 \frac{d}{d\varphi} \left( \ell u^2 \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{u} \right) = -\ell^2 u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2}. \quad (66)$$

Povratkom ovog rezultata u (63):

$$-\ell^2 u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} - \ell^2 u^3 = \frac{Q_p Q_m}{4\pi\epsilon_0\mu} u^2 \quad (67)$$

te dijeljenjem čitavog izraza s  $-\ell^2 u^2$  dolazimo do tzv. Binetove jednadžbe:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{Q_p Q_m}{4\pi\epsilon_0\mu\ell^2}. \quad (68)$$

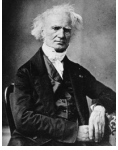
Binetovu jednadžbu riješiti ćemo na više različitih načina zbog neobične važnosti takvog tipa jednadžbi u fizici. Posebno je bitna njezina veza s jednadžbom gibanja harmoničkog oscilatora, pomaknutog stacionarnog položaja opisanog članom s desne strane jednakosti. Općeniti oblik jednadžbe takvog oscilatora za veličinu  $x$  (koja u fizici može biti položaj, tlak, gustoća, električno ili magnetsko polje i nepregledan niz drugih primjera) jest:  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = K$ . Član  $\omega_0$  naziva se prirodnom frekvencijom oscilatora, dok je konstanta  $K$  izravno povezana s pomakom stacionarne vrijednosti s obzirom na ravnotežnu vrijednost slobodnog oscilatora. Jedino što razlikuje Binetovu jednadžbu od one harmoničkog oscilatora jest činjenica da Binetova jednadžba nije diferencijalna jednadžba po vremenu, već po kutu. No po matematičkoj strukturi (gotovo) su posve jednake.

Pri rješavanju Binetove jednadžbe za čitav nezgrapni član s desne strane iz (68) uvest ćemo pokratu:

$$C \equiv -\frac{Q_p Q_m}{4\pi\epsilon_0\mu r_0^2 v_0^2 \sin^2(\varphi_0 - \Phi_0)} = -\frac{\kappa}{r_0^2 \sin^2(\varphi_0 - \Phi_0)}, \quad (69)$$

gdje smo nakon raspisa  $\ell$  prepoznali konstantu  $\kappa$  koju smo bili uveli još u (16). Poput ranije korištenih oznaka s točkom nad danom veličinom za vremensku derivaciju iste veličine, sad ćemo radi preglednosti uvesti i kompaktnu oznaku za kutnu derivaciju:  $u' = du/d\varphi$  i  $u'' = d^2u/d\varphi^2$ . Naposljetku, riješiti ćemo čak i malo općenitiji slučaj Binetove jednadžbe, oblika:

$$u'' + k^{-2}u = C, \quad (70)$$



Jacques Philippe Marie Binet (1786.–1856.), francuski matematičar i fizičar.



pri čemu smo ciljano uveli konstantu  $k$ , čija je vrijednost u (68) očito  $k = 1$ . Time smo osigurali istovremeno rješavanje svih drugih jednadžbi poput Binetove (kao one harmoničkog oscilatora) u kojima se pojavljuje derivacija po nekoj drugoj veličini umjesto po kutu. Naime, pored člana  $u$  iz Binetove jednadžbe stoji bezdimenzionalan broj (bez fizikalnih jedinica, a koji je u našem slučaju upravo 1) samo zato jer je kut  $\varphi$  iz derivacije  $u''$  sam bezdimenzionalan. U slučaju kakve druge derivacije (npr. po vremenu, položaju, ...) uz  $u$  mora stajati dodatan član, barem kao nosač fizikalnih jedinica koji bi učinio sve članove u jednadžbi dimenzionalno kompatibilnima. U jednadžbi  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = K$  harmoničkog oscilatora taj član je upravo kvadrat prirodne frekvencije  $\omega_0^2$ , koji nosi dimenziju recipročnog kvadrata vremena, baš poput operatora druge vremenske derivacije  $d^2/dt^2$  iz člana  $\ddot{x}$ . Parametrizacijom  $k^{-2}$  iz (70) osigurali smo da član  $k$  nosi istu fizikalnu jedinicu kao i veličina po kojoj je deriviran prvi član  $u''$ . U slučaju kutne derivacije  $k$  je bezdimenzionalan, u slučaju vremenske nosi dimenziju vremena, i sl.

