Osječki matematički list 22 (2022), 91–105

Điudžang suanšu — Devet poglavlja umijeća računanja

Franka Miriam Brückler*

Sažetak

Jedno od najpoznatijih djela u povijesti matematike je starokineski tekst *Devet poglavlja*. U ovom članku opisujemo njegov sadržaj i značaj, ali ga i komentiramo iz moderne perspektive.

Ključne riječi: *proporcionalnost, Euklidov algoritam, trojno pravilo, pravokutni trokut, Gaußova metoda eliminacija, korjenovanje, geometrija, linearne jednadžbe, povijest matematike, kineska matematika*

Jiuzhang suanshu — Nine Chapters on the Art of Calculation

Abstract

One of the most famous texts in the history of mathematics is the ancient Chinese *Nine chapters*. In this article we describe its contents and impact, but also comment it from a contemporary perspective.

Keywords: *proportionality, Euclid's aLgorithm, rule of three, right triangle, Gauß eliminations, roots, geometry, linear equations, history of mathematics, Chinese mathematics*

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: bruckler@math.hr

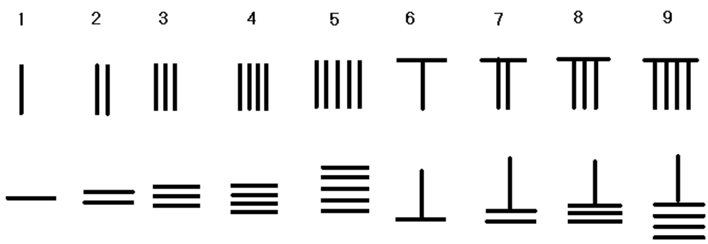
1 Uvod

U prošlom smo broju spominjali kako su stari Kinezi računali površinu i opseg kruga. Pritom smo kao jedan od najvažnijih starih kineskih matematičkih tekstova spomenuli *Devet poglavlja umijeća računanja* (prema pomoćnom kineskom latiničnom alfabetu pinjin, izvorni naslov se transkribira na hrvatski kao *Điudžang suanšu*).[1] U ovom ćemo broju reći više o sadržaju tog znamenitog djela iz povijesti matematike.

Devet poglavlja je anonimna kompilacija starijih rezultata nastala u doba dinastije Han, dakle negdje između 200. g. pr. Kr. i 300. g. n. e. [6]. Slično kao i kod staroegipatskog Rhindovog i Moskovskog papirusa, radi se o zbirci zadataka namijenjenoj obrazovanju za razne struke, odnosno tekst je praktične orijentacije. Ukupno sadrži 246 zadataka raspoređenih u 9 poglavlja, a za razliku od spomenutih papirusa daju se i opća pravila rješavanja, iako bez dokaza. Naslovi poglavlja su, u slobodnom prijevodu, redom „Mjerenje polja", „Proso i riža", „Raspodjela po proporciji", „Koja širina?", „Rasprave o radu", „Pošteni prijenosi", „Višak i manjak", „Pravokutne tablice" te „Pravokutni trokuti" [5]. U nastavku ćemo malo detaljnije opisati sadržaj pojedinih poglavlja.

Prije toga spomenimo da iako se radi o vrlo starom djelu, brojevni sustav korišten u *Devet poglavlja* je poprilično moderan. Naime, stari Kinezi su već u davna vremena (najkasnije u 5. st. pr. Kr.) razvili *pozicijski* dekadski brojevni sustav bez nule (dakle, bez apsolutne pozicije). Brojke tog sustava, koje se koriste u *Devet poglavlja*, poznate su pod nazivom **kineske štapićaste brojke**, a razvile su se iz korištenja štapića kao pomagala u računanju. Znamenke su postojale u dva oblika, horizontalnom i vertikalnom, ovisno o tome radi li se o parnoj ili neparnoj potenciji od 10 (slika 1). Primjerice, | može značiti 1, 100, 10000, …, dok **–** može značiti 10, 1000, …[5, 6]. Ono što danas zapisujemo kao 110101, u starih Kineza bilo bi **–** | | | (uočite da zbog nedostatka apsolutne pozicije, tj. znamenke nula, isti zapis može predstavljati i, primjerice, 10010001000001, pa čak, ako razmaci među znamenkama nisu jasno naznačeni, može biti i 13).

[1] *Suanšu* je kineska riječ za matematiku, ali doslovno znači „umijeće računanja" [5].



Slika 1. Kineske štapićaste brojke. Izvor: Gisling, Wikipedia, GNU Free Documentation License.

