Osječki matematički list 22 (2022), 81–89

Matematičko natjecanje MathOS cup

Darija Brajković Zorić, Ivana Kuzmanović Ivičić, Mihaela Ribičić Penava*

Sažetak

Cilj ovoga rada je predstaviti timsko natjecanje MathOS cup te dati pregled odabranih zadataka s rješenjima iz drugog kruga natjecanja MathOS cup 2022.

Ključne riječi: *MathOS cup, natjecanje, riješeni zadaci*

Mathos cup

Abstract

The aim of this paper is to present the mathematical competition MathOS cup and give an overview of chosen problems with their solutions from the second round of the competition MathOS cup 2022.

Keywords: *MathOS cup, competition, solved problems*

*Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email:dbrajkovic@mathos.hr, email:ikuzmano@mathos.hr, email:mihaela@mathos.hr

1 O natjecanju

MathOS cup je ekipno natjecanje učenika srednjih škola iz matematike u organizaciji Udruge matematičara Osijek, Odjela za matematiku Sveučilišta u Osijeku i III. gimnazije Osijek.

Natjecanje se odvija u dva kruga tijekom kojih ekipe sastavljene od tri učenika iz istoga razreda rješavaju ukupno 10 zadataka, od kojih su 4 zadatka abcd pitalice po 1 bod, 3 zadatka su abcd pitalice po 2 boda, 2 su zadatka kratkih odgovora po 3 boda i 1 je zadatak kratkih odgovora po 4 boda. Vrijeme rješavanja je 60 minuta. Drugi se krug od prvoga razlikuje po obuhvaćenim sadržajima, ali i po težini zadataka. Također, za razliku od drugog kruga, u prvom krugu boduju se samo rješenja s ukupnim brojem bodova, a postupak se ne boduje. Nakon drugog kruga natjecanja najbolje tri ekipe u svakoj kategoriji dobivaju titule *Zlatni MathOS lege*, *Srebrni MathOS lege* i *Brončani MathOS lege*.

U prvome krugu natjecanja MathOS cup 2022., koje je održano online 21. siječnja 2022. godine, sudjelovalo je 300 učenika. Drugi krug natjecanja održan je 8. travnja 2022. godine na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku. Temeljem uspjeha u prvome krugu, u drugi krug natjecanja pozvan je 81 učenik i 16 mentora iz sljedećih srednjih škola: III. gimnazija, Osijek; Tehnička i prirodoslovna gimnazija, Osijek; Isusovačka klasična gimnazija, Osijek; Srednja škola Izidora Kršnjavoga, Našice; Gimnazija Matije Antuna Reljkovića, Vinkovci; Gimnazija Bjelovar; Gimnazija Sesvete; XV. gimnazija, Zagreb; Gimnazija Matije Mesića, Slavonski Brod; Gimnazija Virovitica.

Ovogodišnji pobjednički MathOS lege timovi su:
Prvi razred: Zlatni MathOS lege - tim Mathema (Isusovačka klasična gimnazija, Osijek), Srebrni MathOS lege - tim Jaguari (Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica), Brončani MathOS lege - tim Vukovi (Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica) i Legice (III. gimnazija, Osijek).

Drugi razred: Zlatni MathOS lege - tim Nutella (III. gimnazija, Osijek), Srebrni MathOS lege - tim Matko (Gimnazija Sesvete), Brončani MathOS lege - tim Budi|x| (III. gimnazija, Osijek).

Treći razred: Zlatni MathOS lege - tim ZIHOS (III. gimnazija, Osijek), Srebrni MathOS lege - tim Pitagorejci (III. gimnazija, Osijek), Brončani MathOS lege - tim T.M.N.T. (III. gimnazija, Osijek) i tim Kemičari (Gimnazija Matije Antuna Reljkovića, Vinkovci).

Četvrti razred: Zlatni MathOS lege - tim Enigma (Gimnazija Bjelovar), Srebrni MathOS lege - tim Be^2 (III. gimnazija, Osijek), Brončani MathOS lege - tim Dekani i tim NAN (III. gimnazija, Osijek).

Svim sudionicima drugog kruga MathOS cup natjecanja Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku u okviru bodovanja posebnih postignuća priznaje maksimalni broj bodova za upis na Preddiplomski studij Matematika te Preddiplomski studij Matematika i računarstvo.

