Pregledni članak UDK: 141.131:5(045)
doi: 10.21464/fi42108
Primljeno 5. 1. 2021.

Vladimir Drekalović
Univerzitet Crne Gore, Filozofski fakultet, Danila Bojovića bb, ME–81400 Nikšić
drekalovicv@gmail.com

Je li jedan platonistički argument ugrožen »slabim« objektivitetom matematike?

Sažetak

Godine 2020. Daniele Molinini objavio je članak u kojem je naznačio dvije vrste matematičkog objektiviteta. Moglo bi se reći da je ovim člankom Molinini ne samo terminološki i sadržajno odvojio dva matematička koncepta nego je u jednom smislu i suprotstavio dva matematičko-filozofska konteksta, tradicionalno-idealistički i suvremeno-praktični. Budući da je prvi kontekst bio teorijska osnova velikom broju analiza koje nalazimo u okviru filozofije matematike, sada se otvorio prostor za to da se takve analize preispitaju i u okruženju drugog konteksta. Konkretnije, u vezi s drugim kontekstom, analizirat ćemo snagu jednog od rijetkih eksplicitnih platonističkih argumenata (»Pojačani argument neizostavnosti«) pomoću kojega se pokušava opravdati ontološki status matematičkih objekata i središnja tvrdnja matematičkog platonizma o postojanju matematičkih objekata.

Ključne riječi

matematički platonizam, matematički objektivitet, pojačani argument neizostavnosti, Alan Baker, Daniele Molinini

1. Uvod[1]

Matematika je kroz povijest bila uzor mnogim prirodnim, ali i nekim društvenim znanostima svojom preciznošću, egzaktnošću i deduktivnom metodom. Postupak je izgrađivanja njezinih teorija, poput geometrije ili teorije skupova, bio metodološki ideal kojem su težile mnoge znanosti. Matematički objektivitet, predočen kroz sadržaje različitih matematičkih teorija, dobio je, ne samo za laičku javnost, status nesumnjivog, nepogrešivog i egzaktno opisanog stanja stvari. Kako je poznato, neki predstavnici društveno-humanističkih znanosti također su pokušavali osigurati ovakav status svojim znanostima.[2]

Daniele Molinini je 2020. godine objavio članak u kojem je naznačio dvije vrste matematičkog objektiviteta, dajući tako vlastiti doprinos rušenju laičkog mita o matematici kao skupu (isključivo) savršenih teorija koje bez izuzetka čine nesporne i apsolutne tvrdnje (Molinini 2020). Moglo bi se reći da je ovim člankom Molinini ne samo terminološki i sadržajno odvojio dva matematička koncepta nego je u jednom smislu suprotstavio dva matematičko-filozofska konteksta, tradicionalno-idealistički i suvremeno-praktični. Budući da je prvi

1
Članak je nastao kao rezultat rada na projektu *Filozofija znanosti: znanstveni opis svijeta, mogućnosti i doseg spoznaje*, koji financiraju ministarstva znanosti Crne Gore (Ministarstvo prosvjete, nauke, kulture i sporta) i Slovenije (Ministarstvo za izobraževanje, znanost in šport) u 2021. i 2022. godini.

2
Na primjer, filozofi Bečkog kruga i sociolozi pozitivizma između dva svjetska rata.

kontekst bio teorijska osnova velikom broju analiza koje nalazimo u okviru filozofije matematike, sada se otvorio prostor da se takve analize preispitaju i u okruženju drugog konteksta. Konkretnije, u vezi s drugim kontekstom analizirat ćemo snagu jednog od rijetkih eksplicitnih platonističkih argumenta kojim se pokušava opravdati ontološki status matematičkih objekata i središnje tvrđenje matematičkog platonizma o postojanju matematičkih objekata. Riječ je o takozvanom pojačanom argumentu neizostavnosti (*Enhanced Indispensability Argument* – nadalje EIA), koji je formulirao Alan Baker (2009).

2. Jaki i slabi objektivitet matematike

Matematiku kao istraživačku oblast obično ne svrstavamo u prirodne znanosti, ali riječ je o disciplini *par excellence* o čijem se objektivitetu opravdano može govoriti. U nematematičkoj literaturi, kao i u laičkoj javnosti, mogu se naći primjeri kojima se egzaktnost i realnost matematike pokušavaju ilustrirati činjenicama poput one da je »u matematici uvijek 2 + 3 = 5«, najčešće kada se ta egzaktnost ističe nasuprot metodologijama nekih društvenih znanosti u kojima su mogući različiti opravdani opisi istog problema, ma koliko taj problem izgledao trivijalno.[3]

Matematički platonizam osnova je na kojoj bi se moglo govoriti o matematičkom objektivitetu. Argumente kojima se opravdava metafizička slika o postojanju matematičkih objekata i istina koje se odnose na njih, u okviru opće Platonove teorije o idejama, nalazimo u dijalogu *Menon* (82b–85b). Prema toj slici, postojanje matematičkih objekata i činjenica koje se odnose na njihove osobine i njihove međusobne relacije apsolutna je stvar, neovisna o bilo kakvim promjenljivim činiocima ili osobnim mogućnostima i sposobnostima istraživača. Ovakav objektivitet bio bi ilustracija onoga što Molinini naziva *jakim* matematičkim objektivitetom (JMO).