Također, **sustav mjera** je bio (više-manje) decimalni. Spomenimo ovdje samo neke od češće korištenih mjernih jedinica iz doba dinastije Han, a koje susrećemo u *Devet poglavlja* [5]: Osnovna mjera duljine je džang (iznosa otprilike 2.3 m), koji se dijeli na 10 čiova, a svaki či se dijeli na 10 cuna. Često su korištene i jedinice li (1 li = 180 džang) te bu (1 bu = 60 cun):

$$1 \text{ li} = 180 \text{ džang} = 300 \text{ bu} = 1800 \text{ či} = 18000 \text{ cun}.$$

Osnovna mjerna jedinica za površine bio je cing, koji se dijeli na 100 mu, alternativno je 1 cing isto što i 24000 kvadratnih bu:

$$1 \text{ cing} = 100 \text{ mu} = 24000 \text{ kvadratnih bu}.$$

Za volumen osnovna mjerna jedinica je bila hu (iznosa otprilike 20 L), koja se dijelila na 10 doua, a svaki dou se dijelio na 10 šeng:

$$1 \text{ hu} = 10 \text{ dou} = 100 \text{ šeng}.$$

Naposlijetku, osnovna mjerna jedinica za masu bio je đin (1 đin je malo više 200 g), koji se dijelio na 16 lianga, a svaki liang se dijelio na 24 džua:

$$1 \text{ đin} = 16 \text{ liang} = 384 \text{ džu}.$$

2 Mjerenje polja (*Fang tjen*)

U prvom se poglavlju nalazi 38 zadataka, vezanih za izračune površina polja oblika pravokutnika, trokuta, trapeza, krugova, … Tu nalazimo i pravila za račun s razlomcima i određivanje najvećih zajedničkih djelitelja [5, 6]. Kako smo vidjeli u prošlom broju, izračuni površina krugova ekvivalentni su lošoj aproksimaciji broja π s 3 [1]. Iz zadataka sa skraćivanjem razlomaka vidljivo je da su Kinezi tog doba poznavali **Euklidov algoritam**, iako zasigurno nisu znali za antičke grčke rezultate:

Primjer 1. *Peti i šesti zadatak u prvom poglavlju glase* [4]*:*[2]

„I sad je dan razlomak $\frac{12}{18}$*. Reci, što se dobije kad ga se skrati? Odgovor:* $\frac{2}{3}$*.*

A sad je dan drugi razlomak $\frac{49}{91}$*. Reci, što se dobije kad ga se skrati? Odgovor:* $\frac{7}{13}$*."*

Nakon ta dva zadatka, mi bismo rekli primjera, slijedi opća uputa:

„Pravilo za skraćivanje razlomaka: Ako se [*brojnik i nazivnik*] *mogu prepoloviti, prepolovi ih. Ako ne, zapiši brojnik i nazivnik, oduzmi manji broj od većeg. Ponavljaj postupak da dobiješ par jednakih brojeva.*[3] *Koristi ga da skratiš* [*razlomak*]*."*

Izuzev zadataka spomenutih u [1], ostali zadaci s izračunima površina su prilično elementarni. Navedimo samo jedan primjer.

Primjer 2. *Zadatak br.* 27 *glasi* [4]*:*

„I sad je dano pravokutno trapezno polje s osnovicama 30 bu *i* 42 bu *i visinom* 64 bu. *Reci, kolika mu je površina? Odgovor:* 9 mu 144 (*kvadratna*) bu.*"*

Zatim slijedi sličan zadatak pod rednim brojem 28 *i onda opet zaključak o općem pravilu za računanje površina pravokutnih trapeznih polja: „Pomnoži pola zbroja osnovica s visinom, ili pola visine sa zbrojem osnovica. Podijeli brojem kvadratnih* bu *po jednom* mu.*"*

Što se misli pod posljednjim? Naravno, misli se na to da se skupe manje jedinice u veću, kad je moguće. Konkretno, za gore navedeni 27*. zadatak izračunalo bi se zbroj osnovica* 72 bu*, njegova polovina* 36 bu*, što množenjem s visinom daje površinu* 2304 *kvadratna* bu*. No, kako smo rekli u uvodu,* 1 mu $=$ 240 *kvadratna* bu*, dakle dijeljenjem* ($2304 : 240 = 9$ *i ostatak* 144) *dobivamo rješenje u navedenom obliku.*

Kao što vidimo, iako matematičkih formula u to doba u Kini (zapravo nigdje) nije bilo, pravila za računanje površina iskazana su u formulacijama ekvivalentnim suvremenim formulama.

3 Proso i riža (*Su mi*)

U ovom poglavlju nalazimo 46 zadataka vezane za razmjenu raznih plodova i žitarica, koji se rješavaju koristeći **trojno pravilo** [6]. Poglavlje za-

[2]Svi prijevodi prate izvornik, ali su prilagođeni duhu hrvatskog jezika.

[3]Taj par jednakih brojeva je najveći zajednički djelitelj, tj. zadnji broj u Euklidovom algoritmu.

počinje tablicom ekvivalenata raznih tipova prosa, riže,[4] pšenice, ječma i graha, nakon čega je izrečeno pravilo *đin jou* (doslovno: „I sad je dano", što je — možda ste već primijetili — bio standardni uvodni tekst u zadatke): „Pomnoži ekvivalentnu vrijednost onog što se traži s onim što je dano da dobiješ djeljenik. Neka je ekvivalentna vrijednost danoga djelitelj. Podijeli djeljenik s djeliteljem." Ovo je, čini se, najstariji poznati zapis trojnog pravila, koje danas iskazujemo ovako: Ako je $a : b = x : d$, onda je $x = a \cdot \frac{d}{b}$. Slijedi 31 zadatak koji se rješavaju koristeći navedenu tablicu i pravilo [2].