2 Odabrani zadaci

U nastavku donosimo po nekoliko odabranih zadataka za jedan, dva, tri i četiri boda s pripadnim rješenjima iz drugog kruga natjecanja MathOS cup 2022.

Zadaci za jedan bod

Zadatak 1 (1. razred). *Za negativan realan broj x pojednostavnite izraz*

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2}.$$

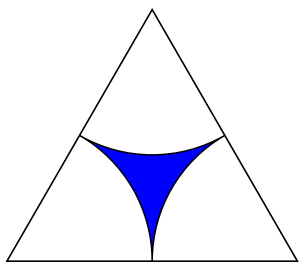
Odgovor: (a) $-3x+4$ (b) $4x-3$ (c) $-4x+3$ (d) $3x-4$

Rješenje. (a)
Primijetimo da je dani izraz suma korijena iz kvadrata, odnosno

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2} &= \sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{x^2}\\ &= |x-1|+|x-3|+|x|.\end{aligned}$$

Sada se lako vidi da za negativan x dani izraz poprima oblik $-x+1-x+3-x=-3x+4$. ◀

Zadatak 2 (1. razred). *Odredite površinu označenog dijela jednakostraničnog trokuta duljine stranice 2.*



Odgovor: (a) $2\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $2\sqrt{3}-\pi$ (c) $\pi-\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\pi$

Rješenje. (d)
Površina označenog dijela trokuta jednaka je površini jednakostraničnog trokuta s osnovicom duljine 2 umanjenoj za trostruku površinu kružnog isječka koji pripada krugu polumjera 1 i koji ima središnji kut 60°:

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 - 3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} 1^2 \pi = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi.$$

Kako tri neosjenčana kružna isječka zajedno čine polukrug, tražena površina može se jednostavnije računati tako da se od površine jednakostraničnog trokuta duljine osnovice 2 oduzme površina jediničnog polukruga. ◀

Zadatak 3 (3. razred). *Koji je od sljedećih trigonometrijskih identiteta istinit? Moguće je više točnih odgovora!*

$(a)\quad \dfrac{1-\sin x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\sin x} \qquad (c)\quad \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

$(b)\quad \dfrac{1+\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x} \qquad (d)\quad \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

Rješenje. Jedini istinit identitet je (c) koji slijedi iz osnovnog trigonometrijskog identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. ◀

Zadaci za dva boda

Zadatak 4 (1. razred). *Hrvatsko narodno kazalište u Osijeku ima* 300 *sjedećih mjesta. Povremeno se u HNK Osijek održavaju besplatne predstave za građane, a povremeno predstave po akcijskim cijenama od* 40 *kuna. Ako je predstava besplatna za građane, onda su popunjena sva sjedeća mjesta u kazalištu, a ako je akcijska cijena karte* 40 *kuna, onda je popunjenost* 60%. *Odredite linearnu funkciju koja opisuje ovisnost broja posjetitelja $f(x)$ o cijeni ulaznice x.*

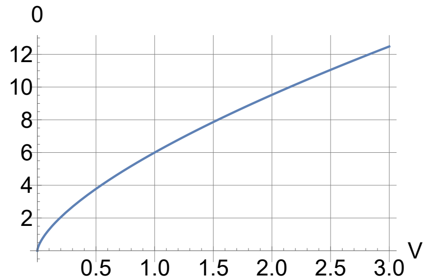
Odgovor:

$(a)\ f(x) = 4x + 300 \qquad (b)\ f(x) = 3x + 300$

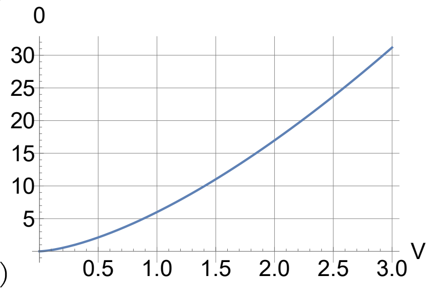
$(c)\ f(x) = 300 - 4x \qquad (d)\ f(x) = 300 - 3x.$