»Ovaj pojam objektiviteta […] obično je korišten za prikaz matematike kao skupa neovisnih, apsolutnih i nužnih istina. Suglasno takvoj karakterizaciji, za razmatranje sadržaja matematičkog znanja kao vrste objektiviteta neophodno je prihvatiti realističku poziciju (realizam u vezi s istinitošću ako smatramo da je istinosna vrijednost rečenica matematičke teorije neovisna o našoj sposobnosti da ih utvrdimo; realizam u ontologiji ako smatramo da je ontologija matematičkog diskursa neovisna o našem znanju matematike). Nazovimo ovo ‘jakim objektivitetom’.« (Molinini 2020, 154)[4]

S druge strane, *slabi* matematički objektivitet (SMO) ne ovisi o apsolutnim matematičkim istinama.

»Stoga je moja teza: matematička praksa ograničava matematičko znanje, ali kroz proces unakrsne provjere, to znanje opisuje više ili manje objektivnosti. Ova vrsta objektiviteta slab je oblik objektiviteta (u usporedbi s jakim oblikom objektiviteta koji ovisi o ontologiji i apsolutnoj istini). On ovisi o subjektima jer subjekti provode praksu. Pa stoga ovaj objektivitet nije neovisan o subjektu u apsolutnom smislu. Ipak, matematičari dijele praksu, pa ih stoga treba smatrati djelomično neovisnima o pojedinačnom subjektu. Ista autonomija vrijedi i za unakrsne provjere: unakrsne provjere vrše se interno (unutar matematike) ili izvana (primjenom matematike u znanosti), ali orijentirane su prema praksi. Dakle, na ovom (slabom) pojmu objektivnosti matematičko znanje nije ni proizvoljno ni ‘subjektivno’ (npr. samo u odnosu na pojedinca).« (Molinini 2020: 156–157)

Prethodni odlomak svojim sadržajem donosi nekoliko pitanja i terminoloških nejasnoća koje bi bilo dobro dodatno pojasniti.[5] Prvo, kada Molinini kaže da »matematička praksa ograničava matematičko znanje«, tada bismo ovu konstrukciju mogli shvatiti na sljedeći način: matematička praksa određuje granice matematičkog znanja i ništa izvan te prakse ne može se smatrati matematičkim znanjem. Drugim riječima, želimo li znati što je matematičko znanje, potrebno je pogledati što je matematička praksa. Drugo, kako razumjeti stav prema kojem neki objektivitet »ovisi o subjektima jer subjekti provode praksu. Pa stoga ovaj objektivitet nije neovisan o subjektu u apsolutnom smislu, ali kroz proces unakrsne provjere to znanje opisuje više ili manje objektivnosti«? Konačno, kako u ovom kontekstu razumjeti značenje termina »objektivitet«? Termin (matematički) *objektivitet* u ovom se kontekstu može približno shvatiti sinonimno terminu (matematički) *realitet*. Koristeći se njime, imamo na umu stvarnost koju čine svi matematički entiteti/objekti i njihove karakteristike, relacije među tim entitetima, kao i sve strukture i teorije koje se odnose na takve entitete. Ukoliko SMO ovisi o praksi, utoliko ovisi i subjektima koji tu praksu provode, odnosno, nije neovisan o takvim subjektima. Bez obzira na takvu ulogu subjekta u razumijevanju SMO-a, činjenica da se čitav proces stvaranja/otkrivanja matematičkog objektiviteta korištenjem egzaktne metodologije u vidu deduktivne izgradnje matematičkih teorija neprestano preispituje egzaktnim metodama provjere daje ipak značajnu notu objektivnosti čitavom konceptu SMO-a, daleko od bilo kakvih proizvoljnosti, trenutnih subjektivnih utjecaja itd. Postignuti se matematički rezultati u praksi provjeravaju egzaktnom metodologijom na razini cijele matematičke zajednice, a rezultati dobiveni u okviru pojedinih matematičkih teorija provjeravaju se s obzirom na koherentnost koja postoji u odnosu na već postignute rezultate iz drugih matematičkih teorija.

Dakle, SMO jedne matematičke teorije odnosio bi se na njenu konzistentnost i koherentnost u odnosu na druge matematičke i uopće znanstvene teorije. Opravdanje matematičke teorije, to jest iskaza koji je čine, temelji se na njenoj suglasnosti s drugim teorijama, njenoj plodnosti, to jest mogućnosti da takva teorija bude osnova za razvoj što većeg broja novih teorija, kao i njenoj primjenjivosti u oblasti prirodnih znanosti i fizičkog svijeta. Takva ideja opravdanja matematičke stvarnosti nije nova i može se u literaturi naći kao oblik neformalnog opravdanja aksiomatizacija pojedinih matematičkih teorija (Gödel 1983, 477, 485; Maddy 1990, 120). Kažimo koju riječ više o dvije vrste objektiviteta.

Prema konceptu JMO-a, matematički objekti, njihove međusobne relacije i istine o njima postoje u apsolutnom smislu, neovisno o bilo kakvim činiocima kao što su spoznajne mogućnosti istraživača-matematičara, subjektivno-objektivna ograničenja koja oni mogu imati u istraživanju, mogućnosti da neki od tih objekata i tvrdnji o njima nikada ne budu otkriveni. Bez obzira o kojoj verziji JMO-a govorili, onoj koja je metafizička, i koja nadahnuta

3
Uzgred, podsjetimo da gornji laički iskaz koji se odnosi na matematičke istine, ustvari, nije točan. Naime 2+3=5 je točno ako promatramo grupoid (N, +), ali takav iskaz ne bi bio točan, na primjer, u grupoidu (Z_4, +), gdje je Z_4 skup ostataka koji se mogu dobiti kada cijele brojeve dijelimo s 4.

