Rješenje nagradnog natječaja br. 237

Dokaži da je $3^n \geq n^3$ za svaki pozitivan cijeli broj n.

Rješenje. Za $n = 1$ i $n = 2$ tvrdnja vrijedi. Metodom matematičke indukcije ćemo dokazati da je $3^n \geq n^3$ za $n \geq 3$. Za $n = 3$ je $3^3 \geq 3^3$. Pretpostavimo da za neko $k \geq 3$ vrijedi $3^k \geq k^3$. Dovoljno je pokazati da je

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3k^3 \geq (k+1)^3.$$

Kako je $k \geq 3$, ovo je ekvivalentno s $3k^3 \geq (k+1)^3$, tj. $2k^3 \geq 3k^2 + 3k + 1$. Ova nejednakost slijedi iz ove dvije: $k^3 \geq 3k^2$ i $k^3 \geq 3k + 1$, koje su istinite. Dakle tvrdnja vrijedi i za $k + 1$. Zato tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq 3$, pa onda i za svaki pozitivan cijeli broj.

Knjigom Darko Žubrinić, *Willim (William) Feller*, Privlačica, Vinkovci, 2022., nagrađeni su rješavatelji:

1. *Marko Dodig* (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb;
2. *Borna Gojšić* (4), Gimnazija Karkovac, Karlovac;
3. *Filip Krištić* (1), Gimnazija – Katolički školski centar, Sarajevo, BiH;
4. *Faruk Sijerčić* (4), Gimnazija "Visoko", Visoko, BiH.

Riješili zadatke iz br. 2/286

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Marko Dodig* (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 3833–3841, 3843–3846; *Borna Gojšić* (4), Gimnazija Karlovac, Karlovac, 3833–3835, 3839–3844, 3846.

b) Iz fizike: *Borna Lebinac Milinović* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 494–497; *Karlo Pavić* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 494–497; *Jana Ribičić* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 494–497; *Maja Unetić* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 494–497; *Marko Dodig* (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 1770, 1771, 1774, *Borna Gojšić* (4), Gimnazija Karlovac, Karlovac, 1770–1776.

Nagradni natječaj br. 239

Dan je kut α šiljastokutnog trokuta koji zadovoljava jednadžbu

$$\sqrt{369 - 360\cos\alpha} + \sqrt{544 - 480\sin\alpha} - 25 = 0.$$

Koliko je $\operatorname{tg}\alpha$?