Županijsko natjecanje iz matematike, 24. ožujka 2022.

Zadatci za A varijantu

I. razred

1. Tri traktora oru njivu. Ako prva dva traktora rade zajedno, treba im 15 dana da preoru cijelu njivu. Prvi i treći traktor preoru njivu radeći zajedno 8 dana, a sva tri traktora zajedno preoru njivu za 6 dana. Koliko dana svakom od traktora treba da samostalno preore cijelu njivu?

2. Odredi sve cijele brojeve x, y, z za koje vrijede jednakosti

$$x - yz = 1 \qquad \text{i} \qquad xz + y = 2.$$

3. Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$ paralelograma $ABCD$. Ako je E nožište okomice iz točke D na pravac AM, dokaži da vrijedi $|CD| = |CE|$.

4. Realni brojevi a, b i c različiti su od nule i zadovoljavaju jednakosti

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2, \\ b^2 + b &= c^2, \\ c^2 + c &= a^2. \end{aligned}$$

Dokaži da vrijedi $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

5. U nekom je razredu trideset i troje učenika. Svaki učenik je na ploču napisao dva broja: koliko još učenika osim njega u razredu ima isto ime kao on, te koliko još učenika osim njega u razredu ima isto prezime kao on.

Ako se svaki od brojeva 0, 1, 2, ..., 10 pojavljuje na ploči barem jednom, dokaži da u razredu postoji barem jedan par učenika istog imena i prezimena.

II. razred

1. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\sqrt{|x-1| + |x+4|} = |x|.$$

2. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + 1 = 0$ su realna. Ako svako od tih rješenja umanjimo za 1, dobit ćemo rješenja kvadratne jednadžbe $bx^2 + x + a = 0$.

Odredi sve takve realne brojeve a, b.

3. Prirodni broj zovemo *lijepuškastim* ako zbrojen s nekim svojim djeliteljem daje rezultat 360. Odredi zbroj svih ljepuškastih brojeva.

4. Svi vrhovi šesterokuta $ABCDEF$ leže na kružnici promjera $\overline{AD}$. Pravac BF siječe pravce AD i CE redom u točkama G i H. Ako je $\sphericalangle FEH = 56^\circ$, $\sphericalangle DGB = 124^\circ$ i $\sphericalangle DEC = 34^\circ$, odredi $\sphericalangle CEB$.

5. Prirodni broj $\overline{a_1 a_2 \ldots a_m}$ (uz $a_1 \neq 0$) je *koncizan* ako je broj $\overline{a_i a_{i+1} \ldots a_{i+k-1}}$ djeljiv s k za sve prirodne brojeve i, k takve da je $1 \leq k \leq m$ i $1 \leq i \leq m-k+1$.

Na primjer, broj 102 je koncizan jer su brojevi 1, 0 i 2 djeljivi s 1, brojevi 10 i $2\,(=\overline{02})$ djeljivi s 2 te broj 102 djeljiv s 3.

Dokaži da postoji najveći koncizni prirodni broj i odredi ga.

III. razred

1. Odredi sve realne brojeve x, y za koje vrijede jednakosti

$$x^{\log y}+\sqrt{y^{\log x}}=110 \qquad \text{i} \qquad xy=1000.$$

2. Dokaži da za sve realne brojeve $\alpha,\beta\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$ vrijedi

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\geq 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

Kada vrijedi jednakost?

3. U trokutu ABC točka M je polovište stranice $\overline{AB}$, a točka D sjecište stranice $\overline{AC}$ i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$. Ako je $\sphericalangle MDB=90^\circ$, dokaži da vrijedi $|AB|=3|BC|$.

4. Postoji li pet međusobno različitih prirodnih brojeva takvih da je zbroj bilo kojih triju od njih djeljiv zbrojem preostalih dvaju?

5. Odredi sve prirodne brojeve n za koje se svi elementi skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ mogu raspodijeliti na k međusobno disjunktnih skupova koji imaju jednak broj elemenata, tako da svaki od tih skupova sadrži aritmetičku sredinu svojih elemenata ako je

a) $k=2$, b) $k=3$.

