ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2022. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/290.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 286.

A) Zadatci iz matematike

3861. Nađi sve međusobno različite pozitivne realne brojeve x_1, x_2, $\ldots$, x_n koji zadovoljavaju jednadžbu

$$1+x_1+2x_1x_2+\ldots+(n-1)x_1x_2\ldots x_{n-1}$$
$$=x_1x_2\ldots x_n.$$

3862. Neka su x, y, z realni brojevi, takvi da je $x+y+z=9$ i $xy+yz+zx=24$. Odredi najveći mogući broj z.

3863. Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$(x^2-y^2)^2=1+16y.$$

3864. Odredi najmanji cijeli broj n, $n\geq 2$, takav da je

$$\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}}$$

cijeli broj.

3865. Odredi najveću i najmanju vrijednost izraza

$$\frac{1}{\sin^2 x+\cos^4 x}+\frac{1}{\sin^4 x+\cos^2 x}.$$

3866. Za brojeve $a\geq 2$, $b\geq 6$, $c\geq 12$ nađi najveću vrijednost izraza

$$\frac{bc\sqrt{a-2}+ca\sqrt[3]{b-6}+ab\sqrt[4]{c-12}}{abc}.$$

3867. U trokutu ABC je $\sphericalangle BAC=45^\circ$. Točka D je na stranici $\overline{BC}$ tako da je $AD\perp BC$. Ako je $|BD|=3$ cm i $|DC|=2$ cm, odredi površinu $\triangle ABC$.

3868. Dan je kvadrat $ABCD$. Simetrala kuta $\sphericalangle BDA$ siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki F. Neka je $R\in\overline{AD}$ tako da je $CR\perp DF$ i $DF\cap CR=K$, $BD\cap CR=L$. Dokaži $|AR|=2|LS|$, gdje je S sjecište dijagonala.

3869. Točka D je polovište dužine $\overline{AB}$. Ako su AM, BN, DE tangente na kružnicu, dokaži

$$|AM|^2+|BN|^2=2(|AD|^2+|DE|^2).$$

3870. Polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{AB}$ paralelograma $ABCD$ su F i E, tim redom. Pravci CF i AB sijeku se u točki M. Dokaži $|AB|^2=|BE|\cdot|BM|$.

3871. Odredi najmanju moguću vrijednost funkcije

$$f(x)=\frac{9}{1+\cos 2x}+\frac{25}{1-\cos 2x},$$

za koju je ona definirana.

3872. Odredi sumu

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1^2+2^2+\ldots+k^2}{k}.$$

3873. Neka su A_1, B_1, C_1 središta kvadrata konstruiranih izvana nad stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC. Dokaži jednakost $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.

3874. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$7^x+x^4+47=y^2,$$

u skupu pozitivnih cijelih brojeva.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 502. Osam istraživača žele prijeći rijeku u prašumi pomoću drvene splavi dugačke 5 m, široke 4 m i visoke 20 cm. Njihova oprema sadrži instrumente koji ne smiju doći u dodir s vodom. Procijenili su da je gustoća drva od kojeg je splav napravljen oko 600 kg/m^3. Ukupna masa svih ljudi je 800 kg, a njihove opreme 120 kg. Ako se svi ukrcaju na splav koliko će njegov gornji rub biti udaljen od vode? Gustoća vode je 1000 kg/m^3.

OŠ – 503. Kovanice od 50 lipa imaju čeličnu jezgru obloženu slitinom željeza i nikla. Učenik želi odrediti postotak nikla u njima. Izvagao je 11 kovanica i utvrdio da im je masa 40.2 g. Kad ih je stavio u menzuru s 50 cm^3 vode razina se vode podigla na

54.9 cm^3. Gustoća čelika je približno jednaka gustoći željeza, iznosi oko 7870 kg/m^3, dok je gustoća nikla 8908 kg/m^3. Koliki je postotak nikla u kovanici od 50 lipa?

OŠ – 504. Četiri trošila, kojima se otpori odnose kao $1:2:3:4$, spojena su tako da im je ukupni otpor jednak najmanjem od njihovih otpora. Kolika struja teče kroz ostala trošila ako je struja kroz trošilo najmanjeg otpora 200 mA? Koliko iznose ti otpori ako je napon izvora na koji su ta trošila spojena 12 V?

OŠ – 505. Koeficijent linearnog toplinskog širenja α opisuje promjenu duljine tijela pri promjeni temperature. Za željezo on iznosi $12 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}. To znači da se željezni štap duljine 1 m produlji za 0.012 mm kad se ugrije za 1 K. Na koju temperaturu treba zagrijati željezni obruč koji treba staviti na drvenu bačvu vanjskog promjera 60 cm ako je promjer obruča 4 mm manji od promjera bačve? Početna temperatura obruča i bačve je $20\,^\circ\text{C}$.

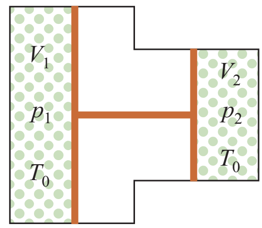
1784. Kolica se gibaju niz kosinu nagiba 35° ubrzanjem 4 m/s^2. Na dnu kosine nastave se gibati po horizontalnoj podlozi uz isti koeficijent trenja. Koliki su put kolica iz stanja mirovanja prevalila po kosini, ako po horizontalnoj podlozi prevale 2.3 m do zaustavljanja? Kolika je njihova brzina na dnu kosine?

