

# PRIBLIŽNI POSTUPAK ODREĐIVANJA DINAMIČKIH KARAKTERISTIKA KONZOLE

Zlatko Maglajlić

Pregledni članak

U ovom radu su dane osnove Holzerovog postupka za određivanje kružnih frekvencija i oblika vibriranja okvira. Analiziran je i predložen postupak za određivanje dinamičkih karakteristika konzole koji se zasniva na Holzer-Myklestadovom postupku za grede. U danom postupku riješen je problem izbora okretanja vrha konzole pri vlastitim vibracijama tako da se na mjestu ukleštenja konzole uvijek dobiva okretanje koje je blisko nuli i odgovarajući pomak za izabranu vrijednost frekvencije. Postupak je pogodan za kontrolu rješenja dobivenih primjenom računala i u procesu usvajanja znanja studenata i početnika o dinamičkim karakteristikama konzolnih građevina.

**Ključne riječi:** oblici vibriranja, konzola, vlastite frekvencije, približni postupak

## Approximate procedure for determination of dynamic characteristics of the bracket

Subject review

The basis of Holzer's procedure for determination of frame natural frequencies and modes of vibration are presented in this paper. The method for determination of dynamic characteristics of the bracket which is based on Holzer-Myklestad procedure, is analysed and proposed here. In this procedure the problem of rotation the bracket end at natural vibrations is solved, so at the fixed end of the bracket, the rotation is approximately zero and corresponding displacement is always calculated for the selected frequency. This procedure is suitable for the control of results obtained using computers and in the teaching process of students and beginners on dynamic characteristics of the bracket structures.

**Key words:** Modes of vibration, bracket, natural frequencies, approximate procedure.

## 1 Introduction

### Uvod

Određivanje dinamičkih karakteristika građevinskih konstrukcija je vrlo važno kod analize utjecaja sila čiji se intenzitet mijenja s vremenom. Uzrok može biti vjetar, zemljotres, oprema s inercijskim silama, vibracije tla izazvane nekim uzrokom i druge. Vlastiti oblici i periodi vibriranja građevina mogu se odrediti metodama razrađenim u dinamici konstrukcija i primjenom računala. Postoje i približne metode kojima se s većim ili manjim odstupanjima mogu odrediti oblici i periode vibriranja kao što su: Holzerov, Stodola postupak, metoda redukcije masa i druge. Treba naglasiti da se primjenom Holzerovog postupka vlastite frekvencije vibriranja mogu odrediti neovisno jedne od drugih [1]. U građevinarstvu, kod analize vibriranja okvirnih konstrukcija najčešće se za grede može pretpostaviti velika krutost, za što je pogodan Holzerov postupak. Postupak za analizu vlastitih oscilacija greda, čije se mase pomjeraju i okreću, predložio je Myklestad. U literaturi se ovaj postupak naziva Holzer-Myklestadova metoda. Karakteristika ovog postupka je također neovisno određivanje vlastitih frekvencija sustava [1].

U ovom je radu na osnovu Holzer-Myklestadove metode opisan prijedlog postupka određivanja oblika i perioda vibriranja konzole s koncentriranim masama. Određivanje dinamičkih karakteristika konzole po predloženom postupku s manjim brojem masa može se riješiti kalkulatorom, dok je u primjeru s većim brojem masa pogodna primjena programibilnih kalkulatora ili računala.

## 2 Osnove nekih približnih metoda

### Basis of some approximate methods

Za ocjenu osnovnog perioda vibriranja konstrukcija

postoji više razrađenih približnih metoda čija se rješenja mogu odrediti primjenom kalkulatora (tzv. hand solution) [1-7].

Za sustav s jednim stupnjem slobode gibanja (jednom masom) frekvencija se određuje iz izraza

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta}} \quad (1)$$

gdje je  $m$  masa i  $\delta$  pomak konstrukcije uslijed jedinične sile u pravcu vibriranja mase. Ako se u općem slučaju razmatra greda s raspodijeljenom masom  $m(x)$  duž štapa duljine  $L$ , tada se reducirana masa određuje iz izraza jednakosti kinetičke energije sustava i tražene koncentrirane mase  $M$ .

$$M = \frac{\int_0^L m(x) \cdot u^2(x) dx}{u_M^2} \quad (2)$$

U izrazu (2)  $u(x)$  je pomak odnosno oblik vibriranja koji je poznat ili se usvaja i  $u_M$  pomak konstrukcije na mjestu reducirane mase. U ovoj približnoj metodi na odstupanje rezultata znatno utječe izbor oblika vibriranja konstrukcije i mjesto redukcije mase. Mogu se očekivati odstupanja od nekoliko postotaka, pa do 10-20 % [1-6]. S određenom reduciranom masom  $M$  kružna frekvencija vibriranja određuje se iz izraza (1).