4
Na ovom i svim narednim mjestima na kojima je citirana izvorna literatura prijevod je napravio autor ovog članka.

5
Zahvaljujem anonimnim recenzentima čije su mi sugestije pomogle da ovaj članak učinim boljim. Posebnu zahvalnost dugujem jednom od njih koji mi je ukazao na nejasnoće u upravo citiranom odlomku.

Platonovom teorijom o svijetu Ideja i sjećanju na taj svijet (*Menon* 81d, 86a) govori o posebnom prostoru originala svih matematičkih objekata, ili onoj koja ne sadrži imperativ postojanja nad-fizičke pozadine matematičkih objekata i činjenica, već samo stavlja naglasak na ontološki status matematičkih objekata koji potencijalno mogu, ali ne moraju biti otkriveni, svaka od njih svojim sadržajem opisuje opću ideju apsolutnog objektiviteta. Ontološki je status matematičkih objekata prema JMO-u nesumnjiv bez obzira na to hoće li postojati pokušaj da se taj status osnaži i učini dijelom Platonove vizije koja govori o arhetipovima svih objekata fizičkog svijeta, pa i matematičkih, ili će taj status biti rezultat zrenja i hladne intuicije matematičara oslobođene bilo kakvih metafizičkih primjesa.[6]

Kada je riječ o SMO-u, naglasak nije na apsolutno-egzistencijalnom karakteru matematičkih objekata i tvrdnji o njima, već na umreženo-potpornom karakteru matematičkih teorija koje potvrdu svojeg realiteta dobivaju iz kompatibilnosti s drugima matematičkim i nematematičkim oblastima, kao i primjenom koju imaju u njima. Pojedine teorije unutar matematike izgrađene su na dostignućima drugih teorija. Na primjer, poznato je da je teorija skupova svojim pojmovnim aparatom poslužila kao osnova za izgradnju većine matematičkih teorija. S druge strane, pojedine teorije unutar matematike imaju primjene u drugim teorijama. Uzmimo primjere kompleksne analize i diferencijalne geometrije čiji se rezultati koriste za dokaze tvrđenja u algebri. Na primjer, poznato je više dokaza osnovnog teorema algebre korištenjem rezultata dvije spomenute teorije (vidi: Schep 2009; Almira i Romero 2012). Također, poznato je da je široka lepeza primjene matematičkih rezultata u različitim područjima van matematike, a koje su odigrale značajnu ulogu u općem razvoju znanosti. Neke od tako primijenjenih matematičkih teorija stvorene su namjenski, s jasnim ciljem da budu primijenjene u konkretnim izvanmatematičkim područjima.[7] U drugu ruku, neke matematičke teorije stvorene su bez ikakvog konkretnog praktičnog cilja u vezi s primjenom u izvanmatematičkim oblastima, ali su stjecajem okolnosti s vremenom postale primjenjive, krucijalno mijenjajući izgled čovječanstva.[8] Bez obzira je li riječ o namjenski ili nenamjenski stvorenoj matematičkoj teoriji, je li riječ o matematičkoj teoriji koja se primjenjuje interno u matematici ili eksterno van nje,[9] takva matematička teorija, među ostalim, crpi svoj realitet iz vlastitog intersubjektivnog karaktera. Njena valjanost, legitimitet i objektivitet opravdani su preciznim procedurama koje se odnose na praktičnu primjenjivost i međuteorijsku povezanost. Bilo da je teorija primjenjiva u matematičkom ili u izvanmatematičkom svijetu, te su procedure prihvaćene i verificirane na razini matematičke, to jest matematičko-znanstvene zajednice. Stvarnost takve matematičke teorije nije određena isključivo individualnim stavom bilo kojeg pojedinačnog matematičara-znanstvenika, nego je plod općeg stručnog konsenzusa unutar struke.