1785. Pirit (željezni sulfid, FeS_2) kristalizira u kubičnu rešetku gustoće 5 g/cm^3. Koliku bi masu i duljinu stranice imao monokristal pirita oblika kocke s deset milijuna (10^7) atoma željeza duž svakog brida?

1786. Satelit budućnosti u obliku prstena vrti se oko osi tako da napravi puni okret za 90 s, a centrifugalno ubrzanje na prstenu iznosi 80 % Zemljine gravitacije. Koliki je radijus prstena? Kolika je brzina kruženja? Uzeti $g = 9.81$ m/s^2.

1787. Jupiterovi sateliti Io i Europa kruže oko Jupitera tako da za svaku orbitu Europe Io napravi dvije orbite. Koliko je postotaka brzina kruženja Ia veća od brzine kruženja Europe? Koliko je postotaka radijus kruženja manji?

1788. Dvije povezane cilindrične posude različitih presjeka zatvorene su klipovima koji su povezani krutim štapom kao na slici. Cilindrične posude su napunjene idealnim plinovima iste temperature T_0. Između klipova je vakuum, a sustav je u ravnoteži kad su oba klipa jednako udaljena od kraja pripadnog cilindra. Zbog promjene temperature plina u obje posude nova se ravnoteža uspostavi tako da se desni kilp pomakne na polovicu ranije udaljenosti od kraja posude. Odredi omjer novih temperatura plinova.



1789. Zbog nagiba Zemljine osi vrtnje u odnosu na os putanje od 23.5°, 39.9 % Zemljine površine je u tropskom, 51.8 % u umjerenom, a 8.3 % u polarnom pojasu. Odredi nagib osi planeta na kojemu tropski i umjereni pojas zauzimaju jednaku površinu. Koliki su tada postotci po pojasevima?

1790. Osobama sa zamućenjem očne leće se kirurški ugrađuje umjetna leća umjesto zamućene. Pritom se gubi mogućnost akomodacije oka na daljinu. Ako neka osoba nakon takve operacije vidi oštru sliku predmeta udaljenog 80 cm od oka, koju bi dioptriju naočala trebala dobiti za pogled u daljinu, a koliku za čitanje na udaljenosti 25 cm?

C) Rješenja iz matematike

3833. *Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je* $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = 0$. *Odredi* $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$.

Rješenje.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = 0 \ / \ \cdot ab(a+b)$$

$$b(a+b) - a(a+b) - ab = 0$$

$$(b-a)(b+a) = ab$$

$$\left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{b}\right) = 1$$

$$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1$$
$$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)^2+4\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}$$
$$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2=1+4$$
$$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2=5.$$

Borna Gojšić (4),
Gimnazija Karlovac, Karlovac

3834. *Odredi sve parove prirodnih brojeva* (a,b) *tako da vrijedi*
$$a^2+b^2-2a+b=5.$$

Rješenje. Promatrajmo danu jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu po nepoznanici a:
$$a^2-2a+b^2+b-5=0.$$
Njezina diskriminanta je
$$D=-4(b^2+b-6)=-4(b+3)(b-2),$$
i zbog uvjeta $D\geq 0$ slijedi $b\in[-3,2]$. Kako je $b\geqslant 1$ mogući su samo ovi slučajevi:

1° $b_1=1 \implies a^2-2a-3=0 \implies a_1=-1$, $a_2=3$.

2° $b_2=2 \implies a^2-2a+1=0 \implies (a-1)^2=0 \implies a_3=1$.

Dakle, imamo ukupno dva rješenja:
$$(a,b)\in\{(1,2),(3,1)\}.$$
Provjerom vidimo da oba rješenja zadovoljavaju polaznu jednadžbu.

Marko Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3835. *Odredi sva rješenja sustava jednadžbi*
$$x+2y+4z=12$$
$$xy+4yz+2xz=22$$
$$xyz=6.$$

Prvo rješenje. Iz treće jednadžbe je $z=\dfrac{6}{xy}$, to uvrstimo u drugu:
$$xy+\frac{24}{x}+\frac{12}{y}=22$$
$$\implies xy+12\cdot\frac{2y+x}{xy}=22.$$

Iz prve jednadžbe je $x+2y=12-4z$ i to uvrstimo u gornju:
$$xy+2\cdot\frac{6}{xy}\cdot(12-4z)=22$$
$$\implies \frac{6}{z}+2z\cdot(12-4z)=22.$$
Sređivanjem dobivamo
$$4z^3-12z^2+11z-3=0$$
$$(z-1)\cdot(2z-3)\cdot(2z-1)=0$$

1° Ako je $z_1=1$ polazni sustav je ekvivalentan s
$$x+2y=8$$
$$xy=6.$$
Iz prve jednadžbe je $x=8-2y$, uvrštavanjem u drugu imamo kvadratnu jednadžbu $y^2-4y+3=0$, čija su rješenja $y_1=1$, $y_2=3$ i $x_1=6$, $x_2=2$.

2° Ako je $z_2=\dfrac{3}{2}$ polazni sustav je ekvivalentan s
$$x+2y=6$$
$$xy=4.$$
Iz prve jednadžbe je $x=6-2y$, uvrštavanjem u drugu imamo kvadratnu jednadžbu $y^2-3y+2=0$, čija su rješenja $y_3=1$, $y_4=2$ i $x_3=4$, $x_4=2$.