U svakom načinu rješavanja bit će nam potreban oblik početnih uvjeta za supstitucijsku veličinu  $u$ : njezina početna vrijednost  $u_0$  i početni prirast  $u'_0$ . Ove početne vrijednosti već su određene početnim položajem  $\vec{r}_0$  i početnom brzinom  $\vec{v}_0$  iz (58) i (59). Međutim, njihova veza nije nužno sasvim očita, što posebno vrijedi za  $u'_0$ . Kako ćemo po potrebi prelaziti s vremenske na kutnu varijablu, početnom trenutku  $t_0$  pripisujemo početnu kutnu koordinatu  $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ , tako da pod početnim vrijednostima ostalih članova podrazumijevamo bilo njihovu vrijednost u trenutku  $t_0$ , bilo pod kutnim otklonom  $\varphi_0$ . U tom smislu, početna vrijednost  $u_0$  je trivijalna:

$$u_0 = \frac{1}{r}. \quad (71)$$

S druge strane, za  $u'_0$  (u oznaci početne vrijednosti derivacije, a ne derivacije početne vrijednosti) potrebno je malo raspisa:

$$u'_0 = \left. \frac{du}{d\varphi} \right|_{\varphi_0} = \left( -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) \Big|_{\varphi_0} = -\frac{1}{r_0^2} \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t_0} \left. \frac{dt}{d\varphi} \right|_{\varphi_0} = -\frac{1}{r_0^2} \left. \dot{r} \right|_{t_0} \dot{\varphi}. \quad (72)$$

U predzadnjem koraku ponovno smo iskoristili prošireno deriviranje pa se pozvali na  $dt/d\varphi|_{\varphi_0} = (d\varphi/dt|_{t_0})^{-1}$  da bismo uspostavili vezu s otprije poznatom radijalnom brzinom  $\dot{r}$  i kutnom brzinom  $\dot{\varphi}$ . Sad je jedino pitanje odakle njih iščitati. Obje se nalaze u raspisu brzine po sfernim koordinatama iz (54) te ih u bilo kojem trenutku možemo izolirati projekcijom na relevantni smjer:  $\dot{r} = \vec{\dot{r}} \cdot \hat{r}$  i  $\dot{\varphi} = \vec{\dot{\varphi}} \cdot \hat{\varphi}/r$ . Budući da nas zanimaju upravo

u početnom trenutku, na mjestu vektora brzine  $\vec{r}$  jednostavno koristimo početnu brzinu  $\vec{v}_0$  iz (59), odakle slijedi:

$$u'_0 = -\frac{1}{r_0} \frac{\vec{v}_0 \cdot \hat{r}}{\vec{v}_0 \cdot \hat{\phi}} = \frac{1}{r_0 \operatorname{tg}(\varphi_0 - \Phi_0)}. \quad (73)$$

Sve je spremno za izvod rješenja Binetove jednadžbe.

### Prvi izvod.

Jednadžba (70) i oblik njezina rješenja toliko su poznati (obično u kontekstu harmoničkog oscilatora) da je se tipično rješava pretpostavkom rješenja:

$$u(\varphi) = a \cos(\varphi/k) + b \sin(\varphi/k) + Ck^2, \quad (74)$$

gdje se nepoznati koeficijenti  $a$  i  $b$  određuju iz početnih uvjeta. Ovisno o potrebama, kao ekvivalentan oblik pretpostavljenog rješenja često se koristi i  $u(\varphi) = U \sin(\varphi/k - \vartheta) + Ck^2$ , u kojem su nepoznati koeficijenti  $U$  i  $\vartheta$  trigonometrijskim relacijama povezani s  $a$  i  $b$  iz (74). Nedostatak ove metode je to što zahtijeva intuitivan ili iskustven uvid u problem. Prednost je u brzom i jednostavnom postupku određivanja konačnog rješenja, pri čemu je rješavanje sustava linearnih jednadžbi u svrhu nalaženja  $a$  i  $b$  najsloženija potrebna metoda. Taj sustav jednadžbi dobiva se izravnim uvrštavanjem početnih uvjeta (71) i (73) u pretpostavljeni oblik rješenja (74). Za potrebe uvrštavanja početne derivacije  $u'_0$  naprosto deriviramo (74):