Kod Reyleighove energetske metode izjednačavanjem najveće vrijednosti kinetičke i potencijalne energije (zakon o konzerviranju mehaničke energije sustava) određuje se frekvencija osnovnog tona. I kod primjene ove metode potrebno je usvojiti oblik vibriranja (dinamičku elastičnu liniju). Ako se sustav svede na diskretne koncentrirane mase  $m_i$  tada je

$$\omega^2 = g \cdot \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot u_i}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot u_i^2}, \tag{3}$$

gdje je  $g=9,81\text{m/s}^2$  ubrzanje Zemljine teže i  $u_i$  pomak na mjestu mase  $m_i$ . Ako se usvoji osnovni oblik vibriranja konzole koja odgovara statičkom pomaku uslijed ravnomjernog opterećenja, dobivaju se prihvatljivi rezultati proračuna [2]. Primjenom ove metode, uz uporabu usvojenog oblika vibracija, vrijednosti frekvencije osnovnog tona su uvijek veće od teorijskih rješenja [3]. Izraz (3) je pogodno koristiti za grede i konzole s raspodijeljenim  $m(x)$  ili više koncentriranih masa  $m_i$ . S približno linearnim momentima savijanja od vrha ( $M_b=0$ ) do uklještenja  $M_b$  konzole duljine  $L$  s  $E \cdot I \approx \text{konst.}$  pogodno je usvojiti oblik vibracija prema elastičnoj liniji konzole

$$u(x) = \frac{M_b}{E \cdot I} \cdot \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \right), \tag{4}$$

gdje je  $x$  ordinata koja se mjeri od uklještenja, a  $M_b$  moment u uklještenju. Za određivanje kružne frekvencije i osnovnog perioda vibriranja  $T=2\pi/\omega$  prema izrazu (3), oblik vibriranja je pogodno normirati, u ovom slučaju s faktorom  $(M_b \cdot L^3)/(3E \cdot I)$ .

Ukoliko se krutost konzole znatno mijenja po duljini primjenom metoda reduciranih masa i energetske metode (Reyleigh) s usvojenim oblikom vibriranja mogu se očekivati nešto veća odstupanja rezultata. U slučaju sustava s manjim brojem masa i uporabom kalkulatora pogodna je primjena Stodola metode koji se može svrstati u približne metode visoke točnosti [1, 2]. Ova metoda se u literaturi navodi i kao metoda postupnog približavanja [4, 6]. Iz dinamike konstrukcija je poznat izraz

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{y} = 0, \tag{5}$$

gdje je  $\mathbf{K}$  matrica krutosti, matrica masa  $\mathbf{M}$  i svojstveni oblik vibriranja  $\mathbf{y}$ . Primjenom matrice fleksibilnosti  $\mathbf{D}$  izraz (5) piše se u drugom obliku

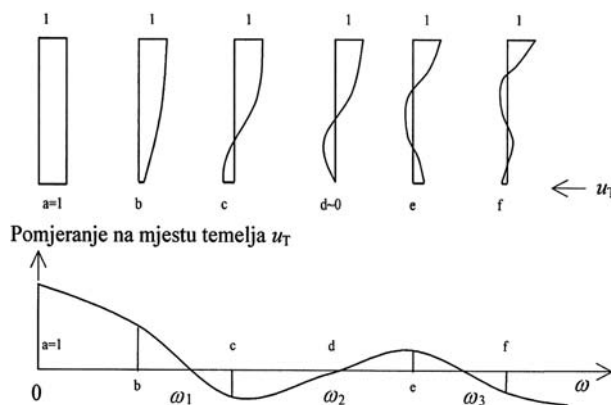
$$\frac{1}{\omega^2} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{y}, \tag{6}$$

gdje je  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$  dinamička matrica. Za sustav s  $n$  masa postoji  $n$  svojstvenih vektora  $\mathbf{y}$ . Pretpostavi se svojstveni vektor  $\mathbf{y}$  i pomnoži s dinamičkom matricom  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$  i usporedi s početnim. Ukoliko je pretpostavljeni oblik i dobiveni svojstveni oblik približno jednak, tada je to i rješenje problema. U drugom slučaju postupak se ponavlja s dobivenim oblikom vibracija. Poslije više iteracija mogu se dobiti rezultati s malim odstupanjima od teorijskih rješenja. Za više oblike vibriranja matrica  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$  korigira se eliminiranjem prvog oblika i postupak se ponavlja s matricom  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}_2$ . Tada vektor  $\mathbf{y}_2$  konvergira ka drugom obliku vibracija. Na sličan način provodi se daljnji postupak dobivanja  $\mathbf{y}_i$  [1,2].