3° Ako je $z_3=\dfrac{1}{2}$ polazni sustav je ekvivalentan s
$$x+2y=10$$
$$xy=12.$$
Iz prve jednadžbe je $x=10-2y$, uvrštavanjem u drugu je imamo kvadratnu jednadžbu $y^2-5y+6=0$, čija su rješenja $y_5=3$, $y_6=2$ i $x_5=4$, $x_6=6$.

Dakle, zadani sustav ima ukupno šest rješenja:
$$(x,y,z)\in\left\{(2,3,1),\left(2,2,\frac{3}{2}\right),\left(4,1,\frac{3}{2}\right),\left(4,3,\frac{1}{2}\right),(6,1,1),\left(6,2,\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Neka je $u_1 = x$, $u_2 = 2y$, $u_3 = 4z$:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 12$$
$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 44$$
$$u_1u_2u_3 = 48.$$

Dakle, u_1, u_2, u_3 su rješenja jednadžbe

$$u_3 - 12u^2 + 44u - 48 = 0$$
$$(u^3 - 2u^2) - (10u^2 + 20u) + (24u - 48) = 0$$
$$(u-2)(u^2 - 10u + 24) = 0$$
$$(u-2)(u-4)(u-6) = 0$$
$$(u_1, u_2, u_3) = \{(2,4,6), (2,6,4), (4,2,6), (4,6,2), (6,2,4), (6,4,2)\}$$
$$(x,y,z) = \left(u_1, \frac{u_2}{2}, \frac{u_3}{4}\right)$$
$$(x,y,z) = \left\{\left(2,2,\frac{3}{2}\right), (2,3,1), \left(4,1,\frac{3}{2}\right), \left(4,3,\frac{1}{2}\right), (6,1,1), \left(6,2,\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Borna Gojšić (4), Karlovac

3836. *Nađi sva rješenja sustava jednadžbi*

$$a^x b^y = m$$
$$x + y = n$$

gdje je $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

Rješenje. Kako su potencije uvijek pozitivne to je i $m > 0$, pa prvu jednadžbu sustava možemo logaritmirati. Tako dobivamo

$$x \ln a + y \ln b = \ln m.$$

Iz druge jednadžbe sustava je $y = n - x$, pa je:

$$x \ln a + (n - x) \ln b = \ln m$$
$$x \ln a - x \ln b = \ln m - n \ln b$$
$$(\ln a - \ln b) \cdot x = \ln m - \ln b^n$$
$$\ln \frac{a}{b} \cdot x = \ln \frac{m}{b^n}$$
$$x = \frac{\ln \frac{m}{b^n}}{\ln \frac{a}{b}}$$
$$x = \log_{\frac{a}{b}} \frac{m}{b^n}$$
$$\Longrightarrow \quad y = n - \log_{\frac{a}{b}} \frac{m}{b^n} = \ldots = \log_{\frac{a}{b}} \frac{a^n}{m}.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3837. *Neka su* a, b *pozitivni realni brojevi takvi da je* $a + b = 1$. *Ako su* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *pozitivni realni brojevi takvi da je* $x_1x_2x_3x_4x_5 = 1$ *dokaži nejednakost*

$$(ax_1 + b) \ldots (ax_5 + b) \geq 1.$$

Prvo rješenje. Lako je provjeriti da vrijedi nejednakost:

$$(ax_1 + b)(ax_2 + b) \geq (a\sqrt{x_1x_2} + b)^2$$

jer se kvadriranjem i sređivanjem odmah svodi na ekvivalentnu nejednakost $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$, koja očito vrijedi. Sada primijenimo ovu nejednakost u našem slučaju, na svaka dva susjedna umnoška:

$$\prod_{i=1}^{5}(ax_i + b) = \prod_{i=1}^{5}(ax_i + b)\,(a+b)$$
$$\geq (a\sqrt{x_1x_2} + b)^2(a\sqrt{x_3x_4} + b)^2(a\sqrt{x_5} + b)^2$$
$$= [(a\sqrt{x_1x_2} + b)(a\sqrt{x_3x_4} + b) \cdot (a\sqrt{x_5} + b)(a+b)]^2$$
$$\geq \left[\left(a\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} + b\right)^2\left(a\sqrt[4]{x_5} + b\right)^2\right]^2$$
$$\geq \left[\left(a\sqrt[8]{x_1x_2x_3x_4x_5} + b\right)^2\right]^4 = (a+b)^8 = 1.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Lijeva strana je redom jednaka

$$a^5x_1x_2x_3x_4x_5 + a^4b(x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \ldots + x_2x_3x_4x_5)$$
$$+ a^3b^2(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + \ldots + x_3x_4x_5)$$
$$+ a^2b^3(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_4x_5)$$
$$+ ab^4(x_1 + x_2 + \ldots + x_5) + b^5$$
$$\geqslant a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$= (a+b)^5 = 1.$$

Ova nejednakost vrijedi radi A-G nejednakosti:

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \ldots + x_2x_3x_4x_5 \geqslant 5(x_1x_2x_3x_4x_5)^{\frac{4}{5}} = 5$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + \ldots + x_3x_4x_5 \geqslant 10(x_1x_2x_3x_4x_5)^{\frac{6}{10}} = 10$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_4x_5 \geqslant 10(x_1x_2x_3x_4x_5)^{\frac{4}{10}} = 10$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_5 \geqslant 5(x_1x_2x_3x_4x_5)^{\frac{1}{5}} = 5.$$

Ur.

3838. *Odredi najveću vrijednost izraza*

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$$

ako je $|x| \leq 1$ *i* $|y| \leq 1$.