$$u'(\varphi) = -(a/k) \sin(\varphi/k) + (b/k) \cos(\varphi/k). \quad (75)$$

Sad uvrštavam (71) u (74) te (73) u (75). I radi preglednosti i radi općenitosti izraze za  $u_0$  i  $u'_0$  još nećemo raspisivati, stoga:

$$u(\varphi_0) = u_0 \Rightarrow a \cos(\varphi_0/k) + b \sin(\varphi_0/k) + Ck^2 = u_0, \quad (76)$$

$$u'(\varphi_0) = u'_0 \Rightarrow -(a/k) \sin(\varphi_0/k) + (b/k) \cos(\varphi_0/k) = u'_0. \quad (77)$$

Rješavanjem ovog sustava jednostavno nalazimo:

$$a = (u_0 - Ck^2) \cos(\varphi_0/k) - ku'_0 \sin(\varphi_0/k), \quad (78)$$

$$b = (u_0 - Ck^2) \sin(\varphi_0/k) + ku'_0 \cos(\varphi_0/k), \quad (79)$$

što povratkom u (74) daje konačno rješenje:

$$u(\varphi) = (u_0 - Ck^2) \cos[(\varphi - \varphi_0)/k] + ku'_0 \sin[(\varphi - \varphi_0)/k] + Ck^2. \quad (80)$$

**Drugi izvod.**

U drugome pristupu jednadžbu (70) rješavamo izravnom integracijom. Za to je prvo moramo svesti na diferencijalnu jednadžbu prvog reda, makar po nekoj novoj veličini. U tu svrhu član  $u''$  prepoznamo kao prvu derivaciju od  $u'$  te ponovno primjenjujemo prošireno deriviranje:

$$u'' = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{du}{d\varphi} \right) = \frac{du'}{d\varphi} = \frac{du'}{du} \frac{du}{d\varphi} = u' \frac{du'}{du}. \quad (81)$$

Time smo izvornu diferencijalnu jednadžbu drugog reda po vremenu za veličinu  $u$  preveli u jednadžbu prvog reda po  $u$ , a za veličinu  $u'$ :

$$u' \frac{du'}{du} + k^{-2}u = C. \quad (82)$$

Ovaj izraz dovodimo u oblik spreman za integraciju:

$$\frac{u' du'}{du} = C - k^{-2}u \Rightarrow u' du' = (C - k^{-2}u) du \quad (83)$$

te integriramo obje strane jednadžbe primjenjujući granice integracije koje moraju u međusobnoj korespondenciji između dvaju integrala:

$$\int_{u'_0}^{u'(u)} \tilde{u}' d\tilde{u}' = \int_{u_0}^u (C - k^{-2}\tilde{u}) d\tilde{u} \Rightarrow \frac{(\tilde{u}')^2}{2} \Big|_{u'_0}^{u'(u)} = C\tilde{u} - \frac{\tilde{u}^2}{2k^2} \Big|_{u_0}^u. \quad (84)$$

Tildom nad veličinama samo smo označili da su podintegralne varijable formalno različite od onih iz granica integracije. Nakon uvrštavanja granica integracije imamo:

$$\frac{[u'(u)]^2 - (u'_0)^2}{2} = C(u - u_0) - \frac{u^2 - u_0^2}{2k^2}, \quad (85)$$

odakle samo treba izraziti ovisnost  $u'(u)$ :

$$u'(u) = \pm \sqrt{(u'_0)^2 + 2 \left( C(u - u_0) - \frac{u^2 - u_0^2}{2k^2} \right)}. \quad (86)$$

Sada  $u'$  eksplicitno raspisujemo kao derivaciju  $du/d\varphi$  čija je ovisnost o  $u$  dana prethodnim izrazom, koji u sljedećim redcima nećemo raspisivati. Tu relaciju ponovno možemo dovesti u oblik spreman za integraciju:

$$\frac{du}{d\varphi} = u'(u) \Rightarrow \frac{du}{u'(u)} = d\varphi \quad (87)$$

koji integriramo uz odgovarajuće granice integracije<sup>20</sup>:

$$\int_{u_0}^u \frac{d\tilde{u}}{u'(\tilde{u})} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\tilde{\varphi}. \quad (88)$$

