MATEMATIKA

Matematička indukcija i specijalizacija primijenjena na sumu recipročnih translatiranih produkata

Petar Svirčević[1]

U ovom članku ćemo definirati sumu recipročnih translatiranih produkata, koje ćemo sumirati metodom matematičke indukcije, a onda primjenom specijalizacije doći do zanimljivih suma konačnih i beskonačnih redova. Na kraju ćemo dati jednu dosta složenu nejednakost vezanu za transcedentnu vrijednost

$$\frac{2^{k-1}\ln 2}{(k-1)^2}.$$

Definicija 1. Zadan je aritmetički niz

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \tag{1}$$

gdje je $a_n = a_1 + (n-1)d$ i $a_1 = a$. Niz $a_1a_2\dots a_k,\ a_2a_3\dots a_{k+1}, \dots, a_na_{n+1}\dots a_{n+k-1}$ zovemo *konačni n-člani niz translatiranih produkata elemenata aritmetičkog niza* ili samo *niz translatiranih aritmetičkih produkata*.

Definicija 2. Suma

$$\begin{aligned} S_{kn}^{ad} &= \frac{1}{a_1a_2\dots a_k} + \frac{1}{a_2a_3\dots a_{k+1}} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}\dots a_{n+k-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a+(i-1)\,d)\,(a+id)\dots(a+(i+k-2)d)} \end{aligned} \tag{2}$$

je *zbroj recipročnih translatiranih aritmetičkih produkata* ili samo *suma recipročnih produkata*, a suma

$$\overline{S}_{kn}^{ad} = \frac{1}{a_1a_2\dots a_k} - \frac{1}{a_2a_3\dots a_{k+1}} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{a_na_{n+1}\dots a_{n+k-1}} \tag{3}$$

alternativna suma recipročnih translatiranih aritmetičkih produkata ili samo *alternativna suma recipročnih produkata*.

Napomena 1. Vidimo, da uvedena oznaka S_{kn}^{ad} za sumu sadrži četiri parametra, i to dva na poziciji eksponenta i dva na poziciji indeksa, a značenja su im evidentna. Dakle $a = a_1$ je prvi član aritmetičkog niza, a d diferencija tog niza. Nadalje, k je broj faktora u produktu uzastopnih članova navedenog niza i konačno n je broj sumanada uzastopnih recipročnih vrijednosti produkata aritmetičkog niza. U predstojećim razmatranjima mora biti ispunjen uvjet $a_j \neq 0\ \ (j = 1, 2, \dots, n+k-1)$ i $k = 2, 3, 4, \dots$, a u alternirajućem

[1] Autor je profesor u miru na Tehničkoj školi Zagreb, u Zagrebu; e-pošta: petar.svircevic@zg.t-com.hr

slučaju može biti $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Ovi uvjeti su jasni, jer kada bi bilo $k = 1$, ne bi postojale eksplicitne formule za

$$S_{1n}^{ad} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \ldots + \frac{1}{a+(n-1)d}$$
$$\overline{S}_{1n}^{ad} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{a+(n-1)d}.$$

Nadalje, može se pokazati da je red $S_{1\infty}^{ad}$ divergentan. Recimo i to, da je u specijalnom slučaju harmonijski red $S_{1\infty}^{11} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ sporo divergirajući, tako je npr.

$$S_{1\ 10^{43}}^{1\ 1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{10^{43}} < 100.$$

I na kraju napomenimo, da se u matematičkoj analizi pokazuje

$$\overline{S}_{1\infty}^{1\ 1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2. \tag{4}$$

Napomena 2. Najprije ćemo dokazati lemu 1, koju ćemo zatim koristiti za izvod eksplicitne formule za sumu S_{kn}^{ad}.

Lema 1. Dokažimo ovaj rastav u parcijalne razlomke

$$B(x,n) = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\binom{n}{i}}{x+i}\right). \tag{5}$$

Dokaz. Sada ćemo taj identitet dokazati matematičkom indukcijom. Ako je $n = 1$, iz (5) slijedi $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1!}\left(\frac{\binom{1}{0}}{x} - \frac{\binom{1}{1}}{x+1}\right)$. Nadalje, nije nužno, ali možemo pokazati, da je (5) točno i za $n = 2$ i $n = 3$:

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \ldots = \frac{1}{2!}\left(\frac{\binom{2}{0}}{x} - \frac{\binom{2}{1}}{x+1} + \frac{\binom{2}{2}}{x+2}\right),$$
$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \ldots = \frac{1}{3!}\left(\frac{\binom{3}{0}}{x} - \frac{\binom{3}{1}}{x+1} + \frac{\binom{3}{2}}{x+2} - \frac{\binom{3}{3}}{x+3}\right).$$

Jasno je, da smo na osnovu ovih rastava i heuristički došli do (5). Sada ćemo matematičkom indukcijom i dokazati taj rastav. Dakle, pretpostavimo da za $n = k$

vrijedi

$$B(x,k)=\frac{1}{x(x+1)\dots(x+k)}=\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{\binom{k}{i}}{x+i}\right). \tag{6}$$

Ako je sada $n=k+1$ iz (6) slijedi

$$\begin{aligned}
B(x,k+1)&=\frac{1}{x(x+1)\dots(x+k)}\cdot\frac{1}{x+k+1}=\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{\binom{k}{i}}{(x+i)(x+k+1)}\right)\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{\binom{k}{i}}{k+1-i}\left(\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x+k+1}\right)\\
&=\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{\binom{k}{i}}{(k+1-i)(x+i)}-\frac{1}{x+k+1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{\binom{k}{i}}{k+1-i}\right]\\
&=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{\binom{k+1}{i}}{x+i}-\frac{1}{(k+1)!\,(x+k+1)}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i}\\
&=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\frac{\binom{k+1}{i}}{x+i}-\frac{1}{(k+1)!(x+k+1)}\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}\\
&=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\frac{\binom{k+1}{i}}{x+i}-\frac{1}{(k+1)!(x+k+1)}(1-1)^{k+1}\\
&=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\binom{n}{i}}{x+i}.
\end{aligned}$$

Dakle (5) je u potpunosti dokazano. □

Teorem 1. Ako je $A_n=\dfrac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)\dots(a+(n+k-2)d)}$ iz definicije (2) slijedi

$$\begin{aligned}
S_{kn}^{ad}&=A_1+A_2+\ldots+A_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\prod_{i=1}^{k}(a+(i+j-2)d)}\\
&=\frac{1}{(k-1)!d^{k-1}}\left[\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^{l-1}\frac{\binom{k-2}{l}}{a+ld}-\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^l\frac{\binom{k-2}{l}}{a+(n+l)d}\right]
\end{aligned}\tag{7}$$

ili

$$S_{kn}^{ad}=\frac{1}{(k-1)!d^{k-1}}\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^l\frac{\binom{k-2}{l}nd}{(a+ld)(a+(n+l)d)}. \tag{8}$$

Dokaz. Za $k=2$ je

$$\begin{aligned}
S_{2n}^{ad} &= \frac{1}{a(a+d)}+\frac{1}{(a+d)(a+2d)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)}\\
&= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}\right)+\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a+d}-\frac{1}{a+2d}\right)+\ldots+\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a+(n-1)d}-\frac{1}{a+nd}\right)\\
&= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nd}\right)=\frac{n}{a+nd}
\end{aligned}$$

ili

$$S_{2n}^{ad}=\frac{1}{(2-1)!d^{2-1}}\left(\frac{\binom{2-2}{0}}{a}-\frac{\binom{2-2}{0}}{a+nd}\right)=\frac{n}{a+nd} \tag{9}$$

gdje je po definiciji $\binom{0}{0}=1$. Nije nužno, ali imamo

$$\begin{aligned}
S_{3n}^{ad} &= \frac{1}{a(a+d)(a+2d)}+\frac{1}{(a+d)(a+2d)\,(a+3d)}+\ldots\\
&\quad+\frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)\,(a+(n+1)d)}\\
&= \frac{1}{2d^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}-\frac{1}{a+nd}+\frac{1}{a+(n+1)d}\right)\\
&= \frac{1}{(3-1)!d^{3-1}}\left[\left(\frac{\binom{3-2}{0}}{a}-\frac{\binom{3-2}{1}}{a+d}\right)-\left(\frac{\binom{3-2}{0}}{a+nd}-\frac{\binom{3-2}{1}}{a+(n+1)d}\right)\right],
\end{aligned}$$

jer na osnovi toga možemo heuristički pretpostaviti, da je (7) odnosno (8) točno. Dakle, ako u identitet (6) uvrstimo $x=\dfrac{a+nd}{d}$ i $n=k-1$, dobivamo

$$A_{n+1}=\frac{1}{d^k}B\left(\frac{a+nd}{d},k-1\right) \tag{10}$$

i konačno

$$S_{k\ n}^{a\ d}+A_{n+1}=S_{k\ n}^{a\ d}+\frac{1}{(a+nd)(a+(n+1)d)\ldots(a+(n+k-1)d)}=\ldots=S_{k\ n+1}^{a\ d} \tag{11}$$

pa je time, uz dosta ispisa, teorem dokazan matematičkom indukcijom. □

Korolar 1. Dokažimo

$$S_{k\ \infty}^{a\ d}=\frac{1}{(k-1)!d^{k-1}}\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^l\frac{\binom{k-2}{l}}{(a+ld)}. \tag{12}$$

Dokaz. Ako $n\to\infty$ iz (8), ako brojnike i nazivnike dijelimo s n, dobivamo

$$S_{k\ \infty}^{a\ d}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(k-1)!d^{k-1}}\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^l\frac{\binom{k-2}{l}d}{(a+ld)\left(\frac{a}{n}+\left(1+\frac{l}{n}\right)d\right)},$$

a to je (12). □

Sada ćemo prikazati različite *primjene* T1 i K1 u obliku zadataka.

Zadatak 1. Dokažimo

$$S_{2\,n}^{1\,1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{13}$$

Rješenje. Tu sumu možemo dobiti i napamet, a koristili smo je čak i u osnovnoj školi. Dakle, ako je $a = d = 1$ i $k = 2$, tada iz (8) slijedi (13).

Provjera. Ako je $n = 3$, tada je računski $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \ldots = \frac{3}{4}$, a pomoću (13) također $S_{2\,3}^{1\,1} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$.

Zadatak 2. Dokažimo

$$S_{3n}^{11} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}. \tag{14}$$

Rješenje. Iz (7) slijedi

$$S_{3n}^{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \ldots = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}. \tag{15}$$

Ako bismo posumnjali, da (14) nije točno, mogli bismo je dokazati matematičkom indukcijom. Dakle, $S_{31}^{11} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$ što je točno. Budući je

$$S_{3n}^{11} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \ldots = S_{3\,n+1}^{11},$$

što je dokaz valjanosti formule (14).

Zadatak 3. Dokažimo

$$S_{3n}^{12} = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}. \tag{16}$$

Uputa. Ako u (8) uvrstimo $a = 1$, $d = 2$ i $k = 3$, nakon sređivanja slijedi (16).

Primjenom (7) ili (8) riješimo zadatke od Z4 do Z8.

Zadatak 4. Dokažimo

$$\begin{aligned} S_{4n}^{ad} &= \frac{1}{a(a+d)(a+2d)(a+3d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)(a+4d)} \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)\,(a+(n+1)d)\,(a+(n+2)d)} \\ &= \frac{1}{3!d^3}\left[\left(\frac{\binom{2}{0}}{a} - \frac{\binom{2}{1}}{a+d} + \frac{\binom{2}{2}}{a+2d}\right) - \left(\frac{\binom{2}{0}}{a+nd} - \frac{\binom{2}{1}}{a+(n+1)d} + \frac{\binom{2}{2}}{a+(n+2)\,d}\right)\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Zadatak 5. Dokažimo jednakost

$$\begin{aligned} S_{4n}^{11} &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Zadatak 6. Dokažimo jednakost

$$\begin{aligned} S_{4n}^{12} &= \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \\ &= \frac{n(4n^2+18n+23)}{45(2n+1)(2n+3)(2n+5)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Zadatak 7. Dokažimo

$$\begin{aligned} S_{5n}^{ad} &= \frac{1}{a(a+d)(a+2d)(a+3d)(n+4d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)\,(a+3d)\,(a+4d)(n+5d)} \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)\,(a+(n+1)d)\,(a+(n+2)d)(a+(n+3)d)} \\ &= \frac{1}{4!d^4}\left[\left(\frac{\binom{3}{0}}{a} - \frac{\binom{3}{1}}{a+d} + \frac{\binom{3}{2}}{a+2d} - \frac{\binom{3}{3}}{a+3d}\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\binom{3}{0}}{a+nd} - \frac{\binom{3}{1}}{a+(n+1)d} + \frac{\binom{3}{2}}{a+(n+2)\,d} - \frac{\binom{3}{3}}{a+(n+3)\,d}\right)\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Zadatak 8. Dokažimo

$$\begin{aligned} S_{5n}^{11} &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n(n+5)(n^2+5n+10)}{96(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Primjenom K1, tj. (12), riješimo zadatke od Z9 do Z24.

Zadatak 9. Dokažimo

$$S_{2\ \infty}^{1\ 1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = 1. \tag{22}$$

Zadatak 10. Dokažimo

$$S_{2\ \infty}^{1\ 2} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \frac{1}{2}. \tag{23}$$

Zadatak 11. Dokažimo

$$S_{2\ \infty}^{2\ 2} = \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \ldots = \frac{1}{4}. \tag{24}$$

Zadatak 12. Dokažimo

$$S_{3\ \infty}^{1\ 1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots = \frac{1}{4}. \tag{25}$$

Zadatak 13. Dokažimo

$$S_{3\;\infty}^{1\;2} = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \ldots = \frac{1}{12}. \tag{26}$$

Zadatak 14. Dokažimo

$$S_{3\;\infty}^{2\;2} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 6\cdot 8} + \frac{1}{6\cdot 8\cdot 10} + \ldots = \frac{1}{32}. \tag{27}$$

Zadatak 15. Dokažimo

$$S_{4\;\infty}^{1\;1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots = \frac{1}{18}. \tag{28}$$

Zadatak 16. Dokažimo

$$S_{4\;\infty}^{1\;2} = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \ldots = \frac{1}{90}. \tag{29}$$

Zadatak 17. Dokažimo

$$S_{4\;\infty}^{2\;2} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{1}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} \ldots = \frac{1}{288}. \tag{30}$$

Zadatak 18. Dokažimo

$$S_{5\;\infty}^{1\;1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots = \frac{1}{96}. \tag{31}$$

Zadatak 19. Dokažimo

$$S_{5\;\infty}^{1\;2} = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13} + \ldots = \frac{1}{840}. \tag{32}$$

Zadatak 20. Dokažimo

$$S_{5\;\infty}^{2\;2} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \frac{1}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \ldots = \frac{1}{3072}. \tag{33}$$

Zadatak 21. Dokažimo

$$\begin{aligned} S_{k\;\infty}^{1\;1} &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k+1)} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (k+2)} + \ldots \\ &= \frac{1}{(k-1)(k-1)!}. \end{aligned} \tag{34}$$

Zadatak 22. Dokažimo, da za alternirajuću sumu vrijedi

$$\overline{S}_{2\;\infty}^{1\;1} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots = 2\ln 2 - 1. \tag{35}$$

Rješenje. Iz matematičke analize imamo

$$\overline{S}_{1\;\infty}^{1\;1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2. \tag{36}$$

Jasno je

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots \\ &\quad = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots \\ &\quad = -1 + 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\right) = 2\ln 2 - 1, \end{aligned}$$

radi (36).

Zadatak 23.

$$\overline{S}_{3\ \infty}^{1\ 1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \ldots = 2\ln 2 - \frac{5}{4}. \tag{37}$$

Rješenje. Ako primijenimo rastav

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \tag{38}$$

na našu sumu, tada dobivamo:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{3\ \infty}^{1\ 1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) - \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\right) \\
&= \frac{1}{2}(\ln 2) + (\ln 2 - 1) + \frac{1}{2}\left(\ln 2 - 1 + \frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 - \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Zadatak 24. Vrijednost od $\ln 2$ može se izračunati akceleriranom konvergencijom pomoću formule

$$\ln 2 = \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8}\right) + \left(\frac{1}{9\cdot 10} + \frac{1}{11\cdot 12}\right) + \ldots \tag{39}$$

ili pisano u obliku

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(4n+1)(4n+2)} + \frac{1}{(4n+3)(4n+4}\right). \tag{40}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots \\
&= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots = \ln 2.
\end{aligned}$$

Zadatak 25. Dokažimo nejednakost

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k+1)} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (k+2)} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (k+3)} + \ldots \\
&\quad \leq \frac{2^{k-1}\ln 2}{(k-1)!}
\end{aligned} \tag{41}$$

ako je $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Rješenje. U [3] (zadatak 23) je dana suma

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k+1)}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (k+2)}-\frac{1}{4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (k+3)}+\ldots$$
$$=\frac{2^{k-1}\ln 2}{(k-1)!}-\frac{1}{(k-1)!}\left[\binom{k-1}{1}1+\binom{k-1}{1}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\ldots+\binom{k-1}{k-1}\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^{k}\frac{1}{k-1}\right)\right]$$

iz koje slijedi (41). Ta nejednakost je zanimljiva jer taj alternativni red ima vrijednost sume manju ili jednaku transcendentnom broju $\dfrac{2^{k-1}\ln 2}{(k-1)!}$.

Literatura

[1] I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb 1975.

[2] Петар Свирццевич, *Хеуристика и суме реципроцних транслатираних производа*, ТАНГЕНТА – щцасопис за математику и раццунарство за ущценике средњих сскола, број 87/3, 2016/2017, Београд.

[3] Petar Svirčević, *Polialternativne konačne sume u eksplicitnom obliku*, Matematičko-fizički list, br. 285, Zagreb 2021./2022.