Rješenje. Najprije promatramo funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ i pokazat ćemo da je ona konkavna. To znači da za $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ vrijedi $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Iz ove nejednakosti redom imamo:

$$\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}} \geq \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2} \quad /\ ^2$$
$$\iff \frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{x_1+2\sqrt{x_1x_2}+x_2}{4}$$
$$\iff x_1+x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2}$$
$$\iff (\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geq 0$$

Posljednja nejednakost je očita, pa smo dokazali konkavnost funkcije drugog korijena na njenoj domeni. Dalje ćemo koristiti Jensenovu nejednakost za konkavne funkcije:

Ako je realna funkcija f konkavna na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$ onda vrijedi nejednakost:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Sada je specijalno za $x_1 = x^2+y^2$, $x_2 = 1-x^2$ i $x_3 = 1-y^2$:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \\ &= f(x^2+y^2) + f(1-x^2) + f(1-y^2) \\ &\leq 3 \cdot f\left(\frac{x^2+y^2+1-x^2+1-y^2}{3}\right) \\ &= 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Prema tome, maksimalna vrijednost danog izraza iznosi $\sqrt{6}$ i postiže se ako je $x^2 = y^2 = \frac{1}{3}$.

Marko Dodig (3), Zagreb

3839. *Dokaži da su kružnice*

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = 0$$
$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0$$

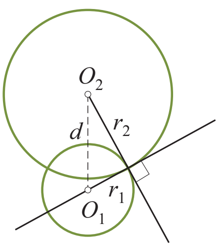
međusobno okomite ako i samo ako je

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2.$$

Rješenje. Najprije jednadžbe kružnica zapišemo u obliku iz kojega im možemo pročitati koordinate središta i duljine polumjera.

$$k_1 \ldots\ (x+g_1)^2 + (y+f_1)^2 = g_1^2 + f_1^2 - c_1$$
$$k_2 \ldots\ (x+g_2)^2 + (y+f_2)^2 = g_2^2 + f_2^2 - c_2.$$

Vidimo da je $O_1(-g_1, -f_1)$ i $O_2(-g_2, -f_2)$, te $r_1 = \sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}$, $r_2 = \sqrt{g_2^2+f_2^2-c_2}$.



Ako su kružnice okomite, njihove tangente povučene u zajedničkim točkama zatvaraju pravi kut, pa možemo primijeniti Pitagorin poučak:

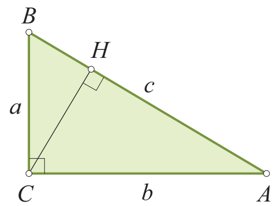
$$\begin{aligned} & r_1^2 + r_2^2 = d^2(O_1, O_2) \\ \iff\ & g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2 \\ & = (g_1-g_2)^2 + (f_1-f_2)^2 \\ \iff\ & g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2 \\ & = g_1^2 - 2g_1g_2 + g_2^2 + f_1^2 - 2f_1f_2 + f_2^2 \\ \iff\ & 2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Kako očito vrijede ekvivalencije i obrat Pitagorinog poučka, vrijedi i drugi smjer tvrdnje.

Marko Dodig (3), Zagreb

3840. *Pravi kut pravokutnog trokuta ABC je u točki C, a H je nožište visine na hipotenuzu. Pokaži da je zbroj polumjera upisanih kružnica u trokute ABC, ACH i BCH jednak duljini visine.*

Rješenje. Neka je $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$. Trokuti ACH i CBH su slični s ABC s koeficijentima $\dfrac{b}{c}$ i $\dfrac{a}{c}$.



Polumjeri upisanih kružnica trokutima ABC, ACH, CBH su jednaki

$$\frac{ab}{a+b+c},\quad \frac{b}{c}\cdot\frac{ab}{a+b+c},\quad \frac{a}{c}\cdot\frac{ab}{a+b+c}.$$

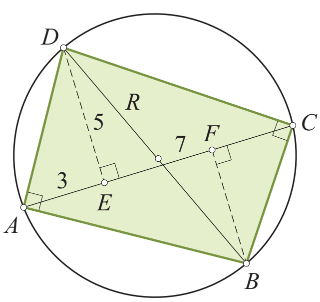
Njihov zbroj je jednak

$$\frac{ab}{a+b+c}\left(1+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)$$
$$=\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{a+b+c}{c}=\frac{ab}{c}=|CH|.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3841. *Dan je četverokut $ABCD$ s pravim kutovima u vrhovima A i C. Ortogonalne projekcije vrhova D i B na dijagonalu $\overline{AC}$ su redom točke E i F. Ako je $|AE|=3$, $|DE|=5$ i $|CE|=7$, koliko je $|BF|$?*

Prvo rješenje. Kako su dva nasuprotna kuta danog četverokuta pravi (suma im je 180°) taj četverokut je tetivni.



