O jednoj nejednakosti iz MFL-a br. 207

Julije Jakšetić[1], *Josip Lopatič*[2], *Marjan Praljak*[3], *Robert Soldo*[4]

U ovom članku vratit ćemo se na zadatak 2738. koji se pojavio u davnom MFL-u br. 207 godine 2001./2002. Naime, zadatak je glasio:

Zadatak. *Neka su* $a_1 \geq 1,\ a_2 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1$, *realni brojevi. Dokaži da je*

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq \frac{2^n}{n+1}\Big(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\Big). \tag{1}$$

Uz zadatak bilo je priloženo rješenje koje je imalo pogrešku u koraku, jer je krivo primijenjena A-G nejednakost. Tu pogrešku ovdje popravljamo, te dajemo tri dokaza dane nejednakosti.

[1] Autor je izvanredni profesor na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu, Zagreb; e-pošta: `jjaksetic@pbf.hr`

[2] Autor je predavač na VBZ, Zaprešić; e-pošta: `josiplopatic@gmail.com`

[3] Autor je izvanredni profesor na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu, Zagreb; e-pošta: `mpraljak@pbf.hr`

[4] Autor je inženjer teorijske matematike zaposlen u firmi Pružne građevine, Zagreb; e-pošta: `robert.soldo@prg.hr`

Rješenje 1. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna.

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da vrijedi

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k) \geq \frac{2^{n-1}}{n}\Big(1+\sum_{k=1}^{n-1} a_k\Big), \quad \text{za neko } n > 1.$$

Korak indukcije: dokažimo da tada vrijedi nejednakost (1). Koristeći pretpostavku indukcije, imamo

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k)\cdot(1+a_n) \geq \frac{2^{n-1}}{n}\Big(1+\sum_{k=1}^{n-1} a_k\Big)\cdot(1+a_n).$$

Da bi dokazali ovu nejednakost dovoljno je dokazati:

$$\frac{2^{n-1}}{n}(1+S_{n-1})(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1}(1+S_{n-1}+a_n),$$

gdje smo označili $S_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$.

Sređivanjem gornje nejednakosti dobivamo

$$nS_{n-1}a_n + a_n + S_{n-1}a_n + S_{n-1} \geq n - 1 + nS_{n-1} + na_n. \tag{2}$$

Da bi dokazali nejednakost (2) krenimo od očite nejednakosti: $n(a_n - 1) \geq 0$, odakle slijedi:

$$na_n + a_n - n \geq a_n.$$

Zbog očite nejednakosti $S_{n-1} \geq n - 1$, iz prethodne nejednakosti, dalje slijedi

$$\begin{aligned} S_{n-1}(na_n + a_n - n) &\geq (n-1)a_n \\ \implies nS_{n-1}a_n + S_{n-1}a_n - nS_{n-1} &\geq na_n - a_n \\ \implies nS_{n-1}a_n + a_n + S_{n-1}a_n &\geq nS_{n-1} + na_n. \end{aligned}$$

Dodavanjem nejednakosti $S_{n-1} \geq n - 1$ gornjoj, dobivamo nejednakost (2).

⋆ ⋆ ⋆

U drugom dokazu dane nejednakosti ćemo koristiti poznatu Bernoullijevu[5] nejednakost, točnije jednu njenu posljedicu.

Bernoullijeva nejednakost. *Neka je n prirodan broj i $x \geq -1$ realan broj. Tada vrijedi*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$ ili $x = 0$.

Tvrdnja 1. *Za realne brojeve $x_k \geq -1$, $k = 1, 2, \ldots, n$ koji su istog predznaka, vrijedi nejednakost*

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$.

Obje ove tvrdnje se jednostavno dokazuju matematičkom indukcijom i dokaz ovdje nećemo obrazlagati.

---

[5] Jacob Bernoulli (1654. – 1705.), švicarski matematičar

Rješenje 2. Uvedimo supstituciju $a_k = 1 + 2x_k$. Početna nejednakost prelazi u

$$\prod_{k=1}^{n}(2+2x_k) \geq \frac{2^n}{n+1}\left[1+\sum_{k=1}^{n}(1+2x_k)\right],$$

odnosno, sređivanjem dobivamo ekvivalentni oblik

$$2^n\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq \frac{2^n}{n+1}\left(1+n+2\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$$

$$\Longleftrightarrow \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1+\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

Zbog nejednakosti navedene u tvrdnji 1 dovoljno je dokazati

$$1+\sum_{k=1}^{n}x_k \geq 1+\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}x_k,$$

što je pak ekvivalentno s $1 \geq \dfrac{2}{n+1}$, odnosno što je ekvivalentno s $n \geq 1$, što je naravno točno. Ovim smo dokazali i zadanu nejednakost.