IV. razred

1. Odredi sve polinome P trećeg stupnja koji imaju sljedeća tri svojstva:

(i) $P(x)$ pri dijeljenju s x^2-1 daje ostatak $2x+1$,

(ii) zbroj nultočaka polinoma P iznosi -2,

(iii) graf polinoma P prolazi točkom $(0,3)$.

2. Početni član niza (a_n) je $a_0=2022$. Za svaki $n\in\mathbb{N}$, broj a_n jednak je zbroju broja a_{n-1} i najvećeg djelitelja tog broja manjeg od njega samog. Odredi a_{2022}.

3. Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je $2^n+5\cdot 3^m$ kvadrat nekog prirodnog broja.

4. Dan je pravilni 2022-kut $A_1A_2\ldots A_{2022}$. Koliko najviše vrhova pravilnog 2022-kuta možemo odabrati tako da nikoje četiri odabrane točke ne čine vrhove pravokutnika?

5. Dan je šiljastokutan trokut ABC s težištem T. Neka je $\overline{CN}$ njegova visina, $\overline{CP}$ težišnica i K polovište te težišnice. Simetrala dužine $\overline{PC}$ siječe pravac AB u točki L. Kružnica opisana trokutu LNT siječe pravac PC u točkama T i M. Dokaži da pravac AK raspolavlja dužinu $\overline{BM}$.

Zadatci za B varijantu

I. razred

1. Zbroj dva broja je 6. Ako je zbroj njihovih kubova 90, koliki je zbroj njihovih kvadrata?

2. Kojom znamenkom završava broj $2^{2022}+3^{2022}+7^{2022}$?

3. Koliko ima peteroznamenkastih višekratnika broja 15 kojima su znamenke iz skupa $\{0, 1, 2\}$?

4. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dane su točke P i Q takve da vrijedi $|AP| = |PQ| = |QB|$. Na stranici $\overline{BC}$ dana je točka R takva da je $|RC| = \frac{1}{3}|BC|$, a na stranici $\overline{AC}$ točka S takva da je $|SC| = \frac{1}{3}|AC|$. Ako je površina četverokuta $PQRS$ jednaka 16 cm^2, kolika je površina trokuta ABC?

5. Zadana je jednadžba $\frac{x-a}{x^2-1} + \frac{a}{x^2+x} = \frac{x+a}{x^2-x}$. Odredite sve vrijednosti realnoga parametra a za koje ta jednadžba nema realnih rješenja.

6. Vlasnici hotela su na početku turističke sezone za 4000 kn kupili nove deke, plahte i jastučnice. Svaku su deku platili 120 kn, svaku plahtu 50 kn, a svaku jastučnicu 25 kn. Ako su kupili ukupno 100 artikala, koliko je kupljeno deka, koliko plahti, a koliko jastučnica? Kupili su barem jedan artikl od svake vrste.

7. Duljina osnovice jednakokračnoga trokuta je 6 cm, a kosinus kuta uz osnovicu iznosi $\frac{5}{13}$. Odredite polumjer kružnice koja dodiruje oba kraka tog trokuta i njemu opisanu kružnicu.

II. razred

1. Ako su α i β šiljasti kutovi pravokutnog trokuta i $\sin\beta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, odredite $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

2. Odredite apsolutnu vrijednost razlike rješenja jednadžbe

$$x(10a - 5x + 6) = (5a + 1)(a + 1), \ a \in \mathbb{R}.$$

3. Neka je $f(x)$ funkcija za koju vrijedi $f\left(\frac{x+2}{x-3}\right) = x^2 + x + 1$ te neka je funkcija $g(x)$ definirana s $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$. Odredite prirodno područje definicije funkcije $g(x)$.

4. Ana je na putovanju po Europi i trenutno se nalazi u jednoj europskoj metropoli. Svakoj od četiri prijateljice poslala je poruku o trenutnoj lokaciji. Tamari je rekla da je trenutno u Parizu ili Londonu, Ivi da je u Beču ili Pragu, Sanja je dobila poruku da se nalazi u Rimu, a Višnji je rekla da nije u Beču. Također je rekla da samo jedna od njih ima točnu informaciju, te da se nalazi u jednom od spomenutih gradova. Koja prijateljica ima točnu informaciju i gdje se nalazi Ana? Je li rješenje jedinstveno? Obrazložite.