Rješenje. (d)
Funkcija f je zadana pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$. Iz uvjeta zadatka odredimo a i b. Iz prvog uvjeta slijedi $f(0) = 300$, odnosno $a \cdot 0 + b = 300$, pa je $b = 300$, a iz drugog uvjeta $f(40) = 180$, odnosno $40a + b = 180$. Stoga je $a = -3$. ◀

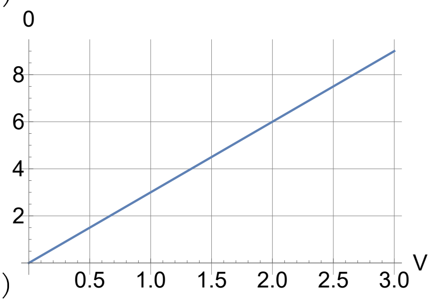
Zadatak 5 (3. razred). *Odredite parametre p i q takve da volumen i oplošje kocke zadovoljavaju $O = p \cdot V^q$ te odredite koji od ponuđenih grafova prikazuje taj odnos.*



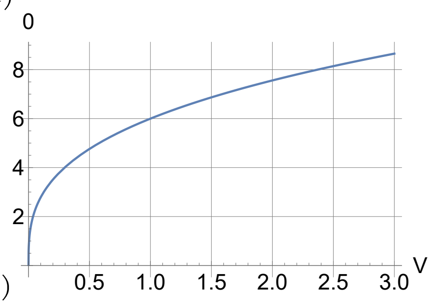
(a)



(b)



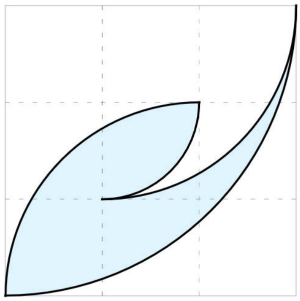
(c)



(d)

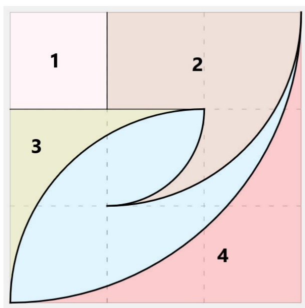
Rješenje. (a)
Kako je $O = 6a^2$ i $V = a^3$, to je $O = 6V^{\frac{2}{3}}$, pa je $p = 6$ i $q = \frac{2}{3}$, a odgovarajući graf je (a). ◀

Zadatak 6 (4. razred). *Ivan je iz kvadratne limene ploče duljine stranice* 3 *metra izrezao lik omeđen kružnim lukovima kao na slici. Odredite koliko posto ploče je otpad. Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.*



Odgovor: (*a*) 29 (*b*) 45 (*c*) 68 (*d*) 73

Rješenje. (c)



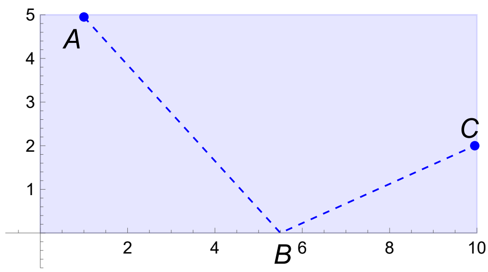
Ako neiskorišteni dio ploče podijelimo na 4 dijela kao na slici, dobivamo

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\ &= 1 + \left(\frac{1}{4}2^2\pi - \frac{1}{4}1^2\pi\right) + \left(4 - \frac{1}{4}2^2\pi\right) + \left(9 - \frac{1}{4}3^2\pi\right) \\ &= 14 - \frac{5\pi}{2}, \end{aligned}$$

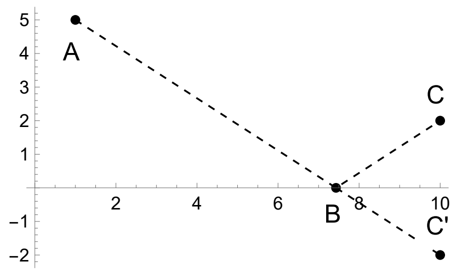
što je približno 68% početne površine. ◀