Može li se govoriti o neovisnosti koncepata JMO i SMO ili su oni na neki način povezani i povlače jedan drugog? Je li moguće govoriti o ideji SMO-a bez JMO-a i obrnuto, to jest bi li netko dosljedno i konzistentno mogao prihvatiti samo jedan od ta dva objektiviteta? Koncept SMO-a je realitet koji u praksi prihvaća većina matematičara. Drugim riječima, to je način na koji najveći broj matematičara razumije matematički svijet. Matematički objekti i tvrdnje unutar jedne matematičke teorije *ne postoje* izolirano i neovisno od ostalih objekata i tvrđenja te teorije. Objekti svoje postojanje duguju drugim objektima jer se svaki novi objekt određuje kao neka vrsta veze među već definiranim objekatima, a karakteristike svakog objekta opisuju se kroz relacije prema drugim objektima. Na primjer, u euklidskoj geometriji možemo odrediti pojam paralelograma pomoću pojma četverokuta i pojma paralelnosti: paralelogram je četverokut čije su suprotne stranice paralelne (Borceux 2014: 60).[10] S druge strane, sustav tvrđenja unutar teorije izgrađuje se deduktivno, to jest, svako tvrđenje oslanja se na ranije izvedena tvrđenja.[11] Na primjer, u teoriji vjerojatnosti takozvana Schwarzova nejednakost može se dokazati uz pomoć ranije dokazanih činjenica kojima se karakteriziraju odnosi slučajnih promjenljivih varijabli (Ash 2008, 119). Slično, pojedinačne matematičke teorije unutar cjelokupnog tijela matematike ne postoje izolirano i neovisno jedna o drugoj. Bez obzira na stupanj neovisnosti koji proizvoljna matematička teorija T_i ($i = 1, 2, \ldots, k$; $k \in N$) može imati u odnosu na ostale matematičke teorije, ona će u nekom trenutku svojeg razvoja, ako ne već od samog svojeg nastanka, posegnuti za dostignućima druge teorije T_j ($j \neq i$) ili će neka treća teorija T_s ($s \neq i$) iskoristiti i primijeniti rezultate koje je već dostigla teorija T_i. Značajan broj matematičkih teorija nije primjenjiv samo u drugim matematičkim teorijama nego i u različitim znanstvenim teorijama. Na primjer, poznate su mnoge primjene diferencijalnih jednadžbi, integralnog računa i geometrije u fizici, strojarstvu i elektrotehnici. Korištenje dostignuća vjerojatnosti i statistike već odavno nije ekskluzivitet prirodnih i tehničkih znanosti.

Dakle, SMO je koncept koji matematičku stvarnost izgrađuje na sustavu teorijsko-praktičnog međuprovjeravanja i primjene između pojedinih matematičkih teorija, ali i između matematičkih i znanstvenih teorija. Ovaj vid shvaćanja matematičke realnosti, čini se, ne uključuje kao obavezujuću ideju o *apsolutnom* postojanju matematičkih teorija i njihovih tvrdnji. U takvom sustavu stalnih međuprovjeravanja i međupotvrđivanja prirodno je da se događaju greške, opovrgavanja i poboljšavanja tvrdnji (Molinini 2020, 159). Moglo bi se reći da je SMO »razvojna« slika matematičke stvarnosti – matematičke stvari postoje ako su izgrađene u deduktivnoj izgradnji unutar konkretne teorije. Pitanje o tome jesu li takve stvari postojale u nekom smislu prije nego što su definirane/dokazane, ovisno o tome radi li se o objektima ili tvrđenjima, matematičara ne opterećuju previše. Realitet takvih objekata postoji od trenutka njihovog formalnog određenja i može biti samo pojačan primjenama u drugim matematičkim i izvanmatematičkim oblastima.

6
O različitim platonističkim aspektima u matematici vidi: Drekalović 2015.

7
Na primjer, grupa mađarskih logičara napravila je rekonstrukciju specijalne teorije relativnosti kroz logičku aksiomatizaciju. Izgradnja takve matematičke teorije učinjena je s jasnim ciljem matematičke aksiomatizacije fizičke teorije. Vidi više u: Andréka *et al*. 2002; Madarász *et al*. 2006.

8
George Boole je postavio osnove Booleove algebre u 19. stoljeću. Stoljeće kasnije ta je algebra iskorištena kao temelj na kojem se informacijska tehnologija počela razvijati. Vidi više, na primjer, u: Löwdin 1992; Whitesitt 2012.

9
Ovakva gradiranja u vezi sa SMO-om nalazimo u: Molinini 2020.

10
Na ovom mjestu kažemo »*možemo* definirati« jer postupci definiranja pojmova nisu jedinstveni, što ovisi o metodološkom pristupu u zasnivanju teorije. Izuzetak su aksiomi ako je u pitanju aksiomatski utemeljena teorija.

11
Autor ovog članka svjestan je da konstrukcija »eksplanatorna uloga« ne zvuči kao najbolji prijevod, ali u ovom trenutku nije mogao naći bolji prijevod za englesku sintagmu *explanatory role*.

3. Koji je oblik objektiviteta konzistentan s EIA-om?

Druga je premisa EIA-a tvrđenje koje se, opće govoreći, odnosi na ulogu matematike u objašnjenju znanstvenih teorija. Tom premisom tvrdi se da su matematički objekti neizostavni za objašnjenje znanstvenih teorija. U tom bi kontekstu bilo korisno vidjeti o kojem je shvaćanju matematičkog objektiviteta u ovom slučaju moguće govoriti, o slabom ili jakom, to jest na koju se od tih dviju vrsta objektiviteta može misliti kada se govori o eksplanatornoj ulozi[12] matematike u znanosti. Podsjetimo na formulaciju EIA-a:

»(1) Moramo racionalno vjerovati u postojanje bilo kojeg entiteta koji igra neizostavnu eksplanatornu ulogu u našim najboljim znanstvenim teorijama.

(2) Matematički objekti igraju neizostavnu eksplanatornu ulogu u znanosti.