Označimo njegove elemente kao na slici, i koristimo Pitagorin poučak:

$$|AD|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$$
$$|CD|=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}.$$

Kako je $\triangle ABD\sim\triangle ECD$ vrijedi:

$$\frac{\sqrt{34}}{5}=\frac{2R}{\sqrt{74}}\implies 2R=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{629}$$

gdje je R polumjer četverokutu opisane kružnice. Opet koristimo Pitagorin poučak:

$$|AB|=\sqrt{(2R)^2-|AD|^2}=\frac{7}{5}\cdot\sqrt{34}$$

i

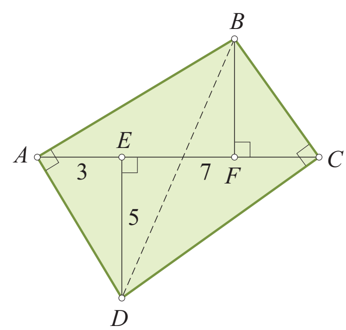
$$|BC|=\sqrt{(2R)^2-|CD|^2}=\frac{3}{5}\cdot\sqrt{74}.$$

Kako je $\triangle ABF\sim\triangle DBC$ imamo:

$$\frac{x}{\frac{3}{5}\cdot\sqrt{74}}=\frac{\frac{7}{5}\cdot\sqrt{34}}{\frac{2}{5}\cdot\sqrt{629}}$$
$$\implies\frac{5x}{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{37}}=\frac{7\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}{2\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{37}}$$
$$\implies x=\frac{21}{5}.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Konstruirajmo dijagonalu $\overline{BD}$. Kako je $\sphericalangle BAD$ pravi kut $\sphericalangle BAE+\sphericalangle EAD=90^\circ$.



Trokut AFB je pravokutan pa je $\sphericalangle BAE+\sphericalangle FBA=90^\circ$. Dakle, $\sphericalangle EAD=\sphericalangle FBA$ i

$\triangle AED$ je sličan $\triangle FBA$. Stoga je

$$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|DE|}{|AE|} \quad \text{tj.}$$

$$|AF|=\frac{|DE|}{|AE|}\cdot|BF|=\frac{5}{3}|BF|.$$

Slično je $\sphericalangle CBF=\sphericalangle DCE$ pa je $\triangle CFB\sim\triangle DEC$. Dakle,

$$\frac{|CF|}{|BF|}=\frac{|ED|}{|EC|} \quad \text{tj.}$$

$$|CF|=\frac{|ED|}{|EC|}\cdot|BF|=\frac{5}{7}|BF|.$$

Sada je

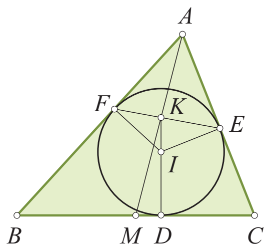
$$\begin{aligned}|AE|+|EC|&=3+10\\ &=|AF|+|FC|=\frac{5}{3}|BF|+\frac{5}{7}|BF|\\ &=\frac{50}{21}|BF|\end{aligned}$$

i $|BF|=\dfrac{21}{5}$.

Ur.

3842. *Upisana kružnica trokuta ABC sa središtem I dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D, E i F. Pravac ID siječe dužinu $\overline{EF}$ u K. Dokaži da su točke A, K i M kolinearne, gdje je M polovište od $\overline{BC}$.*

Rješenje. Neka pravac AK siječe $\overline{BC}$ u M. Pokazat ćemo da je M polovište od $\overline{BC}$.



Kako je $\sphericalangle FIK=\sphericalangle B$, $\sphericalangle EIK=\sphericalangle C$ (kutovi s okomitim kracima), imamo:

$$\frac{|FK|}{|EK|}=\frac{\sin\sphericalangle FIK}{\sin\sphericalangle EIK}=\frac{\sin B}{\sin C}.$$

Isto tako je

$$\begin{aligned}\frac{|FK|}{\sin\sphericalangle FAK}&=\frac{|AF|}{\sin\sphericalangle AKF}=\frac{|AE|}{\sin\sphericalangle AKE}\\ &=\frac{|EK|}{\sin\sphericalangle KAE}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{\sin\sphericalangle FAK}{\sin\sphericalangle KAE}=\frac{|FK|}{|EK|}=\frac{\sin B}{\sin C}.$$

Konačno,

$$\begin{aligned}\frac{|BM|}{|CM|}&=\frac{|BM|}{|AM|}\cdot\frac{|AM|}{|CM|}\\ &=\frac{\sin\sphericalangle FAK}{\sin B}\cdot\frac{\sin C}{\sin\sphericalangle KAE}=1\end{aligned}$$

i $|BM|=|CM|$.

Ur.

3843. *U trokutu ABC je $\sphericalangle ABC=60^\circ$ i $\sphericalangle ACB=70^\circ$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka D tako da je $\sphericalangle BAD=20^\circ$. Dokaži*

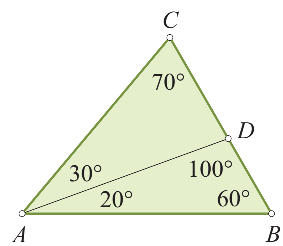
$$|AB|+|BD|=|AD|+|CD|.$$

Rješenje.

$$\sphericalangle BAC=180^\circ-\sphericalangle ABC-\sphericalangle ACB=50^\circ$$

$$\sphericalangle CAD=\sphericalangle BAC-\sphericalangle BAD=30^\circ$$

$$\sphericalangle ADB=180^\circ-\sphericalangle ABC-\sphericalangle BAD=100^\circ.$$



$$\triangle ACD\ \ldots\ \frac{|CD|}{|AD|}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$\triangle ABD\ \ldots\ \frac{|AB|}{|BD|}=\frac{\sin 100^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$\triangle ABD\ \ldots\ \frac{|AD|}{|BD|}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ}.$$