Zadaci za tri boda

Zadatak 7 (3. razred). *Plivač se nalazi u točki $A(1,5)$, pliva prema rubu bazena koji dodiruje u nekoj točki B te dalje pliva prema točki $C(10,2)$. Odredite koordinate točke B u kojoj plivač treba dodirnuti rub bazena tako da preplivani put ABC bude najkraći mogući.*



Rješenje. $B(\frac{52}{7},0)$
Duljina izlomljene dužine ABC jednaka je duljini izlomljene dužine ABC', gdje je C' osnosimetrična slika točke C s obzirom na apscisu, tj. $C'(10,-2)$. Sada je jasno da će tražena udaljenost biti najkraća kada je $B \in \overline{AC'}$, iz čega slijedi da je tražena točka $B(\frac{52}{7},0)$.



◀

Zadatak 8 (4. razred). *Za kompleksni broj $v = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ odredite sve kompleksne brojeve z sa svojstvom:*

$$\arg\left(\frac{z^5}{i^{2022}}\right) = \arg(v), \quad |z| = 6.$$

Rješenje. $z = 3 + 3\sqrt{3}i$
Lako se provjeri da je argument kompleksnog broja v jednak $\frac{2\pi}{3}$, te da je $\arg(i^{2022}) = \pi$. Nadalje, prema Moivreovoj formuli je $\arg(z^5) = 5 \cdot \arg(z)$, dok je argument kvocijenta jednak razlici argumenata. Sada početna jednadžba poprima oblik

$$\arg(z^5) - \arg(i^{2022}) = \arg(v),$$

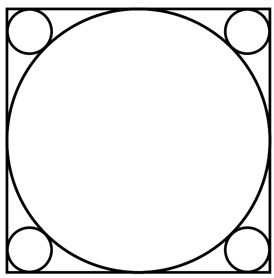
odnosno

$$5 \cdot \arg(z) - \pi = \frac{2\pi}{3},$$

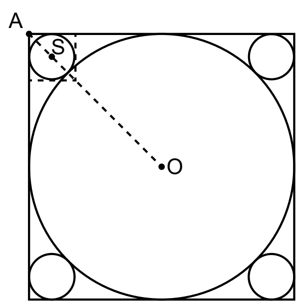
odakle slijedi da je $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$, odnosno $z = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 3 + 3\sqrt{3}i$. ◀

Zadaci za četiri boda

Zadatak 9 (1. razred). *Iz kvadratne metalne ploče duljine stranice* 1 m *potrebno je izrezati krug promjera* 1 m*, a preostali materijal treba iskoristiti za izradu četiri jednaka kruga maksimalnog mogućeg polumjera. Odredite polumjer manjih krugova.*



Rješenje. $r = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ m
Kako su svi manji krugovi jednakog polumjera r, dovoljno je promatrati samo jedan od njih. Označimo proizvoljan vrh kvadrata s A te središte kruga promjera 1 m s O, a središte manjeg kruga radijusa r sa S.



Tada je duljina $\overline{OA}$ jednaka polovini duljine dijagonale kvadrata čija je stranica duljine 1 pa imamo $|OA| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Također, $|OA| = \frac{1}{2} + r + |SA|$. Ako krug sa središtem u S radijusa r upišemo u kvadrat čija je stranica tada $2r$ i jedan vrh mu je A, onda je $|SA| = \sqrt{2}r$. Sada imamo $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + r + \sqrt{2}r$, odnosno $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ m. ◀

Zadatak 10 (2. razred). *Učenica Ada kao hobi piše kratki letak o knjigama koje je pročitala kojeg šalje grupi pretplatnika. Svaki letak naplaćuje* 12 *kuna svakom od pretplatnika kojih je trenutno* 76. *Ada je primijetila da sa svakim povećanjem cijene letka za samo* 1 *kunu, izgubi* 4 *pretplatnika. Kojim se pravilom opisuje zavisnost Adinog prihoda o povećanju cijene letka?*

Rješenje. $P(x) = -4x^2 + 28x + 912$
Zavisnost prihoda o povećanju cijene, gdje je $x \in \mathbb{N}_0$ povećanje cijene, dana je s $P(x) = (12 + x)(76 - 4x)$. ◀

Literatura

[1] Mrežna stranica MathOS cup natjecanja `http://umo.mathos.unios.hr/mathos-cup/`