Primjer 3. *Prvi zadatak drugog poglavlja glasi* [2]*: „I sad je dan* 1 dou *prosa koje se želi razmijeniti za grubu rižu. Nađi dobivenu količinu. Odgovor kaže:* 6 *šenga grube riže."*

Kako je to dobiveno? U tablici je navedeno da je standardna ekvivalentna vrijednost 50 *za proso i* 30 *za grubu rižu, odnosno* 50 *volumnih jedinica prosa vrijedi jednako kao* 30 *istih volumnih jedinica grube riže. Mi bismo pisali:*

$$V_{\mathrm{P}} : 50 = V_{\mathrm{G.R.}} : 30.$$

Dakle, da dobijemo traženi volumen grube riže treba podijeliti $30 : 50 = \frac{3}{5}$ *i to pomnožiti s danim volumenom prosa, odnosno ekvivalent* 1 dou *prosa je* $\frac{3}{5}$ dou *grube riže. Budući da je desetina jednog doua jedan šang, vidimo da se stvarno dobilo traženo rješenje.*

Nakon zadataka ovog tipa, slijedi 15 zadataka vezanih za razmjenu novca za dobra, za koje je specijalni slučaj trojnog pravila naveden ovako: „Neka je ekvivalentna vrijednost kupljene količine djelitelj, a potrošeni novac djeljenik. Podijeli djeljenik s djeliteljem da dobiješ cijenu jednog komada" [2]. Kao primjer dajemo sljedeći zadatak.

Primjer 4. *Zadatak pod rednim brojem* 34 *glasi* [2, 5]*: „I sad je dano* 5785 *ciana potrošenih na kupnju* 1 hu 6 dou $7\frac{2}{3}$ *šenga boje. Žele se koristiti ekvivalentne vrijednosti u douima. Nađi cijenu jednog doua. Odgovor kaže: Jedan dou košta* $345\frac{15}{503}$ *ciana."*

U skladu s definicijama mjernih jedinica volumena iz uvoda, volumen boje izražen u douima je $16\frac{23}{30}$ dou*. Stoga je cijena jednog doua boje* $5785 : 16\frac{23}{30}$*, tj.* $345\frac{15}{503}$ *ciana.*

4 Raspodjela po proporciji (*Cui fen*)

Zadaci, njih 20, u ovom poglavlju tiču se raspodjele novca i drugih dobara [2, 6]. Posebno, ovdje susrećemo direktnu i obrnutu **proporcionalnost**, ali

[4] U doba kad su nastala *Devet poglavlja*, poljoprivreda je bila glavni izvor bogatstva. Najraširenija žitarica bio je proso, dok je riža bila relativno skuplje jelo bogatijih slojeva [5].

i aritmetičke i geometrijske nizove [5]. Kao i u drugom poglavlju, i ovdje se glavna metoda, izražena slično kao ondje trojno pravilo, nalazi na početku, a zatim se primjenjuje u zadacima. Navedimo prvi od njih [2]:

Primjer 5. *„I sad je tu bilo pet osoba, Dai Fu, Bu Geng, Dzan Niao, Šang Zao i Gong Ši, koji su otišli u lov i ukupno ulovili pet jelena. Željeli su rasporediti u skladu s njihovim redoslijedom. Nađi koliko je tko dobio."*

Dakle, traži se da 5 *jelena rasporedimo u produženom omjeru* $5:4:3:2:1$.

„Odgovor kaže: Dai Fu je dobio $1\frac{2}{3}$ *jelena, Bu Geng je dobio* $1\frac{1}{3}$ *jelena, Dzan Niao je dobio* 1 *jelena, Šang Zao je dobio* $\frac{2}{3}$ *jelena, Gong Ši je dobio* $\frac{1}{3}$ *jelena.*

Metoda kaže: Zapiši brojeve prema redoslijedu, pri čemu je svaki proporcionalni udio. Udvostruči ih i zbroji da dobiješ djelitelj. Pomnoži svaki koji nije pribrojen s brojem jelena i neka je svaki takav umnožak djeljenik. Podijeli djeljenik s djeliteljem da dobiješ količinu jelena koju dobije jedna osoba."

Iako suvremenom čitatelju neobično formulirana uputa, nije ju teško modernije formulirati: Djeljenik za svakog će biti $2\cdot 5+2\cdot 4+2\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 1=30$ *jer je zadan produženi omjer* $5:4:3:2:1$. *Za svakog pojedinačno, djeljenik je ukupni broj jelena* 5 *pomnožen s njegovim članom u prethodnom zbroju. Recimo, za drugog je djeljenik* $5\cdot(4\cdot 2)=40$ *pa je njegova količina jelena* $\frac{40}{30}=1\frac{1}{3}$.