(3) Dakle, moramo racionalno vjerovati u postojanje matematičkih objekata.« (Baker 2009, 613)

Tumačeći drugu premisu doslovno, mogli bismo reći da se ovom pretpostavkom tvrdi da su matematički objekti neophodni da bi se objasnile znanstvene pojave.[13] Drugim riječima, bez matematičkih objekata nije moguće objasniti znanstvene pojave. Baker i Molinini stavljaju, ipak, značenje ove tvrdnje u nešto širi kontekst. Ideja koja leži u pozadini druge premise EIA-a nije ta da su *matematički objekti* sami za sebe neizostavni za znanstvena objašnjenja, već neizostavna eksplanatorna uloga pripada *matematičkim teorijama* koje sadrže te objekte.[14] Zaista, nije sasvim jasno kako bismo mogli govoriti o neizostavnoj eksplanatornoj ulozi *pojedinačnih* matematičkih objekata kao što su kompaktni skupovi, realne funkcije ili beskonačnodimenzionalni prostori ne uzimajući istovremeno u obzir i sve relacije prema drugim objektima. Prije bi imalo smisla govoriti o eksplanatornoj pa i o neizostavnoj eksplanatornoj ulozi odgovarajućih matematičkih modela i teorija kojima su opisani uloga i karakteristike pojedinačnih objekata.

Suglasno s SMO-om, slika matematičke realnosti *ovisi* o međuprovjerljivosti, međupotvrdljivosti i primjenjivosti matematičkih teorija, kako ona interna unutar matematike, u drugim matematičkim teorijama, tako i ona eksterna, van matematike, u drugim znanstvenim i uopće ne-matematičkim teorijama. Ona nema apsolutan status, nije savršena i završena, već u okolnostima stalnog međuprovjeravanja može biti pogrešiva, pa prema tome i popravljiva. Podložna je promjenama koje se odnose na proširenje i obogaćivanje te realnosti, ali i promjenama kojima se neki prethodni i do jednog trenutka prihvaćeni rezultati nakon nekog vremena popravljaju, odbacuju ili zamjenjuju. Ova slika matematičke realnosti ne odgovara laičkom shvaćanju matematike prema kojem je matematika prostor u kojem možemo naći samo nesporne i nesumnjive tvrdnje čija pouzdanost ničim ne može biti dovedena u pitanje. Ipak, što je relevantno na ovom mjestu, to je slika koja je bliska matematičkoj praksi, iskustvima matematičara koji dolaze do određenih teorema i teorija, te načinu na koji u stvarnosti funkcionira matematička zajednica čiji članovi stvaraju konkretne rezultate.

U povijesti matematike moguće je naći mnogo primjera koji ilustriraju prethodnu sliku matematičke realnosti. Podsjetimo na neke od njih. U drugoj je polovini 20. stoljeća pronađen kontraprimjer kojim je pokazano da je Eulerova hipoteza o sumi potencija, koju je Euler formulirao u 18. stoljeću, netočna (Lander i Parkin 1966). Podsjetimo, u hipotezi se tvrdi da je, za prirodan broj n veći od 2, potrebno najmanje n pribrojnika reda n da bi suma bila potencija n-tog reda. Bilo je potrebno više od jednog stoljeća da teorem četiriju boja, formuliran kao hipoteza krajem 19. stoljeća, bude konačno dokazan. U međuvremenu, pojavljivali su se različiti dokazi ove pretpostavke, ali je njihova valjanost nakon određenog perioda bivala osporena. Dokaz teorema četiriju boja koji je danas »na snazi« izveden je uz pomoć računala, zbog čega se njegova valjanost uvjetno prihvaća kada je u pitanju status tradicionalno izvedenog dokaza.[15] Više od jednog stoljeća bilo je potrebno i da se dobije valjan dokaz teorema o Lagrangeovim množiteljima, koji je kao hipoteza formuliran krajem 19. stoljeća. Na kraju je dobiven, iz sadašnje perspektive govoreći, konačan dokaz kojim su prevladani nedostaci svih do tada postojećih dokaza.[16] Konačno, podsjetimo na dva vjerojatno najpoznatija matematička tvrđenja čija valjanost, pa time i uloga u matematičkoj teoriji, do danas nisu sasvim raščišćeni – aksiom izbora i hipoteza kontinuuma.

Može li se u kontekstu SMO-a smisleno govoriti o opravdanosti druge premise EIA-a, a time i čitavog argumenta? Prvo, nevezano za EIA-a, ovakva slika matematičke realnosti izravno utječe na moć, reputaciju i pouzdanost svih matematičkih primjena u znanosti, kako prošlih tako i budućih, bez obzira imaju li one i u kojem stupnju imaju eksplanatorni ili neki drugi karakter. Naime, budući da su matematičke tvrdnje u sustavu međuprovjeravanja, ma koliko to rijetko bilo, podložne promjenama, opovrgavanjima i reviziji, slično kao i znanstvene, postavlja se pitanje o tome kako je potrebno tretirati primjene matematičkog alata u znanosti koje su već učinjene u prošlosti. Uz pomoć matematičkih pomagala izvedene su, i izvodit će se, različite znanstvene pretpostavke i tvrdnje koje su bile, i u budućnosti će biti, osnova za dalju izgradnju pojedinačnih znanosti. Je li time, uzimajući u obzir SMO i popravljivi karakter matematike, narušena pouzdanost čitavog znanstvenog sustava?