Pretpostavimo da vrijedi

$$|AB|+|BD|=|AD|+|CD|.$$

Tada je redom

$$\left(\frac{\sin 100^\circ}{\sin 20^\circ}+1\right)|BD|=\left(1+\frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}\right)|AD|$$

$$\frac{\sin 100^\circ}{\sin 20^\circ}+1=\left(1+\frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}\right)\frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$\sin 100+^\circ\sin 20^\circ=\sin 60^\circ+\frac{\sin 30^\circ\sin 60^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$\sin 70^\circ \sin 100^\circ + \sin 70^\circ \sin 20$$

$$= \sin 70^\circ \sin 60^\circ + \sin 30^\circ \sin 60.$$

Iz formule

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

imamo:

$$\frac{1}{2}(\cos 30^\circ - \cos 170^\circ + \cos 50^\circ - \cos 90^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 10^\circ - \cos 130^\circ + \cos 30^\circ - \cos 90^\circ)$$

$$\cos 130^\circ + \cos 50^\circ = \cos 170^\circ + \cos 10^\circ$$

$$\cos(180^\circ - 50^\circ) + \cos 50^\circ$$

$$= \cos(180^\circ - 10^\circ) + \cos 10^\circ$$

$$-\cos 50^\circ + \cos 50^\circ = -\cos 10^\circ + \cos 10^\circ.$$

Dakle, vrijedi

$$|AB| + |BD| = |AD| + |CD|.$$

Borna Gojšić (4), Karlovac

3844. *Ako za kutove trokuta vrijedi $3\beta + 2\gamma = \pi$, dokaži da duljine njegovih stranica zadovoljavaju jednakost*

$$a^2 - c^2 = \left(1 + \frac{c}{a}\right) b^2.$$

Rješenje.

$$3\beta + 2\gamma = \pi$$

$$2(\beta+\gamma) + \beta = \pi$$

$$2(\pi - \alpha) + \beta = \pi$$

$$2\alpha = \beta + \pi.$$

Sada je redom:

$$a^2 - c^2 = \left(1 + \frac{c}{a}\right) b^2$$

$$a^2 - (b^2 + c^2) = bc\frac{b}{a}$$

$$-2bc\cos\alpha = bc\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$-2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta$$

$$-\sin 2\alpha = \sin\beta$$

$$-\sin(\pi+\beta) = \sin\beta$$

$$\sin\beta = \sin\beta.$$

Dakle, stranice zadovoljavaju zadanu jednakost.

Borna Gojšić (4), Karlovac

3845. *Dokaži da je trokut sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ jednakostraničan ako i samo ako vrijedi*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4P}(a^2 + b^2 + c^2),$$

gdje je P površina trokuta.

Rješenje. Ako je s poluopseg trokuta imamo:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

i analogno za β i γ. Sada dobivamo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Kako je površina trokuta jednaka

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

dana jednakost ekvivalentna je sljedećoj

$$\frac{1}{P}[(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c)$$

$$+ (s-a)(s-b)]$$

$$= \frac{1}{4P}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Sređivanjem se dobiva

$$-s^2 + ab + bc + ca = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

što je ekvivalentno s

$$4(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2.$$

Odavde slijedi

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

odakle je $a = b = c$, tj. trokut je jednakostraničan.

Marko Dodig (3), Zagreb

3846. *Dan je skup $\{1,2,3,\dots,24\}$. Na koliko načina se mogu izabrati tri broja iz tog skupa koji su članovi aritmetičkog niza.*

Rješenje. Neka su x, y i z tri elementa iz zadanog skupa od kojih se može formirati aritmetički niz. Vidimo da prvi član x i treći član z toga niza moraju biti iste parnosti. To znači da za bilo koja dva broja iste parnosti imamo i tročlani aritmetički niz (treći član je aritmetička sredina tih dvaju brojeva). Bilo koji par parnih (ili neparnih) brojeva možemo izabrati na $\binom{12}{2}$ načina, pa je ukupan broj mogućnosti jednak:

$$2\cdot\binom{12}{2}=2\cdot\frac{12\cdot 11}{2}=132.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 494. *Kumulonimbusi su olujni oblaci koji donose jake kiše, ponekad i tuču. Vozeći autocestom vozač je uočio da mu ravno u susret dolazi takav oblak. Ušavši u njega morao je, zbog obilne kiše, smanjiti brzinu na 60 km/h. Prolazak kroz oluju je trajao 5 minuta. Širina takvih oblaka iznosi od 8 do 10 km. Odredite raspon brzine samog oblaka.*

Rješenje.

$$v_a=60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}=\frac{50}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t=5\ \text{min}$$

$$d_{\text{min}}=8\ \text{km}$$

$$\underline{d_{\text{max}}=10\ \text{km}}$$

$$v_{\text{min}},\quad v_{\text{max}}=?$$

$$d=(v_a+v_o)t$$

$$v_o=\frac{d}{t}-v_a$$

$$\begin{aligned}v_{\text{min}}&=\frac{8000\ \text{m}}{300\ \text{s}}-\frac{50}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\\&=\frac{80}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}-\frac{50}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}=10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{\text{max}}&=\frac{10\,000\ \text{m}}{300\ \text{s}}-\frac{50}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\\&=\frac{100}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}-\frac{50}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\\&=\frac{50}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}=16.7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.\end{aligned}$$

Maja Unetić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 495. *U menzuru promjera 3 cm je prvo ulivena voda do visine 15 cm i nakon toga sloj ulja debljine 5 cm. Izračunajte ukupni tlak na dno menzure. Gustoća ulja iznosi 800 kg/m^3, a vode 1000 kg/m^3. Atmosferski je tlak iznosio 101 000 Pa (paskala).*