Nakon prvih 7 zadataka koji kao gore koriste „rastuću" proporcionalnost, slijede njih 2 vezani za „padajuću" proporcionalnost, a nakon tog 11 zadataka u kojima se koristi trojno pravilo za razne varijante raspodjela.

Primjer 6. *Jedan od zadataka u ovom poglavlju glasi* [5]*: „I sad je tu* 1 *đin svile koji košta* 240 *novčića. Reci: Ako je dano* 1328 *novčića, koliko đina svile je dobiveno?"*

Rješenje prepuštamo čitatelju.

5 Koja širina? (*Šao guang*)

Ovo poglavlje sadrži 24 geometrijska zadatka. Većinom se radi o određivanju stranice kvadrata poznate površine ili brida kocke poznatog volumena. Stoga ovdje nalazimo i iracionalne brojeve, točnije kvadratne i kubne korijene [6]. Zbog numeričkih metoda **korjenovanja** ovo je poglavlje jedno od dva najzanimljivija iz moderne perspektive.

Prvih 11 zadataka tiču se pravokutnih polja površine 1 mu kojima je duljina jedne stranice zadana kao $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ bu, a treba odrediti duljinu druge stranice. Postupak je očigledan, iako malo netipično formuliran (kao množenje 240 (kvadratnih) bu, što je naravno 1 mu, sa zajedničkim nazivnikom dane sume, mi bismo rekli s najmanjim zajedničkim višekratnikom svih nazivnika, pa dijeljenjem s brojnikom koji se izračunava tako da za svaki $\frac{1}{k}$ pribrojimo najmanji zajednički višekratnik podijeljen k). Ono što je iz ovih zadataka očito je da su stari Kinezi znali odrediti **najmanji zajednički višekratnik** brojeva u skupu tipa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Primjerice, u 10. zadatku gdje je duljina stranice $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{11}$ kao „množitelj površine" ne uzima se 11!, već 27720 [2].

Nakon toga slijede zadaci s izračunavanjem duljine stranice kvadrata poznate površine, tj. računanja $\sqrt{x}$ za dani x. Opća metoda, naziva *kai fang*, navedena je nakon 16. zadatka. Iako je u samom tekstu vrlo kratka, zbog podrazumijevanja poznavanja računa sa štapićima, a i nekih drugih specifičnosti, nema ju smisla dati u prijevodu. Puno objašnjenje je također prilično dugo, no objasnit ćemo ju u obliku prilagođenom suvremenim brojkama na primjeru u kojem je $\sqrt{x}$ prirodan broj (iako je metoda dana i za slučajeve kad je razlomak) [2, 3].

Primjer 7. *12. zadatak u ovom poglavlju glasi* [2]*: „I sad je dana površina* 55225 [*kvadratnih*] bu. *Nađi stranicu kvadrata."*

Postupak za izračun $\sqrt{55225}$ (*odnosno, najvećeg cijelog od traženog korijena*) *je iterativan, određuje se znamenka po znamenka. Prvo se utvrdi broj znamenki koje treba odrediti. Budući da je* $100^2 < 55225 < 1000^2$*, zaključujemo da je* $\sqrt{55225}$ *troznamenkasti broj* (abc)*, tj.*

$$\begin{aligned} 55225 &= (100a + 10b + c)^2 = 10000a^2 + 100(20a + b)b + (20(10a + b) + c)\,c \\ &= 10000a^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Isprobavanjem $a = 1, 2, \ldots$ *utvrđujemo da je* $a = 2$*, jer bi za* $a = 3$ *desni izraz bio prevelik. Uvrstimo* $a = 2$ *pa dobijemo*

$$15225 = 100(40 + b)b + (20(20 + b) + c)\,c = 100(40 + b)b + \ldots.$$

Opet, isprobavanjem $b = 1, 2, \ldots$ *zaključujemo da je druga znamenka* $b = 3$*. Uvrstimo pa preostane*

$$2325 = (460 + c)\,c.$$

Isprobavanje daje $c = 5$ *pa zaključujemo da je* $\sqrt{55225} = 235$*, odnosno da je rješenje zadatka* 235 bu.

Zadaci s rednim brojevima 17. i 18. tiču se određivanja opsega kruga poznate površine (s tim da se pretpostavlja da je opseg trostruki promjer, kako je opisano u [1]), a zatim slijede četiri zadataka određivanja duljine brida kocke poznatog volumena i dva zadatka nalaženja promjera kugle poznatog volumena,[5] tj. računanja kubnih korijena. Metodu nećemo opisivati, ali radi se o sličnoj metodi kao onoj za kvadratne korijene [2].

6 Rasprave o radu (*Šang gong*)

U ovom poglavlju nalazi se 28 zadataka koji pomažu u vrednovanju radnih učinaka. Stoga ovdje nalazimo razne probleme vezane za izračune volumena (kvadara, piramida, valjaka, stožaca, krnjih piramida, krnjih stožaca, klinova, ...) [6]. Kao primjere dajemo sljedeća dva.