Čak i da nam nije poznat nijedan primjer primjene u znanosti nekog »problematičnog« matematičkog alata, možemo li na osnovi dosadašnjih spoznaja o popravljivom karakteru matematike biti sigurni da takva primjena već nije učinjena ili neće biti učinjena u budućnosti? Branioci SMO-a i takve matematičke uloge za znanost mogli bi iskoristiti jednostavan i razumljiv argument kao odgovor na prethodno pitanje: nije matematika jedina oblast čiji rezultati bivaju pozajmljeni da bi se objasnile znanstvene pojave i, konačno, sustav znanosti i svih duhovnih oblasti unutar kojih se izvode istraživanja neka je vrsta živog organizma koji je sastavljen od mnogo oblasti od kojih nijedna nije u apsolutnom smislu savršena, već se kroz povijest usavršava i nadograđuje. Ovaj bismo odgovor mogli prihvatiti kao odgovarajući kada matematika ne bi imala specijalan status u sustavu znanosti koje su se razvijale kroz povi-

12
Očigledno je da druga premisa EIA-a ima logički nepreciznu formulaciju kada su u pitanju kvantifikatori. Tako nismo sigurni misli li se u ovoj tvrdnji na *neke* ili na *sve* matematičke objekte. Budući da ovaj detalj nije krucijalan za našu raspravu, u daljnjoj razradi mu nećemo posvećivati pažnju. Za više detalja o ovom problemu vidi: Drekalović 2019.

13
Iako u formulaciji druge premise EIA-a eksplicitno stoji da su *matematički objekti* eksplanatorno neizostavni za znanost, postoje razlozi na osnovi kojih možemo reći da je kontekst u kojem se govori o neizostavnoj eksplanatornoj ulozi značajno širi i da možemo govoriti o neizostavnosti *matematičke aparature*, *matematičkih teorija* i *matematike*. Vidi više u: Baker 2009, 614–615; Molinini 2014, 409.

14
Za više o okolnostima koje su pratile dokaz teorema četiri boje vidi: Wilson 2013.

15
O povijesti ovog slučaja vidi: Goldstine 1980.

16
Više detalja o problemu i njegovom rješenju vidi u: Hales 2001; Morgan 1999.

jest civilizacija. Ona je, ne bez razloga, od antike do danas imala posebnu i privilegiranu poziciju u sustavu znanosti. Bila je uzor, među ostalim, svojom deduktivnom metodologijom i formalnom čistoćom ne samo prirodnim nego i društvenim znanostima. U takvim okolnostima, uzimajući u obzir fundamentalnu poziciju matematike u sustavu svih znanosti, pitanja matematičkih poboljšanja ili matematičkih grešaka više nisu samo matematička pitanja nego i pitanja od općeznanstvenog značaja koja se tiču opće znanstvene utemeljenosti i pouzdanosti.

Drugo, što je bitno za ovaj članak, uzimajući u obzir opisani karakter matematičke stvarnosti, vodeći računa o njenoj nesavršenosti, popravljivosti itd., druga premisa EIA-a biva dovedena u pitanje, a time i čitav argument. Drugom se premisom tvrdi da matematički objekti, uključujući njihove karakteristike i međusobne veze koje su opisane tvrdnjama konkretne matematičke teorije, igraju neizostavnu eksplanatornu ulogu u znanosti. Ali kako matematički objekt O kojem se pripisuju osobine F_1, F_2, … , F_n, a koje se opisuju tvrđenjima P_1, P_2, … , P_n može biti eksplanatorno neizostavan za znanost ako opravdanost neke tvrdnje P_i ($i \in \{1, 2, \ldots , n\}$), koja je iskorištena za znanstveno objašnjenje u znanstvenoj disciplini S, može biti dovedena u pitanje? Objekt O ne samo da nije eksplanatorno neizostavan nego on nije ni eksplanatorno neutralan. On je onda eksplanatorno štetan za znanost jer primjena tvrdnje P_i kojom se opisuje navodna osobina F_i objekta O u znanosti S može usmjeriti istraživanje u znanosti S u pogrešnom smjeru od trenutka kada je P_i iskorištena i primijenjena. Na primjer, prije dvadesetak je godina uz pomoć matematike riješen problem pčelinjeg saća (*honeycomb problem*), star više od dvadeset stoljeća.[17] Matematičko objašnjenje tog problema bilo je vjetar u leđa još jednom konkretnom argumentu u prilog evolucionističkoj tezi u biologiji – vrste koje su bolje prilagođene uspijevaju opstati prije nego one koje biraju ekstenzivniji način u praktičnoj organizaciji vlastitih staništa. Za sada u matematičkoj literaturi nemamo razloge da sumnjamo u rješenje tog problema koje je u ovom trenutku valjano za matematičku zajednicu. I dalje vjerujemo da je pravilni šesterokut optimalno izabran pravilan poligon kada je u pitanju minimizacija njegovog obima. Ali ako bi se kojim slučajem, kao u ranije spomenutim primjerima, iz skorije matematičke povijesti pokazalo da rješenje sadrži bilo kakve manjkavosti, to bi dovelo u pitanje ne samo konkretnu matematičku tvrdnju nego bi to istovremeno bio barem jedan argument manje u prilog biolozima-evolucionistima. U tom slučaju, matematički objekti koji su dio aparature korištene u dokazu ne samo da ne bi bili neizostavni za znanost nego bi pogrešna matematička dostignuća u vezi s njima bila štetna za znanost. Mi, ustvari, u kontekstu SMO-a, kada su u pitanju složenije matematičke teorije, ne možemo govoriti o garancijama za apsolutnu pouzdanost matematičkih tvrdnji, pa time ne možemo imati ni potpuno opravdanje za drugu premisu EIA-a. Ona možda može biti prihvaćena samo uvjetnom obliku:

Matematički objekti imaju neizostavnu objašnjavalačku ulogu u znanosti, uz uvjet da tvrdnje kojima su opisane njihove osobine ne mogu biti dovedene u pitanje.