5. U paralelogramu $ABCD$ kut s vrhom u točki B je $120°$ i stranica $\overline{AD}$ tri puta je dulja od stranice $\overline{AB}$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka E, a na stranici $\overline{AD}$ točka F tako da je $ABEF$ romb. Koliki je kosinus kuta EAC?

6. U pravokutnom trokutu duljine svih stranica su dvoznamenkasti prirodni brojevi. Ako broju koji je duljina jedne katete zamijenimo znamenke jedinica i desetica dobit ćemo duljinu hipotenuze tog trokuta. Odredite duljine stranica trokuta.

7. Na grafu funkcije $f(x) = -x^2 + 2022x$ plavom su bojom označene sve cjelobrojne točke (x, y) za koje je $y \geq -2023$. Na osi apscisa crvenom su bojom označene sve cjelobrojne točke $(x, 0)$ takve da je $a < x < b$, $f(a) = f(b) = 0$. Koliko ima različitih trokuta kojima su vrhovi dvije plave točke i jedna crvena točka?

III. razred

1. Odredite sve realne brojeve a za koje postoji realan broj x takav da je
$$\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin^3 x + \sin^3 x = a^2 - 3.$$

2. Odredite nultočke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(18 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1) - 2x - 1$.

3. U trokutu ABC vrijedi $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ i $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Odredite mjere preostala dva kuta trokuta ABC.

4. Zadana je kvadratna mreža dimenzija 20×20. U jedno polje te mreže upisana je nula. U preostala polja treba upisati prirodne brojeve tako da razlika brojeva u susjednim poljima bude najviše 5. Susjednim poljima smatramo polja koja imaju zajedničku stranicu. Dokažite da postoje barem tri takva polja u koja je upisan isti broj.

5. U uspravni stožac upisana je kugla polumjera 1. Izvodnica zatvara s bazom stošca kut od 60°. Stožac je presječen ravninom koja je paralelna s bazom stošca i dodiruje kuglu. Kolika je površina presjeka te ravnine i stošca?

6. Riješite sustav nejednadžbi
$$\begin{cases} \sqrt{9x^2 - 12x + 5} \geq \sin x, \\ |x| - \dfrac{\pi}{2} \leq \cos x. \end{cases}$$

7. Odredite sve cijele brojeve a za koje su rješenja jednadžbe $x^2 - (3+a)x + 3a + 3 = 0$ također cijeli brojevi. Koji su to brojevi?

IV. razred

1. Za koje je vrijednosti realnoga broja x zbroj trećega i petoga člana u razvoju binoma $\left(\sqrt{2^x} + 2^{\frac{-x+1}{2}}\right)^n$ jednak 135 ako je zbroj binomnih koeficijenata posljednja tri člana toga razvoja jednak 22?

2. Polumjer osnovke, izvodnica i visina uspravnog stošca u nekom su poretku tri uzastopna člana rastućega aritmetičkog niza. Ako je površina osnoga presjeka stošca 300 cm^2, koliki je njegov obujam?

3. Ako je $z + z^{-1} = 2\cos 5^\circ$, koliko je $(z^{2022} - z^{-2022})^{2022}$?

4. Ako je $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+a)\left(\dfrac{1}{x} + b\right)$ neparna funkcija i $f(a^2) + f(a) = \dfrac{35}{6}$, odredite realne brojeve a i b.

5. Odredite sve prirodne brojeve $y > 1$ koji zadovoljavaju jednadžbu $\log_{\sin x} y - 3\log_y \sqrt{\sin x} = \dfrac{1}{2}$, pri čemu je $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

6. Dizalo u jednoj vožnji može prevesti najviše osmero ljudi. Jedanaest stanara, među kojima su i dvojica posvađanih, čeka dizalo i svi idu na isti kat. Kolika je vjerojatnost da će se u dizalu naći posvađani stanari ako se svi stanari trebaju prevesti dizalom u minimalnom broju vožnji?

7. U jednakostraničnom trokutu ABC točka D je na stranici $\overline{AB}$, točka E na stranici $\overline{BC}$ i točka F na stranici $\overline{AC}$. Pri tome je $|AD| = 3$, $|CE| = 2$ i $\sphericalangle DFE = 60^\circ$. Ako je površina trokuta DEF jednaka $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$, odredite površinu trokuta ABC.

Matija Bašić