Primjer 8. *15. zadatak glasi* [2]*: „I sad je dana piramida s pravokutnom osnovkom, širine* 5 *čija, dubine* 7 *čija i visine* 8 *čija. Nađi njen volumen."*

Odgovor je $93\frac{2}{3}$ *čija (očigledno se misli na kubični), a uputa je doslovno kao moderna formula: „Pomnoži širinu i dubinu pa pomnoži s visinom. Podijeli s* 3*."*

Primjer 9. *18. zadatak glasi* [2]*: „I sad je dan klin s pravokutnom osnovkom, donja širina* 3 *džanga, donja dubine* 4 *džanga; gornja dubina* 2 *džanga, nema širine; visina je* 1 *džang. Nađi njen volumen."*

Odgovor je 5000 *čija (opet naravno kubični), a uputa je: „Udvostruči donju dubinu, dodaj joj gornju dubinu, pomnoži sa širinom pa s visinom. Podijeli sa* 6*."*

Zanimljiv zadatak za Vas, suvremenog čitatelja, je skicirati klin o kojem se radi!

7 Pošteni prijenosi (*Dzun šu*)

Zadaci, njih 28, u ovom poglavlju posebno puno otkrivaju o socijalnim i ekonomskim odnosima u staroj Kini. Što se matematičkih metoda tiče, ovo poglavlje ne sadrži nikoje novo opće pravilo, ali svaki zadatak je zaključen s pripadnim konkretnim pravilom, slično kao što smo vidjeli u prvom poglavlju. S druge strane, tipovi zadataka su vrlo raznoliki i dotiču se raznih aspekata svakodnevnog života, posebice raznih vrsta poreza. Posebno kompliciran je četvrti zadatak [2]:

Primjer 10. *„I sad imamo pošteno oporezivanje transporta prosa između četiri okruga. Okrug A,* 8 *dana od poreznog ureda, ima* 10000 *kućanstava. Okrug B,* 10 *dana od poreznog ureda, ima* 9500 *kućanstava. Okrug C,* 13 *dana od poreznog ureda, ima* 12350 *kućanstava, Okrug D,* 20 *dana od poreznog ureda, ima* 12200 *kućanstava. Ukupna količina oporezivog prosa je* 250000 hu *i za to treba* 10000 *kola. Pretpostavi da se porez treba rasporediti u skladu s udaljenosti od ureda i*

[5] Pretpostavlja se da se volumen kocke prema volumenu upisane kugle odnose kao 16 : 9, što opet odgovara aproksimaciji π s 3.

brojem kućanstava. Reci: Koliko prosa treba prevesti koji okrug? Koliko kola svaki okrug treba koristiti?

Odgovor: Okrug A 83100 hu *prosa u* 3324 *kola. Okrug B* 63175 hu *prosa u* 2527 *kola. Okrug C* 63175 hu *prosa u* 2527 *kola. Okrug D* 40550 hu *prosa u* 1622 *kola."*

Možete li temeljem rješenja sami otkriti kako je ovdje matematički interpretiran uvjet „rasporediti u skladu s udaljenosti od ureda i brojem kućanstava"?

Neki zadaci tiču se relativnog odnosa udaljenosti i brzina. Kao ljubiteljica pataka, za primjer dajem jedan zadatak s patkom.

Primjer 11. *Dvadeseti zadatak glasi* [2]*: „I sad ima divlja patka kojoj treba* 7 *dana da od južnih mora doleti do sjevernih. Divljoj guski treba* 9 *dana da od sjevernih mora doleti do južnih. Sad, ako divlja patka i divlja guska krenu u istom trenutku, nađi broj dana dok se ne sretnu.*

Odgovor: $3\frac{15}{16}$ *dana.*

Metoda kaže: Zbroji dane da dobiješ djelitelj. Pomnoži dane da dobiješ djeljenik. Podijeli djeljenik s djeliteljem da dobiješ broj dana."

Kako bismo danas provjerili da se radi o korektnom pravilu? Dane su brzine divlje patke i guske ($v_P = \frac{d}{7}$, $v_G = \frac{d}{9}$, *gdje je* d *udaljenost koju obje prevaljuju*). *Očito se podrazumijevaju konstantne brzine, tj. jednoliko gibanje. Dakle,* $d = 7v_P = 9v_G$.