Ovo, međutim, nije ništa drugo nego kontekst JMO-a, to jest oslanjanje na apsolutnu realnost matematičkih objekata. Dakle, u jednu ruku, čini se da drugu premisu EIA-a, pa tako ni čitav argument nije smisleno promatrati u kontekstu SMO-a. Kao da je EIA zamišljen kao argument koji ima smisla promatrati samo u kontekstu JMO-a, u pretpostavljenom idealnom okruženju nespornih matematičkih istina, koje bi onda kao takve, apsolutne, neoborive i nesporne, bile iskorištene u znanosti. Takvo bi okruženje podrazumijevalo neku idealnu ontologiju u kojoj ne bi bilo niti prostora za rasprave o nesavršenstvu praktičnog matematičkog djelovanja koje rađa matematičke rezultate, niti prostora za problematiziranje takvih rezultata. EIA bi onda bio moćan alat koji bi mogao računati upravo na idealnu sliku matematike kao skupa nesumnjivih i čvrstih rezultata na koje je čvrsto moguće osloniti znanost. Međutim, u vezi s tim postoji problem. Naime, primjeri kojima se pokušava ilustrirati istinitost druge premise argumenta nisu dio nekog idealnog, metafizičkog matematičkog prostora, već naprotiv, sadržaj koji je dio svakodnevne matematičke prakse podložne korekcijama i poboljšanjima, dakle, konteksta SMO-a. U literaturi nalazimo mali broj takvih primjera kojima se ilustrira eksplanatorna uloga matematike u znanosti (Pincock 2012, 205–206; Colyvan 2018; Colyvan 2012, 103–108). Bez obzira na to koriste li se u njima rezultati teorije brojeva, teorije grafova ili neke treće teorije, svi takvi rezultati, ma koliko njihovi dokazi u okviru matematičke zajednice imali status sigurnih i nesumnjivih argumenata u ovom trenutku, dio su matematičke prakse koja je podložna ispravcima i usavršavanju. Drugim riječima, ne postoje garancije da bilo koji od tih dokaza ne može doživjeti sudbinu kakvu su imali, na primjer, osporeni dokazi teorema četiriju boja ili teorema o Lagrangeovim množiteljima.

4. Zaključak

EIA jedan je od rijetkih eksplicitno definiranih argumenata ne samo matematičkih platonista nego i platonista uopće. On je postavljen tako da njegova snaga značajnim dijelom izvire i oslanja se ne na filozofske, nego na matematičko-znanstvene argumente. Dakle, jedan filozofski argument utemeljen je na, pretpostavlja se, idealnoj snazi matematičkih teorija i na njihovoj eksplanatornoj ulozi u znanosti. U takvoj argumentaciji ne bi trebao postojati prostor u okviru kojeg bi snaga matematičke metodologije, argumentacije i njenih iskaza bila dovedena u pitanje. Ako bi bilo dozvoljeno suprotno, snaga EIA-a bi bila slabašna. Zasnivati filozofsku tvrdnju o postojanju matematičkih objekata na iskazima za koje nemamo potpunu garanciju, makar oni bili i matematički, ne bi bilo pretjerano obećavajuće.

Iz prethodnih razloga zaključujemo da je EIA-a moguće smisleno promatrati i filozofski korisno upotrijebiti jedino u idealnom matematičkom kontekstu, to jest u okviru prostora u kojem bi postojale isključivo nesporne tvrdnje kao dio matematičkih teorija. Uzimajući u obzir stvarne i praktične okolnosti u kojima matematičke teorije nastaju, razvijaju se, mijenjaju, ispravljaju i poboljšavaju, možemo reći da matematička stvarnost u kojoj matematička zajednica zaista stvara svoje rezultate nije pogodan teren na kojem bi se EIA primjenjivao. S jedne strane, to i nije veliki problem jer ni filozofiji, ni matematici idealizacije i idealizirana okruženja nisu strani. Međutim, s druge strane, budući da je ovaj filozofski argument oslonjen na praktičnu primjenu matematike u znanosti, što su zagovornici argumenta i oprimjerili konkretnim primjerima kroz literaturu, on ne bi trebao biti primjenjiv tek u idealno zamišljenom ambijentu matematičkih istina, već upravo u prostoru kojim je inspiriran. To je prostor praktičnog matematičkog stvaranja i primjene matematičkih rezultata u znanosti. Kako smo vidjeli, podsjećajući na neke činjenice vezane za rađanje konkretnih matematičkih rezultata, taj prostor nije neka idealno-metafizička domena nepogrešivih tvrdnji, već se radi o uzbudljivom znanstvenom polju unutar kojeg se ponekad prave nevaljani koraci dok se konačno ne dođe do iskaza koji je »trenutno« valjan i koji će do daljnjeg biti na snazi. Pri tome, kada su u pitanju složenija dostignuća i kompliciraniji dokazi, nemamo garanciju da takav rezultat u budućnosti ne bi mogao biti opovrgnut. Dakle, možemo zaključiti da je EIA s obzirom na prirodu svoje argumentacije i motive autora koji ga je definirao, konstruiran za upotrebu u kontekstu SMO-a, ali, kako smo vidjeli, okruženje SMO-a taj argument ne čini pouzdanim alatom za platoniste.