Lijevi integral nešto je složeniji od desnoga, koji je trivijalan:

$$\pm k \arcsin \frac{u - Ck^2}{\sqrt{(u_0 - Ck^2)^2 + (ku'_0)^2}} \Big|_{u_0}^u = \tilde{\varphi} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi}. \quad (89)$$

Po uvrštavanju granica integracije:

$$\arcsin \frac{u - Ck^2}{\sqrt{(u_0 - Ck^2)^2 + (ku'_0)^2}} - \arcsin \frac{u_0 - Ck^2}{\sqrt{(u_0 - Ck^2)^2 + (ku'_0)^2}} = \pm \frac{\varphi - \varphi_0}{k} \quad (90)$$

samo trebamo riješiti prethodnu jednadžbu po  $u$ :

$$u(\varphi) = \pm \sqrt{(u_0 - Ck^2)^2 + (ku'_0)^2} \sin \left[ \frac{\varphi - \varphi_0}{k} \pm \operatorname{arctg} \frac{ku'_0}{u_0 - Ck^2} \right] + Ck^2. \quad (91)$$

Ovo je traženo rješenje, ekvivalentno ranijemu iz (80). Ova ekvivalentnost može se provjeriti primjenom trigonometrijskog identiteta za sinus zbroja kutova:  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ . Također smo iskoristili jednakost<sup>21</sup>  $\arcsin(x/\sqrt{x^2 + y^2}) = \operatorname{arctg}(y/x)$  kako bismo taj član doveli u jednostavniji oblik, konzistentniji sa zapisom iz (15). Zaostala sloboda predznaka tehnički je artefakt koji ne podrazumijeva da su oba rješenja dozvoljena, već da se mora izabrati onaj predznak koji je u skladu s početnim uvjetima. Naime, kompatibilnost ovog specifičnog rješenja s bilo kojim skupom početnih uvjeta može se postići na dva načina: (1) ili tako da je amplituda pred sinusom strogo nenegativna, a fazni pomak (ne početni kut!) pod sinusom poprima vrijednosti iz intervala širine  $2\pi$ ; (2) ili tako da fazni pomak pod sinusom poprima vrijednosti iz užeg intervala, širine  $\pi$ , no po cijenu da se amplitudi pred sinusom pridružuje predznak po volji. U našem slučaju korijenski član iz amplitude *po definiciji korijena* strogo je nenegativan, dok arkus funkcija pod sinusom vraća vrijednosti s intervala širine  $\pi$ . Dakle, u obje mogućnosti za iskazivanjem rješenja narušen

<sup>20</sup>U (84) i (88) općenito bismo mogli uzeti početne uvjete u različitim početnim točkama, ne nužno u istoj  $\varphi_0$ . Na primjer, početne vrijednosti za  $u$  i  $u'$  iz (84) mogle su odgovarati kutnoj koordinati  $\varphi_1$  u nekom trenutku  $t_1$ , a početni položaj i početna kutna koordinata iz (88) nekom drugom kutu  $\varphi_2$  u trenutku  $t_2$ . Isto smo mogli napraviti i pri izboru dvaju početnih uvjeta iz (76) i (77). No tolika razina općenitosti nije nam potrebna.

<sup>21</sup>Zbog specifičnosti definicija arkus-funkcija jednakost iz glavnog teksta vrijedi samo za pozitivne  $x$  i  $y$ . Ispravnija jednakost je  $\arcsin(x/\sqrt{x^2 + y^2}) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(x/|y|)$ . No ovo je kompenzirano nužnim izborom predznaka iz (91).

je po jedan od zahtjeva potrebnih za njegovu potpunu općenitost. U (91) to je kompenzirano zaostalom slobodom predznaka koji se mora pažljivo izabrati na temelju usporedbe s početnim uvjetima. Formalno govoreći, tijekom rastava sinusa zbroja pojavljuje se član  $\sin\{\arctg[ku'_0/(u_0 - Ck^2)]\}$  koji je nenegativan na (graničnim vrijednostima proširenom) intervalu vrijednosti  $[0, \pi]$  koje vraća arkus kotangens. Rezultat tog dijela rastava u konačnici mora odgovarati članu  $u_0 - Ck^2$  iz (80), koji može biti i negativan. Stoga je potrebno „ručno“ osigurati ispravnost predznaka pravilnim izborom u (91). Upravo je zbog ove tehničke zamršenosti u općenitom slučaju (bez poznavanja faze rješenja unaprijed) bolje pretpostaviti oblik rješenja iz (74) umjesto alternativnog oblika  $u(\varphi) = U \sin[\varphi/k - \vartheta] + Ck^2$ , nepoznatih konstanti  $U$  i  $\vartheta$ .