Traži se vrijeme t *do susreta. Susrest će se kad je patka preletjela neku udaljenost* x*, a guska* $d - x$*. Vrijeme koje patki treba za prijeći udaljenost* x *je* $\frac{x}{v_P}$*, a guski za* $d - x$ *treba* $\frac{d-x}{v_G}$*. Dakle,* $\frac{x}{\frac{d}{7}} = \frac{d-x}{\frac{d}{9}}$*, odnosno* $7x = 9(d - x)$*, dakle* $x = \frac{9}{16}d$ *pa je* $t = \frac{9 \cdot 7}{9+7}$ *dana.*

8 Višak i manjak (*Jing bu zu*)

Ovdje nalazimo rješavanje linearnih jednadžbi koristeći metodu poznatu puno kasnije u Europi pod nazivom ***regula falsi*** [6]. U *Devet poglavlja* ona se naziva „pravilo od previše i nedovoljno" (nazovimo to metodom viška i manjka), a ono se temelji na računskim postupcima kod zbrajanja razlomaka (i potencijalno na konfucijanizmu u kojem se traži uravnotežavanje jina i janga) [5]. Poglavlje sadrži ukupno 20 zadataka. Prvih 8 zadataka su vezani za određivanje viška i manjka, evo jednog [2]:

Primjer 12. *„I sad neki broj ljudi kupuje zlato. Ako svaki plati po* 400 *ostaje višak* 3400*, a ako svaki plati* 300*, višak je* 100*. Nađi broj ljudi i cijenu zlata."*

Broj ljudi se dobije tako da razliku viškova podijelimo s razlikom uplata po osobi: $(3400 - 100) : (400 - 300) = 33$*. Cijena zlata je onda broj ljudi pomnožen s* *jednom od njihovih uplata i zatim oduzetim odgovarajućim viškom:* $33 \cdot 400 - 3400 = 9800$.

Slijede zadaci koji koriste metodu viška i manjka, tj. *regula falsi*, koju ćemo opisati na primjeru 19. zadatka iz ovog poglavlja [2].

Primjer 13. *„A sad imamo dobrog konja i lošeg konja koji kreću iz Čang'ana za Ci. Od Cia do Čang'ana ima* 3000 li. *Dobri konj prijeđe* 193 li *prvi dan i dalje svaki dan po* 13 li *više. Loši konj prijeđe* 97 li *prvi dan i dalje svaki dan po* $\frac{1}{2}$ li *manje. Dobri konj stiže u Ci, te se okrene i pri povratku sretne lošeg konja. Nađi broj dana dok se ne susretnu te koliko su dotad prešli svaki od njih."*

Pretpostave se dva različita broja dana, konkretno su u tekstu uzeti 15 *i* 16, *pa se izračunaju odgovarajući viškovi i manjkovi* (*prijeđene udaljenosti*).

Da je do susreta trebalo 15 *dana, dobri konj bi prešao* $193 + (193 + 13) + (193 + 2 \cdot 13) + \ldots + (193 + 14 \cdot 13) = 4260\,\mathrm{li}$ (*dakle, došao je do Cija i pri povratku prešao* 1260 li), *a loši konj bi prešao* $97 + (97 - \frac{1}{2}) + (97 - 2 \cdot \frac{1}{2}) + \ldots + (97 - 14 \cdot \frac{1}{2}) = 1402\frac{1}{2}\,\mathrm{li}$. *Budući da je* $1260 + 1402\frac{1}{2} = 3000 - 333\frac{1}{2}$, *vidimo da za* 15 *dana imamo manjak* $337\frac{1}{2}$ li (*dakle,* 15 *dana nije dovoljno*).

Da je do susreta trebalo 16 *dana, dobri konj bi prešao* $(4260 + 193 + 15 \cdot 13)\,\mathrm{li} = 4648\,\mathrm{li}$, *a loši konj bi prešao* $\left(1402\frac{1}{2} + 97 - 15 \cdot \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{li} = 1492\,\mathrm{li}$. *Budući da je* $1648 + 1492 = 3000 + 140$, *vidimo da za* 16 *dana imamo višak* 140 li.

Sad se iskoristi jedna od metoda iz prvih osam zadataka (*varijanta za jedan višak i jedan manjak*), *pa se traženi broj dana dobije kao* $\frac{16 \cdot 337\frac{1}{2} + 15 \cdot 140}{337\frac{1}{2} + 140} = 15\frac{135}{191}$. *Dotad je dobri konj prešao* 4260 li *i još* $\frac{135}{191}$ *od* $193 + 15 \cdot 13$ li, *dakle* $4534\frac{46}{191}$ li. *Analogno je loši konj do susreta prešao* $1465\frac{45}{191}$ li.

9 Pravokutne tablice (*Fang čeng*)

Iz moderne perspektive ovo poglavlje je najzanimljivije, jer sadrži 18 zadataka sa sustavima linearnih jednadžbi koji se rješavaju metodom fang-čeng, koja je *de facto* **Gaußova metoda eliminacija** [6]. Među sustavima u zadacima ovog poglavlja najveći je sustav s 5 jednadžbi i 6 nepoznanica:

Primjer 14. *Zadatak br.* 13. *glasi* [2]: *„I sad je tu pet obitelji koje dijele bunar. Za* 2 *konopa obitelji A treba* 1 *konop obitelji B da dosegne vodu. Za* 3 *konopa obitelji B treba* 1 *konop obitelji C da dosegne vodu. Za* 4 *konopa obitelji C treba* 1 *konop obitelji D da dosegne vodu. Za* 5 *konopa obitelji D treba* 1 *konop obitelji E da dosegne vodu. Za* 6 *konopa obitelji E treba* 1 *konop obitelji A da dosegne vodu. Dakle, svakoj grupi konopa nedostaje jedan iz prethodne grupe. Nađi dubinu bunara i duljine pojedinih konopa."*

Iako problem ima beskonačno mnogo rješenja, u Devet poglavlja je dano samo jedno od njih.