Literatura

Almira, Jose M.; Romero, Alfonso (2012): »Some Riemannian Geometric Proofs of the Fundamental Theorem of Algebra«, *Differential Geometry – Dynamical Systems* 14 (2012), str. 1–4.

Andréka, Hajnal *et al.* (2002): *On the Logical Structure of Relativity Theories*, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budimpešta.

Ash, Robert B. (2008): *Basic Probability Theory*, Dover Publications, New York.

Baker, Alan (2009): »Mathematical Explanation in Science«, *British Journal of Philosophy of Science* 60 (2009) 3, str. 611–633, doi: https://doi.org/10.1093/bjps/axp025.

Borceux, Francis (2014): *An Axiomatic Approach to Geometry*, Springer, New York.

Colyvan, Mark (2018): »The Ins and Outs of Mathematical Explanation«, *The Mathematical Intelligencer* 40 (2018) 4, str. 26–29, doi: https://doi.org/10.1007/s00283-018-9799-1.

Colyvan, Mark (2012): *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Drekalović, Vladimir (2019): »Is the Enhanced Indispensability Argument a Useful Tool in the Hands of Platonists?«, *Philosophia* 47 (2019) 4, str. 1111–1126, doi: https://doi.org/10.1007/s11406-018-0033-3.

Drekalović, Vladimir (2015): »Some Aspects of Understanding Mathematical Reality: Existence, Platonism, Discovery«, *Axiomathes* 25 (2015) 3, str. 313–333, doi: https://doi.org/10.1007/s10516-014-9253-8.

Goldstine, Herman H. (1980): *A History of the Calculus of Variations From the 17th through the 19th Century*, sv. 5, Springer, New York.

Gödel, Kurt (1983): »What is Cantor's Continuum Problem?«, u: Paul Benacerraf, Hilary Putnam (ur.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, str. 470–485.

Hales, Thomas C. (2001): »The Honeycomb Conjecture«, *Discrete and Computational Geometry* 25 (2001) 1, str. 1–22, doi: https://doi.org/10.1007/s004540010071.

Lander, L. J.; Parkin, T. R. (1966): »Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers«, *Bulletin of the American Mathematical Society* 72 (1966) 6, str. 1079, doi: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1966-11654-3.

Löwdin, Per-Olov (1992): »On Boolean Algebra and Its Importance for the Computer Sciences«, *International Journal of Quantum Chemistry* 42 (1992) 4, str. 719–726, doi: https://doi.org/10.1002/qua.560420412.

Madarász, Judit X.; Németi, István; Székely, Gergely (2006): »Twin Paradox and the Logical Foundation of Relativity Theory«, *Foundations of Physics* 36 (2006), str. 681–714. https://doi.org/10.1007/s10701-005-9041-9.

Maddy, Penelope (1990): *Realism in Mathematics*, Oxford University Press, New York.

Molinini, Daniele (2020): »The Weak Objectivity of Mathematics and Its Reasonable Effectiveness in Science«, *Axiomathes* 30 (2020), str. 149–163, doi: https://doi.org/10.1007/s10516-019-09449-8.

Molinini, Daniele (2014): »Evidence, Explanation and Enhanced Indispensability«, *Synthese* 193 (2014) 2, str. 403–422, doi: https://doi.org/10.1007/s11229-014-0494-2.

Morgan, Frank (1999): »The hexagonal honeycomb conjecture«, *Transactions of the American Mathematical Society* 351 (1999) 5, str. 1753–1763, doi: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02356-9.

Pincock, Christopher (2012): *Mathematics and Scientific Representation*, Oxford University Press, Oxford.

Schep, Anton R. (2018): »A Simple Complex Analysis and an Advanced Calculus Proof of the Fundamental Theorem of Algebra«, *The American Mathematical Monthly* 116 (2018) 1, str. 67–68, doi: https://doi.org/10.1080/00029890.2009.11920910.

Whitesitt, Eldon J. (2012): *Boolean Algebra and its Applications*, Dover Publications, Mineola (NY).

Wilson, Robin (2013): *Four colors suffice: how the map problem was solved*, Princeton University Press, Princeton.

Vladimir Drekalović

Is a Particular Platonic Argument Threatened by the “Weak” Objectivity of Mathematics?

Abstract

In 2020, Daniele Molinini published a paper outlining two types of mathematical objectivity. One could say that with this paper Molinini not only separated two mathematical concepts in terms of terminology and content, but also contrasted two mathematical-philosophical contexts, the traditional-idealistic and the modern-practical. Since the first context was the theoretical basis for a large number of analyses that we find in the framework of the philosophy of mathematics, the space was now offered to re-examine such analyses in the second context. More specifically, with respect to the second context, we will analyse the strength of one of the few explicit Platonic arguments (the “Enhanced Indispensability Argument”) that seeks to justify the ontological status of mathematical objects and the central claim of mathematical Platonism about the existence of mathematical objects.

Keywords

mathematical Platonism, mathematical objectivity, enhanced indispensability argument, Alan Baker, Daniele Molinini