## 2.1 Holzerova metoda Holzer's Method

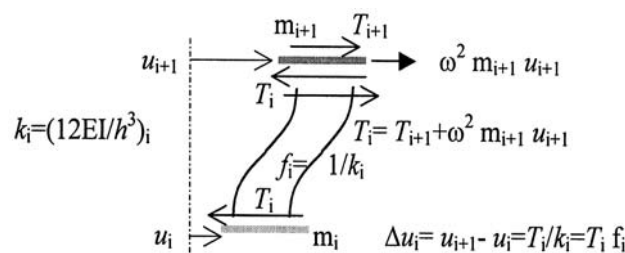
Holzerova metoda je pogodna za određivanje perioda svojstvenih vibracija konstrukcije okvira s krutim ili beskonačno krutim gredama [1, 2]. Ova se metoda može svrstati u metode visoke točnosti. Zasniva se na postupnom pronalaženju oblika vibracija za izabrane kružne frekvencije. Za normiranu amplitudu pomaka  $u_i=1$  vrha objekta određuje se amplituda pomaka sljedećeg kata (mase) koja odgovara kružnoj frekvenciji vibracija. U većini slučajeva doći će do razlike u pomaku  $u_T$  na mjestu temelja objekta, što ukazuje da postupak treba ponoviti s drugom vrijednosti frekvencije. Ovim postupkom može se određivati bilo koja od frekvencija slobodnih vibracija neovisno o drugim, što predstavlja posebnu pogodnost Holzerove metode. Postupak određivanja amplituda (pomaka) masa prema izabranim kružnim frekvencijama predstavljen je na slici 1 [1].

Oblici vibriranja koji odgovaraju izabranim kružnim frekvencijama



Slika 1. Holzerova metoda  
Figure 1. Holzer Method

Ako je amplituda pomaka  $u_i$  neke mase  $m_i$  konstrukcije, tada je najveće ubrzanje pri vlastitim vibracijama  $a_i = \omega^2 \cdot u_i$  i sila koja djeluje na tu masu  $H_i = m_i \cdot a = m_i \cdot \omega^2 \cdot u_i$ . S ovim silama određuje se pomak konstrukcije za usvojenu frekvenciju  $\omega$ . Ako pomak osnove (uklještenja) prema shemi na slici 1 nije jednak nuli  $u_{Tem} \neq 0$  postupak se ponavlja s drugom frekvencijom. Metodu je pogodno objasniti za okvirne konstrukcije koje imaju grede velike krutosti, građevine sa smikom (shear building), slika 2.



Slika 2. Određivanje  $u_i$  kata po Holzerovom postupku  
Figure 2. Determination of floor displacement  $u_i$  according to Holzer method

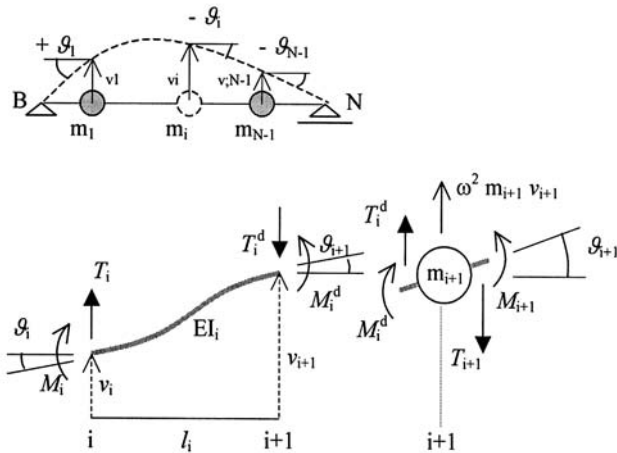
Postupak određivanja dodataka pomaka katova  $u_i$  provodi se primjenom kalkulatora (hand-solution) od vrha objekta do temelja. Ako je pomak temelja blizu nule, izabranoj frekvenciji  $\omega_i$  odgovara oblik vibriranja. U slučaju većeg odstupanja amplitude pomaka temelja, postupak se ponavlja s drugom frekvencijom prema izrazu

$$\left( \frac{\Delta\omega^2}{\Delta u_T} \right)_{1-2} = \left( \frac{\Delta\omega^2}{\Delta u_T} \right)_{2-3}, \quad \omega_3^2 = \omega_2^2 + \Delta\omega_{2-3}^2. \quad (7)$$

### 3 Holzer-Myklestadova metoda

#### Holzer-Myklestad Method

Okvirne konstrukcije s krutim gredama katova imaju jedan stupanj slobode pomaka po čvoru, odnosno masi. U analizi vibracija greda svaka masa ima dva stupnja slobode gibanja pomaka  $v_i$  i okretanje za kut  $\vartheta_i$  o kojima treba voditi računa pri određivanju amplituda pomaka grede.