Rješenje.

$$d=3\ \text{cm}$$

$$h_v=15\ \text{cm}=0.15\ \text{m}$$

$$h_a=5\ \text{cm}=0.05\ \text{m}$$

$$\rho_u=800\ \text{kg/m}^3$$

$$\rho_v=1000\ \text{kg/m}^3$$

$$\underline{p_{atm}=101\,000\ \text{Pa}}$$

$$p_{uk}=?$$

$$\begin{aligned}p_{hs}&=p_v+p_u=\rho_v g h_v+\rho_u g h_u\\&=1000\ \text{kg/m}^3\cdot 10\ \text{N/kg}\cdot 0.15\ \text{m}\\&\quad+800\ \text{kg/m}^3\cdot 10\ \text{N/kg}\cdot 0.05\ \text{m}\\&=1500\ \text{Pa}+400\ \text{Pa}=1900\ \text{Pa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{uk}&=P_{hs}+p_{atm}\\&=1900\ \text{Pa}+101\,000\ \text{Pa}\\&=102\,900\ \text{Pa}.\end{aligned}$$

Jana Ribičić (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 496. *Kad na tijelo mase 3 kg, koje miruje na horizontalnoj podlozi, djeluje sila od 1.5 N ono dobije akceleraciju od 0.4 m/s^2. Koliki je koeficijent trenja između tijela i podloge?*

Rješenje.

$$m=3\ \text{kg}$$

$$F=1.5\ \text{N}$$

$$\underline{a=0.4\ \text{m/s}^2}$$

$\mu = ?$

$F_R = ma = 3 \text{ kg} \cdot 0.4 \text{ m/s}^2 = 1.2 \text{ N}$

$F_{tr} = F - F_R = 1.5 \text{ N} - 1.2 \text{ N} = 0.3 \text{ N}$

$G = mg = 3 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 30 \text{ N}$

$\mu = \frac{F_{tr}}{G} = \frac{0.3 \text{ N}}{30 \text{ N}} = 0.01.$

Karlo Pavić (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 497. *Skijaš se spušta po stazi dugačkoj 2.5 km. Podnožje staze je 100 m niže od vrha. Na dnu staze njegova je kinetička energija 4000 J. Masa skijaša zajedno s opremom iznosi 80 kg. Kolika je prosječna sila trenja između skija i snijega?*

Rješenje.

$l = 2.5 \text{ km}$

$h = 100 \text{ m}$

$E_k = 4000 \text{ J}$

$\underline{m = 80 \text{ kg}}$

$F_{tr} = ?$

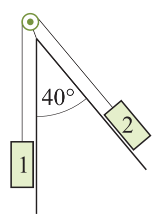
$$E_{gp} = mgh = 80 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 100 \text{ m}$$
$$= 80\,000 \text{ J}$$

$$W_{\text{sile trenja}} = E_{gp} - E_k$$
$$= 80\,000 \text{ J} - 4000 \text{ J} = 76\,000 \text{ J}$$

$$F_{tr} = \frac{W_{\text{sile trenja}}}{l} = \frac{76\,000 \text{ J}}{2500 \text{ m}} = 30.4 \text{ N}.$$

Borna Lebinac Milinović (8),
OŠ Horvati, Zagreb

1770. *Sklop dvaju utega na slici giba se jednoliko ubrzano (zdesna nalijevo) akceleracijom* $1.4 \ m/s^2$*. Ako su mase utega* $m_1 = 0.8 \ kg$ *i* $m_2 = 0.5 \ kg$*, odredi koeficijent trenja tijela 2 s podlogom. Uzeti* $g = 9.81 \ m/s^2$*.*



Rješenje. Ako sa F_N označimo silu napetosti niti, iz ubrzanog gibanja $(a = 1.4 \text{ m/s}^2)$ imamo

$$m_1 a = m_1 g - F_N$$
$$m_2 a = F_N - m_2 g \sin 40^\circ - \mu m_2 g \cos 40^\circ.$$

Zbrajanjem dobivamo

$$a(m_1 + m_2)$$
$$= g(m_1 - m_2 \sin 40^\circ - \mu m_2 \cos 40^\circ)$$

$$1.82 = 9.81(0.8 - 0.5 \cdot 0.766 - \mu 0.5 \cdot 0.643)$$
$$0.3215\mu = 0.417 - 0.186$$
$$\mu = 0.72.$$

Marko Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1771. *Uzorak ima* 10^{10} *radioaktivnih jezgri jednog izotopa. Ako ih se u prvih 8 sekundi raspadne 25 000, koliko je vrijeme poluraspada?*

Rješenje. Ako s $\Delta N = 25\,000$ označimo broj raspadnutih atoma u $\Delta t = 8$ sekundi, iz jednadžbe radioaktivnog raspada imamo:

$$\frac{N_0 - \Delta N}{N_0} = 2^{-\Delta t/T},$$

gdje je N_0 početni broj atoma, a T vrijeme poluraspada. Uvrštavanjem dobijemo

$$0.9999975 = 2^{-8/T},$$

a logaritmiranjem s bazom 2

$$\frac{-0.0000025}{0.69315} = \frac{-8}{T}.$$

Odatle je $T = 2.218 \cdot 10^6 \text{ s} = 25.67$ dana.