Metoda *fang čeng* znači „kvadratno tabeliranje”. U računima se pojavljuju i **negativni brojevi**, poznati u Kini najkasnije od 2. st. pr. Kr,[6] te su ovdje objašnjena i pravila za račun s njima.

Osnovna razlika metode *fang čeng* u odnosu na modernu Gaußovu metodu je da se matrica sustava zapisuje transponirano u odnosu na suvremenu. Ilustrirajmo metodu *fang čeng* primjerom iz [5].

Primjer 15. *Iz tri snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos* 39 dou. *Iz dva snopa dobrog žita, tri snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos* 34 dou. *Iz jednog snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i tri snopa lošeg žita dobije se prinos* 26 dou. *Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?*

Postupak je sljedeći. Prvo se ispiše pravokutna tablica:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

U prvom koraku se od trostrukog drugog stupca oduzme dvostruki treći, rezultat zapisujemo u drugi stupac:[7]

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

Sad se trostruki prvi stupac oduzme od trećeg, rezultat zapišemo u prvi stupac:

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

[6] Nigdje drugo tako davno još nisu bili poznati negativni brojevi. Za njih su se koristili štapići crne boje, dok su se za pozitivne koristili crveni štapići.

[7] U to doba u Kini nula još nije bila poznata, pa se mjesta koja odgovaraju iznosu nula ostavljaju prazna.

Sad se još poništi 4 *u prvom stupcu, tako da od peterostrukog prvog stupca oduzmemo četverostruki drugi, rezultat pišemo u prvi:*

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

Naposljetku očitavamo rješenje, uvrštavanjem „unatrag". Prvo vidimo da je prinos lošeg žita $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$*. Stoga je prinos srednjeg žita* $(24 - 1 \cdot 2\frac{3}{4}) : 5 = 4\frac{1}{4}$ dou *i naposljetku prinos dobrog žita je* $(39 - 1 \cdot 2\frac{3}{4} - 2 \cdot 4\frac{1}{4}) : 3 = 9\frac{1}{4}$ dou,

10 Pravokutni trokuti (*Gou gu*)

Zadaci, njih 24, ovog poglavlja rješavaju se koristeći Pitagorin poučak te sličnost. **Pitagorin poučak** se u Kini nazivao pravilom *gou gu*, ali dokaz se u to doba još nije nigdje navodio, nego se kao i primjerice kod Babilonaca radilo o empirijskom pravilu [6]. Pritom, *gou* je naziv za kraću katetu, *gu* je naziv za dulju katetu pravokutnog trokuta, a naziv za hipotenuzu je *sian*. Prva tri zadatka tiču se pravokutnih trokuta s najpoznatijim duljinama stranica, 3, 4 i 5 (zadane su po dvije, a određuje se treća od njih). Daljnji zadaci su raznolikiji ne samo u pogledu duljina stranica, nego i zadanih iznosa (u nekim zadacima se umjesto duljine jedne ili dviju stranica zadaju razlike ili zbrojevi duljina dviju stranica trokuta).

Primjer 16. *U* 11. *zadatku traži se visina i širina vrata za koje je poznato da je visina od širine dulja za* 6 *čija i* 8 *cuna te da je razmak nasuprotnih vrhova (dijagonala) duljine* 1 *džang* [2].

Mi bismo danas zadatak zapisali kao $x - y = 68$ *cuna i* $x^2 + y^2 = 1$ *kvadratni džang (što je* 10000 *kvadratnih cuna), iz čega bismo supstitucijom dobili kvadratnu jednadžbu*

$$x^2 + (x - 68)^2 = 10000,$$

$$2x^2 - 136x - 5376 = 0,$$

čije jedino pozitivno rješenje je visina $x = 96$ *cuna, tj.* 9 *čija i* 6 *cuna, a širina je onda* 3 *čija i* 2 *cuna.*

Isto rješenje dano je i u Devet poglavlja*, ali sa sljedećim objašnjenjem* [2]*: „Neka je kvadrat od* 1 *džanga djeljenik. Prepolovi danu razliku, kvadriraj i udvostruči. Oduzmi to od djeljenika i prepolovi rezultat. Kad kvadratni korijen tog broja oduzima pola zadane razlike, dobije se širina vrata, a kad se pribroji polovici zadane razlike, dobije se visina vrata." Vidimo dakle da su starokineski matematičari* *rješenje ovakvog zadatka sveli na*

$$x, y = \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{(x-y)^2}{4}} \pm \frac{x-y}{2},$$

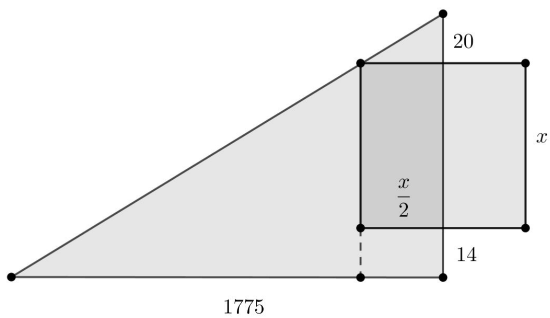
što je naravno ekvivalentno našem gore danom modernom postupku.