### Treći izvod.

Treći pristup temelji se na konstrukciji kompleksnoga člana:

$$w = u + ik u' \quad (92)$$

gdje se  $k$  pojavljuje zbog kompatibilnosti fizikalnih jedinica dvaju članova u zbroju. Pri tome je izbor samog  $k$  daleko od nužnog; on se pojavljuje tek kao najprikladniji nosač točno onih jedinica koje su nam potrebne. Derivacijom ovakvog člana u imaginarnom dijelu pojavljuje se druga derivacija  $u''$ , koju možemo izraziti iz diferencijalne jednadžbe (70):

$$w' = u' + ik u'' = u' + ik \left( C - \frac{u}{k^2} \right) = -\frac{i}{k}(u + ik u') + iCk = -\frac{i}{k}w + iCk. \quad (93)$$

Upravo zbog prirode ovisnosti između  $u''$  i  $u$ , određene diferencijalnom jednadžbom koju rješavamo, dogodilo se malo čudo: s desne strane izraza pojavio se početni član  $w$ , čime smo konstruirali diferencijalnu jednadžbu prvog reda za sam  $w$ . Pripremom za integraciju:

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{i}{k}(w - Ck^2) \Rightarrow \frac{dw}{w - Ck^2} = -\frac{i}{k}d\varphi \quad (94)$$

te integriranjem uz odgovarajuće granice integracije:

$$\int_{w_0}^{w(\varphi)} \frac{d\tilde{w}}{\tilde{w} - Ck^2} = -\frac{i}{k} \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\tilde{\varphi} \Rightarrow \ln(\tilde{w} - Ck^2) \Big|_{w_0}^{w(\varphi)} = -\frac{i}{k} \tilde{\varphi} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} \quad (95)$$

preostaje rješenje:

$$\ln \frac{w(\varphi) - Ck^2}{w_0 - Ck^2} = -\frac{i}{k}(\varphi - \varphi_0) \Rightarrow w(\varphi) = (w_0 - Ck^2) e^{-i(\varphi - \varphi_0)/k} + Ck^2. \quad (96)$$

Početnu vrijednost  $w_0$  lako nalazimo izravnim uvrštavanjem poznatih početnih uvjeta u (92):  $w_0 = u_0 + iku'_0$ . Prema samoj konstrukciji iz (92), traženo rješenje sve vrijeme skriva se u realnome dijelu kompleksnog člana:  $u(\varphi) = \operatorname{Re} w(\varphi)$ , stoga još samo trebamo izolirati taj realni dio. U tu svrhu raspisujemo kompleksni eksponencijalni član:

$$w(\varphi) = \left[ (u_0 - Ck^2) + iku'_0 \right] \left[ \cos[(\varphi - \varphi_0)/k] - i \sin[(\varphi - \varphi_0)/k] \right] + Ck^2 \quad (97)$$

kako bismo nakon množenja dvaju kompleksnih brojeva iščitali:

$$u(\varphi) = (u_0 - Ck^2) \cos[(\varphi - \varphi_0)/k] + ku'_0 \sin[(\varphi - \varphi_0)/k] + Ck^2. \quad (98)$$

Oblik ovog rješenja identičan je onome iz (80). Primijetimo da smo, za razliku od drugog izvoda, konstrukcijom kompleksnog člana problem riješili samo jednom integracijom. Pri tome smo za cijenu jedne integracije dobili dvije veličine: traženu ovisnost  $u(\varphi)$  iz realnog dijela te njezinu derivaciju koja se sve vrijeme skriva u imaginarnom dijelu:  $u'(\varphi) = [\operatorname{Im} w(\varphi)]/k$ .