Slika 3. Deformacija grede pri vibracijama, Holzer-Myklestadova metoda  
Figure 3. Deformation of the beam at vibrations, Holzer-Myklestad method

Pomaci i statički utjecaji krajeva grede su dani prema osnovnim izrazima teorije greda, izraz (8).

$$\begin{pmatrix} T_i \\ M_i \\ \vartheta_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_i & 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_i^2}{2E \cdot I_i} & -\frac{l_i}{E \cdot I_i} & 1 & 0 \\ -\frac{l_i^3}{6E \cdot I_i} & \frac{l_i}{2E \cdot I_i} & -l_i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_i^d \\ M_i^d \\ \vartheta_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

U skraćenom obliku izraz (8) je oblika  $\eta_{i1} = Q_{fi} \cdot \eta_i^d$ . Uvjeti dinamičke ravnoteže sila i pomaka u čvoru  $i+1$  u matricnom obliku su dani izrazom (9)

$$\begin{pmatrix} T_i^d \\ M_i^d \\ \vartheta_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\omega \cdot m_{i+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{i+1} \\ M_{i+1} \\ \vartheta_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \eta_i^d &= Q_{p,i+1} \cdot \eta_{i+1}, \text{ pa je} \\ \eta_{i1} &= Q_{fi} \cdot Q_{p,i+1} \cdot \eta_{i+1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Za cijeli sustav masa grede, može se pisati izraz (10) i na taj način odrediti iznose sila i pomaka na lijevom osloncu koji odgovaraju frekvenciji  $\omega$ . Granični uvjeti, moment savijanja i pomaci grede, na lijevom osloncu su jednaki nuli  $M_B=v_B=0$ . Na desnom osloncu je  $M_N=v_N=0$ , pa se može napisati izraz za  $M$  i  $v$  na lijevom osloncu prema izrazu (10) [1].

$$\begin{pmatrix} M_B \\ v_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{ms} & t_{m\vartheta} \\ t_{vs} & t_{v\vartheta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_N \\ \vartheta_N \end{pmatrix} \quad (11)$$

Ako se usvoji jedinična rotacija na desnom osloncu  $\vartheta_N=1$  izraz (11) je oblika

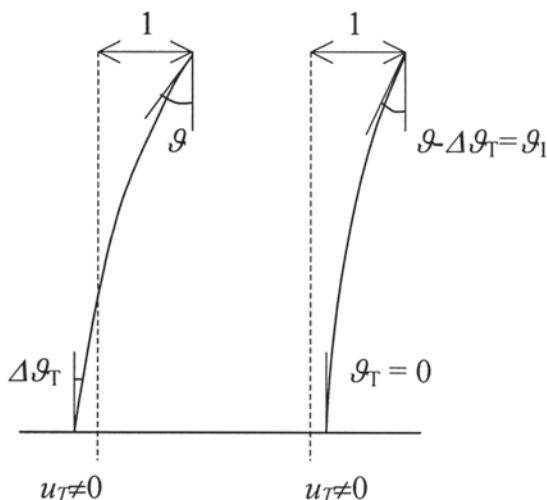
$$0 = t_{ms} \cdot T_N + t_{m\vartheta} \cdot 1 \rightarrow T_N = \frac{-t_{m\vartheta}}{t_{ms}} \quad (12)$$

$$0 = -t_{vs} \cdot \frac{t_{m\vartheta}}{t_{ms}} + t_{v\vartheta} \cdot 1$$

Svaki od koeficijenta je funkcija samo jedne veličine  $\omega^2$ , pa je odgovarajuća frekvencija slobodnih vibracija ona kada je pomak na lijevom osloncu jednak nuli  $v_B=0$ . Frekvencije slobodnih vibracija sustava se mogu odrediti i kada se postavi uvjet da je determinata sustava u izrazu (11) jednaka nuli [1].