Borna Gojšić (4),
Gimnazija Karlovac, Karlovac

1772. *Motor koji okreće ploču tvrdog diska (HDD) ima maksimalnu snagu 2.4 W. Uzmimo da su ploče idealni cilindri ukupne mase 20 grama i radijusa 4 cm. Koliko minimalno vremena treba da ploče iz stanja mirovanja dosegnu punu kutnu brzinu od 7200 okreta u minuti?*

Rješenje. Energiju rotacije diska $E = I\omega^2/2$ izjednačimo s umnoškom snage i potrebnog vremena,

$$Pt = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Moment tromosti cilindra mase m i radijusa R iznosi $I = 1/2mR^2$, pa je

$$t = \frac{\frac{1}{2}mR^2\omega^2}{2P} = \frac{mR^2\omega^2}{4P}.$$

Uvrstimo $m = 0.02$ kg, $R = 0.04$ m i $\omega = 2\pi \cdot 7200/60$ i izračunamo

$$t = \frac{0.02(0.04 \cdot 2\pi \cdot 120)^2}{4 \cdot 2.4} = 1.895 \text{ s}.$$

Borna Gojšić (4), Karlovac

1773. *Zemlja se oko Sunca giba približno po kružnici radijusa 1 a.j. Kad bi neko tijelo na toj udaljenosti od Sunca u nekom trenutku mirovalo u odnosu na Sunce, koliko bi mu vremena, od tada, trebalo da padne na Sunce? Koristi treći Keplerov zakon i činjenicu da Zemlji treba 1 godina da obiđe Sunce.*

Rješenje. Pad s udaljenosti 1 a.j. je polovica putanje ekscentriciteta koji teži u 1 i duljine poluosi od 0.5 a.j. Iz trećeg Keplerovog zakona imamo za cijelu putanju

$$T' = 1 \text{ god} \left(\frac{0.5}{1}\right)^{3/2},$$

pa je traženo vrijeme

$$\begin{aligned} T &= \frac{T'}{2} = 0.5 \text{ god} \cdot 0.5^{1.5} \\ &= 0.1768 \text{ god} = 64.58 \text{ dana}. \end{aligned}$$

Ur.

1774. *Ako u kalorimetar s 0.3 kg leda temperature $0\,^\circ C$ ulijemo 0.8 kg vode temperature $51\,^\circ C$ i dobijemo ravnotežnu temperaturu $12\,^\circ C$, koliki je toplinski kapacitet kalorimetra? Specifični toplinski kapacitet vode je $4190\ J/kgK$, a latentna toplina taljenja leda $330\,000\ J/kg$.*

Rješenje. Led $(m_L = 0.3 \text{ kg})$ se rastali i dobivena voda ugrije na $12\,^\circ$C. Ulivena voda $(m_V = 0.8 \text{ kg})$ se ohladi s $51\,^\circ$C na $12\,^\circ$C. Kalorimetar toplinskog kapaciteta C se ugrije sa $0\,^\circ$C na $12\,^\circ$C. Očuvanje toplinske energije daje:

$$\begin{aligned} &m_L\lambda_L + m_Lc_V(\tau - T_L) + C(\tau - T_L) \\ &= m_Vc_V(T_V - \tau) \\ &0.3 \cdot 330000 + 0.3 \cdot 4190 \cdot 12 + 12C \\ &= 0.8 \cdot 4190(51 - 12) \end{aligned}$$

$$12C = 16\,664 \implies C = 1387 \text{ J/K}.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

1775. *Neka je vanjska temperatura $5\,^\circ C$, a u sobi $21\,^\circ C$. Vanjski zrak ima 90 % vlage. Nakon prozračivanja (potpune izmjene zraka), kolika će biti vlažnost u sobi kad se zrak ponovo ugrije na $21\,^\circ C$? Parcijalni tlak vodene pare je 872.6 Pa na $5\,^\circ C$ i 2486.5 Pa na $21\,^\circ C$.*

Rješenje. Za zagrijavanje zraka u prostoriji primjenimo jednadžbu stanja idealnog plina, iz stanja 1 u stanje 2:

$$V_2 = \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1}V_1.$$

Kako je volumen prostorije ostao isti, relativnu vlažnost φ izrazimo kao

$$\varphi_2 = \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1}\varphi_1,$$

pri čemu za p_1 i p_2 uvrstimo parcijalne tlakove zasićene vodene pare. Dobivamo

$$\varphi_2 = \frac{872.6}{2486.5}\frac{294}{278} \cdot 90\ \% = 33.4\ \%.$$

Borna Gojšić (4), Karlovac

1776. *Sunčeva konstanta (snaga zračenja Sunca na vrhu Zemljine atmosfere) mijenja se od $1321\ W/m^2$ kad je Zemlja u afelu, do $1412\ W/m^2$ kad je zemlja u perihelu putanje. Pomoću zadanih veličina odredi ekscentričnost Zemljine putanje oko Sunca.*

Rješenje. S obzirom da snaga zračenja opada s kvadratom udaljenosti, imamo

$$\sqrt{\frac{1412}{1321}} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = 1.03387.$$

Iz parametara elipse imamo

$$\begin{aligned} r_{\max} &= a(1 + \varepsilon), \\ r_{\min} &= a(1 - \varepsilon), \end{aligned}$$

gdje je ε numerički ekscentricitet elipse. Dobivamo

$$\varepsilon = \frac{1.03387 - 1}{1.03387 + 1} = 0.01665,$$

podatak iz astronomskih tablica je

$$\varepsilon = 0.01670.$$

Ur.