\* \* \*

Kao što smo vidjeli, iako se oblik rješenja iz (91) izravnije uklapa u uobičajenu parametrizaciju čunjosječnica iz (12), u općenitom slučaju je prikladniji oblik rješenja iz (80), tj. (98), stoga ćemo upravo taj oblik iskoristiti u općenitijom zapisu traženog rješenja za geometrijski oblik putanje  $r(\varphi)$ . Prisjetimo se definicije supstitucijskog člana  $u$  iz (64) te u kontekstu svojeg problema uvrstimo  $k = 1$ , jer smo član  $k$  samo privremeno uveli radi općenitosti izvoda, da bi bio primjenjiv i na širu klasu problema od našega. Izravno slijedi:

$$r(\varphi) = \frac{1}{(u_0 - C) \cos(\varphi - \varphi_0) + u'_0 \sin(\varphi - \varphi_0) + C}. \quad (99)$$

Za potpuni uvid u ulogu početnih uvjeta samo je potrebno raspisati članove  $u_0$ ,  $u'_0$  i  $C$  iz (71), (73) i (69).

Sad ćemo općenito rješenje (99) primijeniti na problem iz glavnog dijela teksta, uvrštavajući konkretne početne uvjete iz (13) i (14). Pri tome ulogu Kartezijevih koordinata  $x$ ,  $y$  i sfernog kuta  $\varphi$ , koji su bili prikladniji za izvod i parametrizaciju općenitog oblika putanje, notacijskim prijelazom  $\varphi \rightarrow \theta$ ,  $\varphi_0 \rightarrow \theta_0$  te  $\Phi_0 \rightarrow \Theta_0$  pripisujemo cilindričnim koordinatama  $z$  i  $\rho$  te sfernom kutu  $\theta$ , koji su prikladniji za parametrizaciju čitave klase hiperboličnih putanja koje nas zanimaju u kontekstu glavnog problema. Svodeći početne

uvjete (13) i (14) na tako prilagođen oblik iz (56) i (57), tj. parametrizirajući ih normom i kutnim otklonom pripadnih vektora:

$$\vec{r}_0 = r_0 (\cos \theta_0 \hat{z} + \sin \theta_0 \hat{\rho}), \quad (100)$$

$$\vec{v}_0 = v_0 (\cos \Theta_0 \hat{z} + \sin \Theta_0 \hat{\rho}), \quad (101)$$

za početni položaj nalazimo:  $r_0 \rightarrow \infty$  i  $\theta_0 \rightarrow \pi$ , a za usmjerenje početne brzine (od samog početka parametrizirane iznosom  $v_0$ ):  $\Theta_0 = 0$ . U skladu s time, za početnu vrijednost  $u_0$  iz (71) izravno slijedi:

$$u_0 = 0. \quad (102)$$

Pokušajem izravnog uvrštavanja  $r_0$ ,  $\theta_0$  i  $\Theta_0$  u izraz za početnu vrijednost  $u'_0$  iz (73):  $u'_0 \rightarrow 1/(\infty \cdot \operatorname{tg} \pi) = 1/(\infty \cdot 0)$ , dolazimo do neodređenog izraza, stoga ga moramo pažljivije izračunati. Pri tome smo slobodni odmah uvrstiti  $\Theta_0 = 0$  jer je to egzaktni kutni otklon početne brzine (upravo smo ga tako sami izabrali), dok  $\theta_0 \rightarrow \pi$  vrijedi samo u limesu, jer da je egzaktni početni položaj iz (13) ne bi mogao imati  $\hat{\rho}$ -komponentu, tj. ležao bi na  $z$ -osi. Stoga u limesu promatramo ponašanje izraza  $u'_0 = 1/(r_0 \operatorname{tg} \theta_0)$ :

$$u'_0 = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi} \frac{1}{r_0 \operatorname{tg} \theta_0} = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi} \left( -\frac{1}{r_0 \sin \theta_0} \right) = -\frac{1}{\varrho_0}, \quad (103)$$

gdje prijelaz s tangensa na *negativni* sinus slijedi iz ponašanja tangensa oko  $\pi$ . Posljednja jednakost slijedi prepoznavanjem člana  $r_0 \sin \theta_0$  kao  $\rho$ -komponente početnog položaja iz (100), za koju smo u (13) izabrali  $\varrho_0$ . Ovime smo također smo odredili i vrijednost konstante  $C$  iz (69):

$$C = -\frac{\kappa}{\varrho_0^2}. \quad (104)$$

Sada imamo sve što potrebno uvrstiti u (99) kako bismo rekonstruirali konkretno rješenje u skladu s postavljenim početnim uvjetima (uz, prisjetimo se, notacijsku zamjenu  $\varphi \rightarrow \theta$  te  $\theta_0 \rightarrow \pi$ ):

$$r(\theta) = \frac{\varrho_0^2}{\varrho_0 \sin \theta - \kappa(1 + \cos \theta)} = \frac{\varrho_0^2}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( \varrho_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \kappa \right)}. \quad (105)$$

Ekvivalentnost dvaju izraza slijedi temeljem trigonometrijskih identiteta te oba predstavljaju jednakovaljane inačice izraza (15) iz glavnoga teksta.