### 3.1 Konzola Bracket

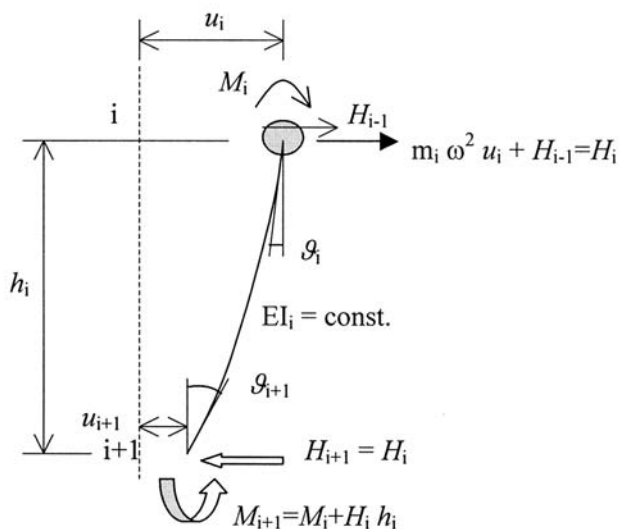
Analiza oblika vibriranja grede s koncentriranim masama primjenom Holzer-Myklestadovog iterativnog postupka se određuje izborom frekvencije  $\omega^2$ . Ako je pomak na lijevom osloncu približno jednako nuli ( $v_B \approx 0$ ) to je odgovarajuća vlastita frekvencija, pomaci  $v_i$  masa određuju oblik vibriranja. Na desnom osloncu grede je  $v_N=0$  i usvojeno okretanje  $\vartheta_N=1$  tako da se izborom samo veličine frekvencije  $\omega^2$  određuje odgovarajući oblik vibracija uz uvjet da je pomak na lijevom osloncu približno jednaki nuli ( $v_B \approx 0$ ). U slučaju konzole primjenom Holzer-Myklestadovog postupka treba pretpostaviti dvije veličine pomaka pri slobodnim vibracijama, amplitudu pomaka  $y_1=1$  i okretanje  $\vartheta_1$  na kraju konzole, kao i frekvenciju  $\omega^2$ . Na osnovu ove tri vrijednosti dobivaju se amplitude pomaka masa i pomak na mjestu temelja. Ako je konzola uklještena u temelju, tada je na mjestu temelja  $y_1=\vartheta_1=0$ . Da bi se zadovoljili uvjeti pomaka konzole, na mjestu temelja za frekvenciju  $\omega^2$  treba odrediti kut okretanja na mjestu mase  $m_1$  na vrhu za koji će okretanje na mjestu temelja biti jednako nuli  $\vartheta_1=0$ , slika 4. Za  $y_1 \approx 0$  izabrana frekvencija odgovara jednom od oblika vibriranja konzole.



Slika 4. Određivanje okretanja  $\vartheta_1$  konzole za uvjet  $\vartheta_T \approx 0$   
 Figure 4. Determination of rotation  $\vartheta_1$  of the bracket for requirement  $\vartheta_T \approx 0$

Izborom kuta okretanja  $\vartheta_1$  mase "1" na kraju konzole, slika 4, osiguran je uvjet da je okretanje na mjestu uklještenja jednako nuli, ali pomak najčešće nije jednak nuli  $u_T \neq 0$ . Da bi bio zadovoljen i uvjet  $u_T \approx 0$  potrebno je izabrati frekvenciju  $\omega^2$  koja tada predstavlja traženu frekvenciju odgovarajućeg oblika vibracija. U ovom postupku frekvencije se mogu odrediti neovisno jedna o drugoj uz uvjet  $u_T \approx 0$ .

Amplitude pomaka  $y_i$  i okretaja  $\vartheta_i$  na mjestu mase "i" određuju se prema izrazima deformacija grede duljine  $h_i$  između dvije mase prema slici 5.

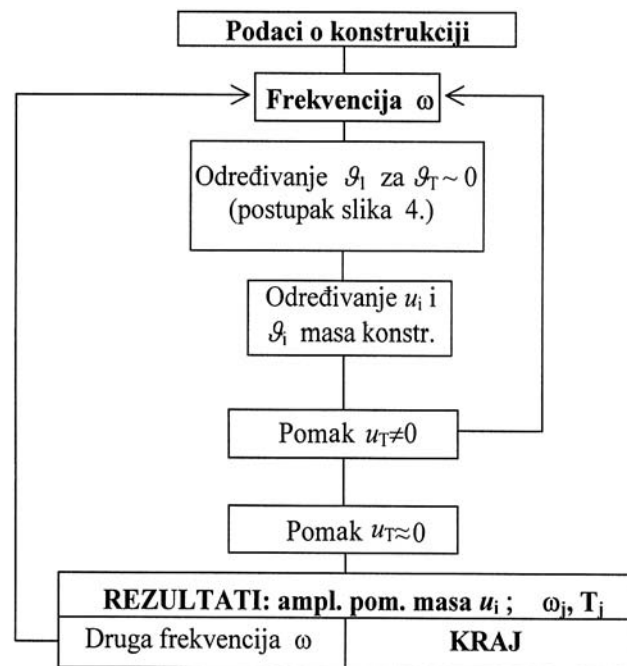


Slika 5. Presječne sile i pomjeranje grede  
 Figure 5. Section forces and displacements of the beam

Pomak i okretanje krajeva grede čvora  $i$  i  $i+1$  pri vlastitim vibracijama dani su izrazima (13).

$$\left. \begin{aligned} u_{i+1} &= u_i - \vartheta_i \cdot h_i - \frac{H_i \cdot h_i^3}{3E \cdot I_i} + \frac{M_{i+1} \cdot h_i^2}{2E \cdot I} \\ \vartheta_{i+1} &= \vartheta_i + \frac{H_i \cdot h_i^2}{2E \cdot I_i} - \frac{M_{i+1} \cdot h_i}{E \cdot I_i} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Određivanja amplitude pomaka i okretanja masa konzole s izabranom kružnom frekvencijom od mase "1" do temelja "n+1" sprovodi se prema izrazima (13). Postupak određivanja pomaka na mjestu masa dan je i na blok dijagramu, slika 6.



Slika 6. Dijagram približnog postupka  
 Figure 6. Diagram of approximate procedure

Drugi način određivanja kružne frekvencije je kada za dvije uzastopne vrijednosti kvadrata kružnih frekvencija pomak temelja  $u_T$  mijenja znak. U ovom slučaju postupak se može programirati prema izrazu (14). Ako je prirast  $\Delta\omega^2$  dodatka kvadrata kružne frekvencije mali, tada i tražene vrijednosti kružnih frekvencija  $(\omega^2)_{iter.}$  dobivaju se s malim odstupanjima.

$$\begin{aligned} (\omega^2)_{i+1} &= (\omega^2)_i + \Delta\omega_{i,i+1}^2 \\ \left( \frac{u_T^{i+1} - u_T^i}{\Delta\omega^2} \right) \cdot \Delta\omega - u_T^i &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

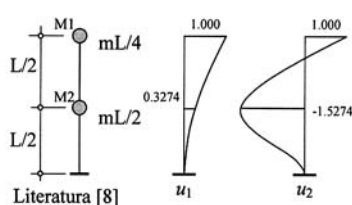
pa je

$$(\omega^2)_{iter.} = (\omega^2)_i + \left( \frac{u_T^i}{u_T^{i+1} - u_T^i} \right) \cdot \Delta\omega_{i,i+1}^2$$

#### 4

#### Primjeri Examples

**Primjer 1.** Za konzolu s dvije mase dane u [8], odredit će se kružne frekvencije prvog i drugog perioda vibriranja prema predloženom postupku i programu koji je razvijen za programibilni kalkulator. Rezultati proračuna dani su u nastavku.



$$m=25,0; L=18,0 \text{ m}$$

$$EI=1,3064 \cdot 10^7 \text{ kNm}^2$$

$$\omega_1=3,15623 \cdot (EI/mL^4)^{1/2}$$

$$\omega_1=7,042 \text{ 1/s}; T_1=0,8922 \text{ s}$$

$$\omega_2=16,2580 \cdot (EI/mL^4)^{1/2}$$

$$\omega_2=36,274 \text{ 1/s}; T_2=1732 \text{ s}$$

$$u_T^I = -0,0057 \quad u_T^{II} = 0,006 \quad u_T^{III} = -0,0028$$

$$\varphi_T^I = 1,4 \cdot 10^{-14} \quad \varphi_T^{II} = -8 \cdot 10^{-13} \quad \varphi_T^{III} = -4,3 \cdot 10^{-11}$$

$$\omega_1^{2 \text{ iter.}} = 37,9 \text{ s}^{-2} \quad \omega_2^{2 \text{ iter.}} = 1450 \text{ s}^{-2} \quad \omega_3^{2 \text{ iter.}} = 11100 \text{ s}^{-2}$$

$$\omega_1^{\text{ iter.}} = 6,156 \text{ s}^{-1} \quad \omega_2^{\text{ iter.}} = 38,079 \text{ s}^{-1} \quad \omega_3^{\text{ iter.}} = 105,356 \text{ s}^{-1}$$

$$T_1^{\text{ iter.}} = 1,021 \text{ s} \quad T_2^{\text{ iter.}} = 0,165 \text{ s} \quad T_3^{\text{ iter.}} = 0,0596 \text{ s}$$

Prema predloženom postupku izvršen je proračun pomaka i okretanja temelja za izabranu kružnu frekvenciju  $\omega^2$ . Kada je  $u_T \approx 0$  izabrana frekvencija je približno rješenje problema, a pomaci predstavljaju amplitude pomaka pri vibracijama konstrukcija (oblika vibriranja). Rezultati su dani u nastavku.

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_1}, \text{ s}^{-1} \quad \frac{u_T}{\varphi_T} \quad T_1, \text{ s} \quad A_1 = |u_{M1}; u_{M2}|$$

$$45,000/6,708 \quad 0,06968/1,7 \cdot 10^{-14} \quad 0,9366 \quad -$$

$$49,000/7,000 \quad 0,000743 \sim 0 / 0 \quad 0,8976 \quad 1,000/0,333$$

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_2}, \text{ s}^{-1} \quad \frac{u_T}{\varphi_T} \quad T_2, \text{ s} \quad A_2 = |u_{M1}; u_{M2}|$$

$$1300/36,056 \quad -0,033/1,5 \cdot 10^{-13} \quad 0,1743 \quad 1,0000/-1,5240$$

$$1320/36,332 \quad 0,00885 \sim 0 / -1,2 \cdot 10^{-13} \quad 0,1729 \quad 1,0000/-1,5282$$

Rješenja frekvencija prema ovom približnom postupku su

$$\omega_1 = 7,000 \approx \omega_1^{\text{ teor.}} = 7,042 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_2 = 36,332 \approx \omega_2^{\text{ teor.}} = 36,274 \text{ s}^{-1}$$

**Primjer 2.** Za konzolu visine  $H=21,0$  m, krutosti  $E \cdot I=1,3064 \cdot 10^7 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$  s raspodijeljenom masom  $m=21,905 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$  određene su kružne frekvencije i frekvencije vibriranja prema izrazima dinamike konstrukcija [2]

$$T_i = \frac{2\pi}{\alpha^2} \cdot H^2 \cdot \sqrt{\frac{m}{E \cdot I}}$$

koeficijenti  $\alpha=1,875/4,69/7,6$  odgovaraju prvoj, drugoj i trećoj vlastitoj frekvenciji vibriranja konstrukcije  $T_1, T_2$  i  $T_3$ . U ovom slučaju dobivene su vrijednosti:

$$T_1^{\text{ teor.}} = 1,0206 \text{ s} \quad \omega_1^{\text{ teor.}} = 6,156 \text{ s}^{-1} \quad \omega_1^{2 \text{ teor.}} = 37,901 \text{ s}^{-2}$$

$$T_2^{\text{ teor.}} = 0,16312 \text{ s} \quad \omega_2^{\text{ teor.}} = 38,519 \text{ s}^{-1} \quad \omega_2^{2 \text{ teor.}} = 1483,697 \text{ s}^{-2}$$

$$T_3^{\text{ teor.}} = 0,05808 \text{ s} \quad \omega_3^{\text{ teor.}} = 108,1816 \text{ s}^{-1} \quad \omega_3^{2 \text{ teor.}} = 11703,251 \text{ s}^{-2}$$

Prema predloženom postupku određeni su kvadrati kružnih frekvencija  $\omega_1, \omega_2$  i  $\omega_3$  kada su pomaci temelja  $u_T$  približno jednaki nuli,  $u_T \approx 0$ . U ovom slučaju na konzoli su usvojene koncentrirane mase,  $M_1=21,905 \cdot 1,05=23,0 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$  na vrhu i  $M_{2,10}=21,905 \cdot 2,1=46,0 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$  do uklještenja, na udaljenosti 2,1 m. U tablici 1 dane su vrijednosti amplitude prva tri oblika vibriranja prema teorijskom rješenju konzole s raspodijeljenom masom [2] i približnom postupku s koncentriranim masama. Dani su i pomaci  $u_T$  i okretanja  $\varphi_T$  na mjestu uklještenja konzole koje odgovaraju približnim vrijednostima kružnih frekvencija  $(\omega_{1,2,3})^{2 \text{ iter.}}$ .

U tablici 1 dane su vrijednosti normiranih pomaka na desetinama visine konzole visine  $H=21,0$  m koje odgovaraju oblicima vlastitih perioda vibriranja:

- konzole s raspodijeljenom masom (teorijsko rješenje) [2]
- konzola s deset koncentriranih masa,  $n_1=M/2$  na vrhu i ostale  $n_{2,10}=M$  na udaljenosti 2,1 m prema približnom iterativnom postupku.

Tablica 1. Vrijednosti amplitude za prva tri oblika vibriranja  
Table 1 Values of amplitudes for the first three forms of vibrations

$A_1^{\text{ teor.}}$	$A_1^{\text{ iter.}}$	$A_2^{\text{ teor.}}$	$A_2^{\text{ iter.}}$	$A_3^{\text{ teor.}}$	$A_3^{\text{ iter.}}$
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,862	0,861	0,524	0,511	0,229	0,175
0,726	0,723	0,070	0,050	-0,345	-0,458
0,591	0,588	-0,310	-0,339	-0,657	-0,694
0,461	0,457	-0,590	-0,609	-0,474	-0,468
0,340	0,335	-0,714	-0,728	0,020	0,060
0,230	0,225	-0,684	-0,691	0,526	0,580
0,137	0,131	-0,526	-0,528	0,756	0,803
0,064	0,058	-0,301	-0,298	0,605	0,631
0,017	0,011	-0,093	-0,088	0,228	0,234
0	-0,0057	0	+0,006	0	-0,0028

## 5 Zaključak Conclusion

U dinamičkoj analizi okvirnih konstrukcija u većini slučajeva mogu se usvojiti grede velike krutosti, pa sve mase na mjestu greda imaju jedan stupanj slobode pomaka. Kod grednih sustava mase se pri vibriranju pomiču i okreću. Iterativni postupak za analizu greda je predložio Myklestad, u literaturi poznat kao Holzer-Myklestadova metoda.

U ovom radu na osnovu Holzer-Myklestadove metode dan je prijedlog postupka određivanja oblika i frekvencije vibriranja za konzole s koncentriranim masama. Za izabranu kružnu frekvenciju određuju se pomak pojedinih masa sustava od vrha konzole do temelja. U postupku je riješen problem izbora okretanja na vrhu konzole tako da je uvijek na mjestu uklještenja konzole, okretanje blizu nule. Ako je pomak na mjestu temelja približno jednako nuli izabrana vrijednost kružne frekvencije predstavlja približno rješenje problema. Određivanje dinamičkih karakteristika konzole s manjim brojem masa može se riješiti i običnim kalkulatorom, dok za veći broj masa pogodna je primjena programibilnih kalkulatora ili računala.

Predložena metoda je pogodna za kontrolu rezultata proračuna vibracija građevina dobivenih primjenom komercijalnih računalskih programa. U slučaju primjene kalkulatora, programibilnih kalkulatora ili računala ova metoda je posebno pogodna u procesu edukacije i usvajanja znanja studenata. Iz više pokušaja određuje se jedna od vlastitih kružnih frekvencija kojoj odgovara pomak temelja

približno jednak nuli,  $u_T \approx 0$ . Na taj se način studenti i početnici upoznaju s redom veličine dinamičkih karakteristika konzole ili građevine koja se može analizirati kao konzola s koncentriranim masama.

## Literatura

### References

- [1] Clough, R.; Penzien, J. Dynamic of Structures, McGRAW-HILL, New York - Toronto, p. 634.
- [2] Aničić, D.; Fajfar, P.; Petrović B.; Szavitz-Nossan A.; Tomažević M. Zemljotresno inženjersvo - visokogradnja, Građevinska knjiga, Beograd, 1990., str. 642.
- [3] Brčić V. Primjenjena dinamika konstrukcija. // Građevinski kalendar 1981., SDGITJ, Beograd, 1981., str. 93-160.
- [4] Bezuhov, N. I.; Lužin, O. V.; Kolkunov, N. V. Stabilnost i dinamika konstrukcija u primerima i zadacima, Građevinska knjiga, Beograd, 1973., str. 470.
- [5] Maglajlić, Z. Približni postupci određivanja vlastitih perioda oscilovanja konstrukcija. // Peti opći sabor hrvatskih građevinskih konstruktora, Brijuni, april 2001., str. 627-632.
- [6] Maglajlić, Z. Visoki armiranobetonski zidovi-Dinamičke karakteristike u teoriji i primjerima, Građevinski fakultet, Sarajevo, 2002., str. 104.
- [7] Maglajlić, Z. Približni postupak određivanja perioda osciliranja okvira. // Građevinar br. 8(2007), Zagreb, 2007., str. 685-691.
- [8] Chopra, K. A. Dynamics of Structures - Theory and Application to Earthquake Engineering, Prentice Hall, New Jersey, p. 729.

---

#### Adresa autora

Author's address

#### **Prof. dr. Zlatko Maglajlić**

Univerzitet u Sarajevu  
Građevinski fakultet  
Patriotske lige 30  
71000 Sarajevo  
Bosna i Hercegovina