Pojavljuju se i zadaci koji koriste **sličnost trokuta**. Među njima se posebno često citira 20. zadatak, jer uključuje rješavanje kvadratne jednadžbe koja nije „čisto" kvadratna (oblika $x^2 = c$, rješiva direktno korjenovanjem), nego ima i linearni član [2].

Primjer 17. *I sad imamo kvadratni grad opasan zidinama nepoznate veličine s vratima na sredinama svake od četiriju strana. Na udaljenosti* 20 bu (*sjeverno*) *od sjevernih vrata raste stablo. To stablo se može vidjeti ako se od južnih vrata hoda na jug* 14 bu *pa se skrene na zapad i hoda* 1775 bu*. Treba odrediti duljinu strana kvadratnog grada.*

Metoda uz rješenje (250 bu) *kaže da se udvostruči umnožak udaljenosti od sjevernih vrata i puta prema zapadu* ($2 \cdot 20 \cdot 1775 = 71000$)*, to daje ono što danas nazivamo slobodnim članom u jednadžbi. Koeficijent uz linearni član je zbroj pomaka na sjever i jug* ($20 + 14 = 34$)*. Rješavanje takvih jednadžbi* (*oblika* $x^2 + bx = c$ *s pozitivnim* b *i* c) *opisano je u četvrtom poglavlju, uz metode korjenovanja. Rješenje je, riječima opisano, dano kao* $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} - \frac{b}{2}$*. Do te jednadžbe najjednostavnije se dođe uočavanjem sličnosti najmanjeg i najvećeg od pravokutni trokuta na slici 2:*

$$20 : \frac{x}{2} = (x + 34) : 1775.$$



Slika 2. Skica uz 20. zadatak u 9. poglavlju u *Devet poglavlja*

11 Zaključak

Devet poglavlja nije samo impresivno matematičko djelo za svoje doba, nego zadaci u njemu otkrivaju i mnogo o kineskom životu u doba dinastije Han. No, najvažnije je da je bitno utjecalo na matematiku Dalekog Istoka stoljećima kasnije. Objašnjenja, odnosno opravdanja pravila danih u *Devet poglavlja* dao je u 3. st. n. e. veliki kineski matematičar Liu Hui te su u stoljećima nakon njega *Devet poglavlja* korištena skupa s njegovim komentarima i nadopunama. Kad je, nakon više stoljeća zatišja u razvoju matematike, znanosti i tehnologije kao i političke razdijeljenosti, u 7. st. kineska dinastija Tang provela niz obrazovnih reformi, u njih je uključen i popis „deset matematičkih klasika" (zapravo ih je bilo 12), službeni popis matematičke literature za poduku na Carskoj akademiji. Jedan od njih je bio i *Devet poglavlja* te je ovo djelo tako zadržalo veliku važnost još puno stoljeća nakon svog nastanka [2, 4, 5, 6, 7]. Za suvremenog nastavnika matematike, ovo je djelo zasigurno zanimljivo. Jedan razlog su nerijetko atraktivne, „egzotične", formulacije zadataka i težišta na zadacima riječima s praktičnim implikacijama. Drugi razlog je svakako usporedba nastavnih sadržaja: Kako smo vidjeli, *Devet poglavlja*, stara nekih 2 tisuće godina, sadrži mnoge matematičke teme i metode koje se i danas obrađuju u osnovno- i srednjoškolskom gradivu matematike, no postoje i značajne iznimke, među kojima se ističu Gaußova metoda eliminacija, numeričko korjenovanje i metoda *regula falsi* za rješavanje linearnih jednadžbi.

Literatura

[1] Franka Miriam Brückler, *π prije nego se za njega znalo*, Osječki matematički list **21**(2) (2021), 151–161.

[2] Lam Lay Yong, *Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art): An Overview*, Archive for History of Exact Sciences **47**(1) (1994), 1–51

[3] Lam Lay Yong, *The Geometrical Basis of the Ancient Chinese Square-Root Method*, Isis **61**(1) (1970), 92–102

[4] Kangshen Shen, John N. Crossley, Anthony W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*, Oxford Univ. Press, 1999.

[5] Randy K. Schwartz, *A Classic from China: The Nine Chapters*. https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/a-classic-from-china-the-nine-chapters-introduction-and-history, pristupljeno 18. 5. 2022.

[6] Hans Wußing, 6000 *Jahre Mathematik* (Band 1), Springer, 2008.

[7] MacTutor History of Mathematics Archives: The Ten Mathematical Classics. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Ten_classics/, pristupljeno 20. 5. 2022.