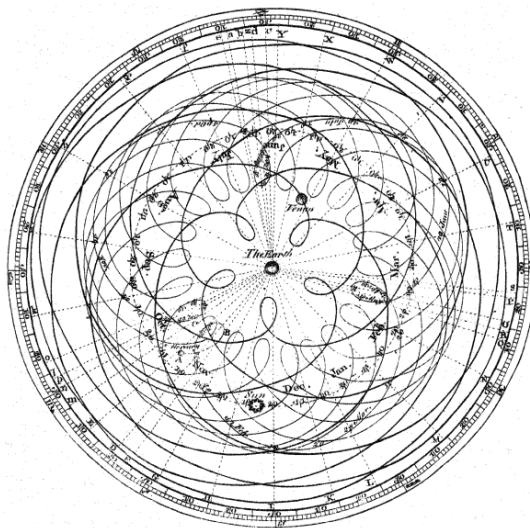
**Zadatak.** *Želite li se sami okušati u izvodu hiperboličnih putanja odbojnog Rutherfordovog raspršenja, no bez ulaženja u općenit oblik gibanja u polju kulonske sile, izvedite oblik putanje iz (105), tj. (15) korištenjem sferne  $\theta$  koordinate (umjesto  $\varphi$ ) od samog početka, uz izravnu primjenu specifičnih početnih uvjeta iz (13) i (14), umjesto onih općenitih iz (56) i (57).*

### Završna riječ

U sveučilišnim udžbenicima oblik putanje iz (12), odnosno (99) tipično se izvodi u kontekstu Keplerovog problema, vezanog uz gibanje dvaju nebeskih tijela u gravitacijskom međudjelovanju, dok se poglavlja o Rutherfordovom raspršenju obično usredotočuju na tzv. udarni presjek raspršenja, veličinu od velike važnosti u fizici. Za razliku od kulonske sile, gravitacijska je u matematičkom pogledu restriktivnija jer je uvijek privlačna – ne dopušta mogućnost odbojnog međudjelovanja. Međutim, dok su u polju odbojne sile (takve da  $\vec{F} \propto \hat{r}/r^2$ ) moguće jedino hiperbolične putanje, u polju privlačne sile moguće su sve četiri klase putanja (kružne, eliptične, parabolične i hiperbolične), tako da se u kontekstu gravitacijskog problema ne gubi mnogo na općenitosti rješenja. Već je Newton geometrijskim metodama znao dokazati da su putanje dvaju gravitacijski vezanih nebeskih tijela (npr. planeta i zvijezde) elipse. Još i prije njega Johannes Kepler naslutio je to iz opažanih astronomskih podataka, što je danas poznato kao prvi Keplerov zakon planetarnog gibanja. Ove spoznaje u istaknutoj su suprotnosti s ranijim srednjovjekovnim (zapravo, starogrčkim) shvaćanjima prema kojima se nebeska tijela gibaju po bespotrebno složenim putanjama (danas neslavnim epiciklima; slika 7), podređenima očuvanju ideje o Zemlji kao središtu svemira. Upravo matematički opis gibanja koji smo prikazali u ovome Dodatku stoji između srednjovjekovnih poimanja planetarnih orbita i suvremenog shvaćanja nebeske mehanike.



Johannes Kepler  
(1571.–1630.), njemački  
astronom, preteča moderne  
fizike.



Slika 7. Srednji vijek.