Rješenje 3. Sada uvedimo supstituciju $1 + a_k = 2x_k$. Početna nejednakost postaje

$$\prod_{k=1}^{n}2x_k \geq \frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{k=1}^{n}(2x_k-1)\right),$$

odnosno u ekvivalentnom obliku

$$(n+1)\prod_{k=1}^{n}x_k - 2\sum_{k=1}^{n}x_k + n - 1 \geq 0. \tag{3}$$

Lijevu stranu nejednakosti (3) promatrat ćemo kao afinu funkciju po svakoj varijabli

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (n+1)\prod_{k=1}^{n}x_k - 2\sum_{k=1}^{n}x_k + n - 1.$$

Pokazat ćemo da je ta funkcija u svakoj od n varijabli, uz fiksnih preostalih $n-1$ varijabli, rastuća. Bez smanjenja općenitosti fiksirat ćemo prvih $n-1$ varijabli, te pokazati da je pripadna funkcija rastuća u n-toj varijabli.

Neka su x, y proizvoljni realni brojevi takvi da je $x > y$. Dokazat ćemo da je

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x) \geq f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y). \tag{4}$$

U tu svrhu označimo $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}x_k$ i $P_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}x_k$. Sada, nejednakost (4) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$(n+1)P_{n-1}x - 2(S_{n-1}+x) + n - 1 \geq (n+1)P_{n-1}y - 2(S_{n-1}+y) + n - 1,$$

odakle sređivanjem dobivamo ekvivalentni oblik

$$\begin{aligned} & (n+1)P_{n-1}x-(n+1)P_{n-1}y \geq 2(x-y) \\ \Longleftrightarrow\ & (n+1)P_{n-1}(x-y) \geq 2(x-y) \\ \Longleftrightarrow\ & P_{n-1} \geq \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

No, budući da je $x_k \geq 1$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$, vrijedi $P_{n-1} \geq 1$, a zbog $1 \geq \dfrac{2}{n+1}$, vrijedi i gornja nejednakost, čime smo dokazali nejednakost (4).

Štoviše, dokazali smo da je dana afina funkcija rastuća u svakoj od n varijabli, uz fiknih preostalih $n-1$ varijabli. Specijalno, zaključujemo da se njena najmanja vrijednost postiže za najmanje vrijednosti varijabli $x_k \geq 1$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Stoga, najmanja vrijednost dane funkcije postiže se za $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$ i ona iznosi $f_{\min}=0$. Dakle, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq 0$, čime je nejednakost (4) dokazana.

⋆ ⋆ ⋆

Na kraju dajemo nekoliko komentara vezanih uz nejednakost (1) i nekoliko sličnih zadataka za samostalno rješavanje.

1. Uz oznaku $a_0=1$ nejednakost (1) se može zapisati

$$\prod_{k=0}^{n}(1+a_k) \geq \frac{2^{n+1}}{n+1}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big). \tag{5}$$

Pokažite da nejednakost (5), u stvari, vrijedi za sve $a_k \geq 1$, $k=0,1,\ldots,n$ (tj. bez ograničenja $a_0=1$.)

2. Ispitajte kada vrijedi jednakost u (1) i (5).

3. Ako je $0 \leq a_k \leq 1$, $k=0,1,\ldots,n$ onda u (1) vrijedi suprotna nejednakost.

4. Neka je $a_k \geq 1$, $k=1,2,\ldots,n$. Dokažite da vrijedi

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 2^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k - n + 2\Big).$$

5. Neka je $a_k \geq \dfrac{1}{n-1}$, $n \geq 2$, $k \leq n$. Dokažite nejednakost

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Literatura

[1] Matematičko fizički list, br. 207.

[2] N. Elezović, *Odabrani zadaci elementarne matematike*, 1992.

[3] J. Pečarić, *Nejednakosti*, 1996.

[4] D. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, 1970.