## Literatura

- [1] Hans Geiger, *On the Scattering of  $\alpha$ -Particles by Matter*, Proceedings of the Royal Society of London A 81 (1908) 174–177 [DOI:10.1098/rspa.1908.0067]
- [2] Hans Geiger, Ernest Marsden, *On a Diffuse Reflection of the  $\alpha$ -Particles*, Proceedings of the Royal Society of London A 82 (1909) 495–500 [DOI:10.1098/rspa.1909.0054]
- [3] Hans Geiger, *The Scattering of the  $\alpha$ -Particles by Matter*, Proceedings of the Royal Society of London A 83 (1910) 492–504 [DOI:10.1098/rspa.1910.0038]
- [4] Ernest Rutherford, 'The Scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  Particles by Matter and the Structure of the Atom,' Philosophical Magazine 21 (1911) 669–688 [DOI:10.1080/14786440508637080]
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_coordinate\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system)
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical\\_coordinate\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_coordinate_system)
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Rutherford\\_scattering](https://en.wikipedia.org/wiki/Rutherford_scattering)
- [8] [https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb\\_wave\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb_wave_function)
- [9] J. W. Adolph, A. L. Garcia, W. G. Harter, G. C. McLaughlin, R. R. Shiffman, V. G. Surkus, *Some Geometrical Aspects of Classical Coulomb Scattering*, American Journal of Physics 40 (1972) 1852–1857 [DOI:10.1119/1.1987076]
- [10] I. Samengo, R. O. Barrachina, *Rainbow and glory scattering in Coulomb trajectories starting from a point in space*, European Journal of Physics 15 (1994) 300–308 [DOI:10.1088/0143-0807/15/6/004]
- [11] R. E. Warner, L. A. Huttar, *The parabolic shadow of a Coulomb scatterer*, American Journal of Physics 59 (1991) 755–756 [DOI:10.1119/1.16757]
- [12] Ivan Topić, *Sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja* (diplomski rad), 2020. [urn:nbn:hr:217:155529]
- [13] Dario Rudec, *Sjena odbojnog Rutherfordovog raspršenja u laboratorijskom sustavu* (diplomski rad), 2020. [urn:nbn:hr:217:903295]

- [14] Petar Žugec, Ivan Topić, *A shadow of the repulsive Rutherford scattering in the fixed-target and the center-of-mass frame*, European Journal of Physics 41 (2020) 065005 [DOI:10.1088/1361-6404/aba32c; arXiv:2009.04920]
- [15] Petar Žugec, Dario Rudec, *A shadow of the repulsive Rutherford scattering in the laboratory frame*, European Journal of Physics 42 (2021) 055018 [DOI:10.1088/1361-6404/ac172d; arXiv:2107.10951]
- [16] [https://en.wikipedia.org/wiki/Envelope\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Envelope_(mathematics))
- [17] D. A. Shatilov, Z. K. Silagadze, *A shadow of the repulsive Rutherford scattering and Hamilton vector*, European Journal of Physics 42 (2021) 035001 [DOI:10.1088/1361-6404/abd98b; arXiv:2101.03543]
- [18] J. W. Bruce, P. J. Giblin, *What Is an Envelope?*, The Mathematical Gazette 65 (1981) 186–192 [DOI:10.2307/3617131]
- [19] K. Bickel, P. Gorkin, T. Tran, *Applications of Envelopes*, Complex Analysis and its Synergies volume 6 (2020) 2 [DOI:10.1007/s40627-019-0039-z; arXiv:1810.11678]
- [20] Jean-Marc Richard, *Safe domain and elementary geometry*, European Journal of Physics 25 (2004) 835–844 [DOI:10.1088/0143-0807/25/6/016; arXiv:physics/0410034]
- [21] J. Gu, C.-C. Chen, *A geometric approach to the envelope of Coulomb orbits starting from a point in space*, European Journal of Physics 42 (2021) 055007 [DOI:10.1088/1361-6404/ac0fbb]
- [22] [https://en.wikipedia.org/wiki/Abel-Ruffini\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Abel-Ruffini_theorem)
- [23] [https://en.wikipedia.org/wiki/Galois\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Galois_theory)
- [24] [https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation)
- [25] [https://proofwiki.org/wiki/Cardano's\\_Formula](https://proofwiki.org/wiki/Cardano's_Formula)
- [26] [https://en.wikipedia.org/wiki/Quartic\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Quartic_equation)
- [27] [https://proofwiki.org/wiki/Ferrari's\\_Method](https://proofwiki.org/wiki/Ferrari's_Method)
- [28] [https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental\\_theorem\\_of\\_algebra](https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra)