Prostor i vrijeme od Newtona do Einsteina, II. dio

Lavoslav Čaklović

3. Opća teorija relativnosti (OTR)

Matematičke teorije nemaju za cilj otkrivati pravu prirodu stvari; to su pretjerana očekivanja. Njihov jedini cilj je uskladiti prirodne zakone proizašle iz iskustva, a koje, bez pomoći matematike, ne bismo mogli niti formulirati.

Henri Poincaré
(matematičar, fizičar, filozof)

3.1. Gravitacija kao sila. Newton

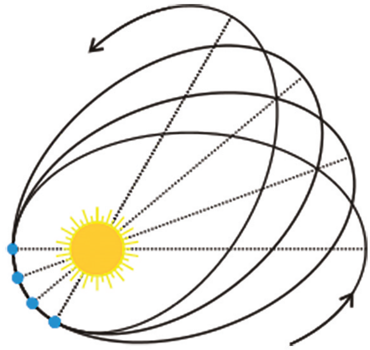
Gravitacija kao interakcija među svemirskim tijelima koja ima uzrok u samim tijelima i Newton ju je opisao kao privlačnu silu. Samom uzroku dano je ime *gravitacijska masa*. Ona djeluje bez obzira gibaju li se tijela jedno u odnosu na drugo ili ne. Tako na primjer, tijelo koje leži na podu u mojoj sobi privučeno je gravitacijom između tog tijela i Zemlje, ali ne znam i ne mogu izračunati njegovu *inercijalnu masu* sve dok ne dobije neko ubrzanje. To govori 2. Newtonov zakon gibanja.

Danas govorimo o gibanju planete u gravitacijskom polju Sunca iako Newton nije shvaćao pojam polja. Newtonova sila među objektima postoji ako postoje oba objekta, dok gravitacijsko polje shvaćamo kao polje utjecaja jednog objekta na potencijalno prisutne objekte u njegovoj okolini, a ta okolina je u slučaju gravitacije cijeli prostor. Uvažavajući takav pogled na gravitacijsko polje može se slobodno reći da je gravitacijska masa tijela posljedica uranjanja materije u gravitacijsko polje. Slično se može reći i za naboj.

Newtonova teorija gravitacije nije bila prihvaćena od njegovih suvremenika, a ideja sile na daljinu, tj. sile koja nije kontaktna, razvijala se sporo. U Cambridgeu, na primjer, udžbenici su sve do dvadesetih godina 18. st. podučavali Descartesovu fiziku. Ni na kontinentu nije bilo drugačije. Leibniz u Njemačkoj, Johann Bernoulli u Švicarskoj, Cassini u Francuskoj odbacivali su Newtonovu teoriju gravitacije. To nije samo zbog predrasuda već i zbog toga što nije posve bila u skladu s promatranim gibanjima planeta [12].

Pronalaženjem planete Neptun (1846) Newtonova teorija gravitacije bila je na svom vrhuncu. Otkrili su ga Galle i d'Arrest s preciznošću unutar jednog supnja na položaju kojeg je predvidio Le Verrier u svom računu. Nekako u isto vrijeme (Verrier, 1859) po prvi put se zamjećuje relativistički efekt gravitacije, a to je da Merkur, najbliža planeta Suncu, ne opisuje eliptičastu putanju već se giba po negoj vrsti rozete, a to je elipsa koja se zakreće (slika 6). Newtonova teorija gravitacije nije bila u stanju to objasniti jednako kao ni neki drugi pokušaji revizije formule za gravitaciju[12]. Za definitivno objašnjenje takvog Merkurovog gibanja trebalo je čekati razvoj opće teorije relativnosti.

[12] Clairaut predlaže oblik sile $\dfrac{A}{r^2} + \dfrac{B}{r^4}$.



Slika 6. Precesija perihela planete Merkur u svom obilasku oko Sunca.

Krenimo, dakle, od Newtonovog zakona gravitacije. Gibanje tijela 2 (planet) u gravitacijskom polju tijela 1 (Sunce) opisana je jednadžbom (1) u kojoj se pretpostavlja da tijelo 1 miruje u inercijalnom sustavu

$$F_{1\to 2} = Gm_{g1}m_{g2}\frac{\vec{n}_{1\leftarrow 2}}{r_{12}^2} = m_{i2}\vec{a}_2 \tag{1}$$

- $F_{1\to 2}$ sila kojom Sunce (aktivno tijelo 1) djeluje na planet (pasivno tijelo 2),
- G — dogovorena gravitacijska konstanta,
- m_{g1} — gravitacijska masa aktivnog tijela,
- m_{g2} — gravitacijska masa pasivnog tijela,
- m_{i2} — inercijalna masa pasivnog tijela,
- $\vec{n}_{1\leftarrow 2}$ — smjer (jedinični vektor) od pasivnog prema aktivnom tijelu (privlačnost),
- r_{12} — relativna udaljenost dvaju tijela,
- $\vec{a}_2$ — ubrzanje pasivnog tijela.

Princip ekvivalencije. Galileo je formulirao (naslutio) *slabi princip ekvivalencije* (masa) time što je rekao da je $m_p \propto m_i$, tj. da je pasivna gravitacijska masa proporcionalna inercijalnoj masi pasivnog tijela koje se giba. Eötvösov eksperiment s torzionim njihalom [11] to i pokazuje. Izborom mjernih jedinica, odnosno konstante G, možemo slobodno reći da je $m_p = m_i$, i jednadžba (1) tada postaje onakva kakvu je znademo

$$F_{1\to 2} = Gm_1m_2\frac{\vec{n}_{1\leftarrow 2}}{r_{12}^2} = m_2\vec{a}_2.$$

Iz formule je jasno da gibanje pasivnog tijela ne ovisi o inercijalnoj masi m_2.

Put do ekvivalencije inercijalne i gravitacijske mase je i za Newtona bio mukotrpan. U tekstu koji slijedi iznijeti ćemo neke, još nepoznate detalje za širu javnost, iz članka Craiga Foxa (1916) [3] o Newtonovim nastojanjima da definira masu i silu još prije nego što je izdana *Philosophi Naturalis Principia Mathematica* (1687) [8]. Neki dijelovi Newtonovih rukopisa koje Fox spominje još nisu prevedeni s latinskog.

Prisjetimo se načina kako Newton uvodi pojam *inercijalne mase*. To je prva definicija u njegovoj *Principii*.

`Definicija I.`
Količina mase je mjera iste i proizlazi iz njene gustoće i zapremnine.

Zrak dvostruke gustoće i dvostruko veće zapremnine ima četiri puta veću masu.

Napomena autora. Bez obzira što gustoća nije definirana, ovdje se nazire Newtonova namjera da masu smatra aditivnom, jer je volumen aditivna mjera. Drugim riječima, masa tijela koje nastaje združivanjem dva različita tijela je suma njihovih masa. Nije sasvim jasna Newtonova namjera uvoditi pojam mase bez dinamike. Inercijalna masa je onaj dio otpora tijela promjeni brzine koji se odnosi na samo tijelo i tako ju treba doživljavati — dinamički. Ovakva DEFINICIJA I je cirkularna. Inače, aditivnost mase proizlazi iz aditivnosti sile koju Newton uzima zdravo za gotovo i nije eksplicitno navedena kao zakon iako Newton u POSLJEDICI I govori o paralelogramu sila. Što se mehanike tiče, ova definicija mase je nebitna jer mase možemo uspoređivati mjerenjem akceleracije koju uzrokuje ista sila na oba tijela. Tehničke detalje takvog mjerenja ostavljamo čitatelju da potraži sam.

Masa, kako je uvedena u Newtonovoj definiciji nije vezana uz dinamiku i djelovanje sila i uopće nije jasna namjena takve veličine u ovom trenutku. Newtonova potraga za "količinom materije" započinje rukopisom *De motu corporum in gyrum* (O orbitalnom gibanju tijela) (1684) [6], napisanom tri godine prije prvog izdanja njegove *Principie*. U toj prvoj verziji rukopisa još nema pojma koji bi opisivao "količinu materije", ali u trećem, revidiranom izdanju (1685) [7], Newton se vraća osnovnim konceptima i revidira ih. Tu spada i Definicija 10 (*De motu*):

`Količina gibanja.`
Količina gibanja proizlazi iz brzine i količine tijela u gibanju zajedno. Štoviše, količinu tijela treba računati iz obilja tjelesne materije [copia materiæ corporæ], koja je uglavnom proporcionalna njegovoj težini [. . .]

U Newtonovo vrijeme, težina tijela je razumljiv i iskustveno jasan pojam i prethodi pojmu inercijalne mase kakvu danas poznajemo i koju nam Newton sada uvlači u teoriju. Pojam *copia materiæ* se prvi puta spominje, a mogao bi se prevesti kao *količina, obilje*, a Newton ga je preuzeo od Lucretuisove poeme *De Rerum Natura* (O prirodi stvari), djelo koje su Newton i njegovi prethodnici i suvremenici dobro poznavali.

Ono što je zaokupljalo Newtonove misli je odnos između količine materije i onoga što nazivamo težina. Uvod u tu vezu Newton započinje raspravom o relativnom i apsolutnom gibanju u Definiciji 8 (*De motu*):

`Definicija 8.`
[. . .] da mirovanje i gibanje tijela u apsolutnom smislu ne ovisi o njegovom odnosu prema drugim tijelima već o djelovanju sile na to tijelo. Međutim, taj odnos se može promijeniti jedino djelovanjem sile na ostala tijela s kojima je prvo tijelo u odnosu, ali se ne mijenja ako sila djeluje na oboje — u tom slučaju njihov relativni odnos se čuva.

Ovdje nije sasvim jasan dio rečenice "njihov relativni odnos se čuva", odnosi li se to na udaljenosti ili nešto drugo. Niže u tekstu bit će jasno o čemu se radi.

Pretpostavimo da dva tijela stoje jedno uz drugo. Njihovo apsolutno gibanje, mirovanje ili gibanje po pravcu s konstantnom brzinom, će biti promijenjeno jedino djelovanjem vanjske sile na oba tijela. Ali ako ta vanjska sila djeluje na samo jedno tijelo njihovo relativno gibanje će biti promijenjeno jer drugo tijelo zadržava svoje stanje gibanja. Ovo razmišljanje Newton je iskazao kao Posljedicu 6 zakona gibanja u *Principii*:

Posljedica 6 (zakona gibanja).
Ako se tijela na bilo koji način gibaju jedno u odnosu na drugo i budu ubrzana jednakim ubrzanjem duž paralelnih pravaca, tada će i dalje nastaviti gibati se jedno u odnosu na drugo kao da dodatnog ubrzanja nije ni bilo.

Ova posljedica nema nejasnoća jer Newton jasno govori u kom smjeru "gleda" ubrzanje. Posljedica zahtijeva pažljivo čitanje — Newton ne govori o vanjskoj sili na sustav nego o ubrzanju čitavog sustava. Ovaj uvid predstavlja dodatak Galilejevoj invarijantnosti zakona gibanja jer za specijalne vanjske sile na sustav koje daju isto ubrzanje svim tijelima sustava, relativno gibanje se također neće mijenjati.

Posljedica te tvrdnje je da sva tijela u polju sile teže, ispuštena u istom trenutku, padaju jednako brzo ako se zanemari otpor zraka. To je zato jer je gravitacijsko polje Zemlje, lokalno gledajući, homogeno i tijela miruju relativno jedno u odnosu na drugo u trenutku ispuštanja. Njihovim ispuštanjem uključeno je ubrzanje duž paralelnih pravaca pa, prema posljedici, i nakon toga zadržavaju odnos mirovanja jedno u odnosu na drugo.

Postavit ćete pitanje kakvu vezu to ima s količinom materije? Ima, ali prije toga postavimo još jedno pitanje, a to je: "Kakva je to vanjska sila koja svim tijelima sustava daje isto ubrzanje?" Drugi Newtonov zakon gibanja tvrdi da ista sila tijelu manje (inercijalne) mase daje veću akceleraciju. Sila koja svim tijelima sustava daje isto ubrzanje, bez obzira na masu, je sila teža i ta činjenica je eksperimentalno bila potvrđena (Galileo, Huygens).

Zemljina gravitacija nije tipična mehanička sila i ovo gore ispričano možda djeluje kontraintuitivno. Još bi bilo kontraintuitivnije kad bi gravitacija na sva tijela djelovala istom silom — tada bi sva tijela bila jednako teška pa tako i čovjek i komarac. Primijetite da ovdje naglašavamo razliku između (inercijalne) mase i težine, a sam Newton nije jasno dao do znanja da je to zaista različito. U trenutku kad je imao *copiu*, inercijalnu količinu materije, čini se da nije bio svjestan te razlike prije treće revizije rukopisa *De motu*.

Newton je bio svjestan da ravnotežna vaga ne mjeri težinu, jer ako je ona u ravnoteži na Zemlji onda će biti u ravnoteži i na Mjesecu. Iz tog razloga ga je zanimala "količina materije" prisutna u težini koja je odijeljena od djelovanja gravitacije na to tijelo. Kod inercijalne sile i količine gibanja to je inercijalna masa koja je separirana od brzine, odnosno akceleracije. Takvu mjeru količine materije Newton je nazvao *pondus* (prevodi se kao težina, što je zbunjujuće za današnjeg čitatelja).

Newton je išao korak dalje. Usavršio je njihalo koje je imalo zatvorenu kutiju, a u koju je stavljao tijela različitih materijala (drvo, zlato), ali jednakih *pondusa*, što je usporedio vagom. Njihalo je naravno bilo gušeno zbog otpora zraka, ali je eksperiment pokazao da je brzina gušenja bila neovisna o materijalu (*pondusu*). Zapravo su bila dva njihala koja su izokrono titrala, svako sa svojim *pondusom*. Zaključak slijedi sam po sebi: Brzina gušenja njihala (otpor zraka itd.) ovisi o inercijalnoj mjeri materije (*copia*) što znači da je *copia* proporcionalna *copusu*. Da je brzina gušenja bila različita za jednake *copuse* to bi značilo da je *copus* substancijalno različit od inercijalne mase. Tehnički termin *copus* zamijenjen je inercijalnom masom, a tako stoji i dan-danas.

Drugi osnovni koncept kojeg je trebalo revidirati je sila. Newton je tvrdio u gornjoj raspravi da kad bi Zemljina gravitacija različito ubrzavala tijela različitih materijala da bi tada, prema 2. zakonu gibanja, periodi oscilacija njihala bili različiti. To, međutim, ne slijedi iz 2. zakona gibanja kako je bio formuliran u to vrijeme (1685). Tadašnji zakon tvrdi da je promjena gibanja proporcionalna primijenjenoj sili. Ono što mu je privuklo pažnju u toj epizodi je da treba razlikovati dvije vrste sile. Tipična mehanička sila, kao što je udar na primjer, je proporcionalna akceleraciji koju uzrokuje. S druge strane, silu kao što je gravitacija je teže opisati, jer je isto proporcionalna akceleraciji koju uzrokuje, ali joj iznos (veličina) varira ovisno o *copusu* tijela, dok je akceleracija ista za njemu bliska tijela. To je navelo Newtona da razlikuje *pokretačku silu* od *akcerelacijskog iznosa sile* što je učinio u *Principii* (1687) (DEFINICIJA VII i DEFINICIJA VIII) i ranije u *De motu — Liber Secundus* (1685). *Akcerelacijski iznos sile* je proporcionalan ubrzanju koje generira, dok je iznos pokretačke sile proporcionalan umnošku mase i akceleracije.

3.2. Zakon gravitacije kao posljedica aditivnosti

Pretpostavljajući `aditivnost mase`, `aditivnost sile` i `neprekidnost sile` u ovisnosti o masama, može se izvesti zakon gravitacije u formi $F(m_1, m_2) = m_1 m_2 r^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, a uz pretpostavku da je gravitacijsko polje `centralno simetrično`. Evo tog izvoda koji je autorovo poboljšanje dokaza iz članka [4].

Pretpostavimo, za početak, da imamo dva tijela A, B i da je tijelo B sastavljeno od dva dijela B_1, B_2 s masama m_1, m_2. Tada je iznos gravitacijske sile tijela B na tijelo A (zbog aditivnosti sile)

$$F(m_A, m_B, r_{AB}) = F(m_A, m_{B_1}, r_{AB_1}) + F(m_A, m_{B_2}, r_{AB_2}),$$

gdje je r_{AB} udaljenost centra masa A i B, a r_{AB_1} i r_{AB_2} udaljenosti centara masa od A do centara masa od B_1, B_2 respektivno. Pretpostavimo nadalje da je udaljenost $r = r_{AB}$ velika u odnosu na dimenzije oba tijela. U tom slučaju možemo u gornjoj formuli pisati $r = r_{AB_1} = r_{AB_2}$. Matematičkom indukcijom zaključujemo dalje, zahvaljujući neprekidnosti sile:

$$\begin{aligned}
F(m_A, k \cdot m_B, r) &= n \cdot F\Big(m_A, \frac{k}{n} m_B, r\Big), \ \forall k, n \in \mathbf{N} \\
\frac{k}{n} \cdot F(m_A, m_B, r) &= F\Big(m_A, \frac{k}{n} m_B, r\Big), \ \forall k, n \in \mathbf{N} \\
\lambda \cdot F(m_A, m_B, r) &= F(m_A, \lambda \cdot m_B, r), \ \forall \lambda \in \mathbf{R} \\
F(m_A, m_B, r) &= m_A \cdot m_B \cdot f(r),
\end{aligned}$$

gdje f predstavlja gravitacijsku silu među jediničnim masama na udaljenosti r.

Pretpostavimo nadalje `invarijantnost zakona gravitacije na reskaliranje`, tj. da nakon promjene mjerne jedinice za udaljenost, oblik zakona ostaje isti do na reskaliranje mjerne jedinice sile

$$f(t \cdot r) = \kappa(t) \cdot f(r), \ t > 0. \tag{2}$$

Tada očito vrijedi

$$\begin{aligned}
f(t) &= \kappa(t) \cdot f(1), \ t > 0, \\
\kappa(1) &= 1, \\
\kappa(t_1 \cdot t_2) &= \kappa(t_1) \cdot \kappa(t_2).
\end{aligned}$$

Posljednja relacija je funkcionalna jednadžba za κ koja ima jedinstveno rješenje uz uvjet $\kappa(1) = 1$. Rješenje te jednadžbe je $\kappa(t) = t^\alpha$ za neko $\alpha \in \mathbf{R}$, a dobije se logaritmiranjem funkcionalne jednadžbe. Dakle,

$$F(m_A, m_B, r) = m_A \cdot m_B \cdot r^\alpha \cdot f(1),$$

gdje je $f(1)$ konstanta. Time smo dobili opći oblik zakona gravitacije, ali još treba odrediti α. Jedna od mogućih staza planeta je i kružna staza (op. autora) za koju je centripetalna sila proporcionalna s r^{-2}, što daje $\alpha = -2$. Dakle,

$$F(m_A, m_B, r) = G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2},$$

gdje je G neka konstanta.

Napomena autora. Zahtjev (2) je ključan za oblik $F \propto r^\alpha$. Fizikalno značenje tog zahtjeva, u navedenoj formi, nije apriori jasno, ali gornji račun pokazuje da je za centralno simetrično gravitacijsko polje taj zahtjev ekvivalentan zahtjevu da je tok gravitacijskog polja $\oint \vec{g} d\vec{S}$ kroz sferu koja obuhvaća izvor konstantan, a to isto govori i Gaussov zakon gravitacije. U fizici polja jednadžba koja opisuje transport fizikalne veličine u vremenu i prostoru naziva se ***jednadžba kontinuiteta***. U ovom slučaju ona izražava zakon održanja mase, a protok gravitacijskog polja kroz sferu koja obuhvaća izvor polja možemo interpretirati kao tok masenog polja kroz tu sferu.

Forma gravitacijske sile oblika $F \propto 1/r^2$ je i posljedica dimenzije prostora i Gaussovog zakona gravitacije jer je element površine sfere u $\mathbf{R}^n$ proporcionalan s r^{n-1}. U višim dimenzijama ($n > 3$) gravitacijska sila bi trebala imati formu $F \propto 1/r^{n-1}$, ako želimo imati zakon održanja mase. Formu gravitacijske sile oblika $F = -a/r^2 + b/r^3$ proučavali su mnogi, uključujući i Newtona, a rađeni su i modeli crnih rupa s dodatnim članom $1/r^4$. Od svih modela, jedino linearni model ($F \propto r$) i Newtonov ($F \propto 1/r^2$) imaju stabilne[13] zatvorene orbite [1]. Dokaz te tvrdnje također se može izvesti iz dinamičke invarijantnosti Lagrangeove funkcije uz pomoć Noetherinog teorema [9].

3.3. Einsteinov princip ekvivalencije

U svom eseju *Principle of Relativity and Gravitation*, Einstein (1907) proširuje princip ekvivalencije s inercijalnih sustava na ekvivalenciju homogenog gravitacijskog polja (unutar lifta) i jednoliko ubrzanog gibanja. To znači da se efekt ubrzanja u sustavu koji se ubrzano giba ne može razlikovati od gravitacije. Pustimo Einsteinu da govori:

> *Promatrajmo dva sustava u gibanju S_1 i S_2. Sustav S_1 se jednoliko ubrzava u smjeru x-osi s akceleracijom γ. Sustav S_2 miruje u homogenom gravitacijskom polju[14] i svi objekti unutar S_2 doživljavaju akceleraciju $-\gamma$ u smjeru x-osi. Kao što znamo, zakoni fizike u sustavu S_1 ne razlikuju se od zakona fizike u sustavu S_2, što proizlazi iz činjenice da svi objekti u S_1 doživljavaju akceleraciju kao da su u gravitacijskom polju. Nemamo razloga tvrditi, što se tiče dosadašnjeg iskustva, da se sustavi S_1 i S_2 po bilo čemu razlikuju i stoga pretpostavljamo, u onome što slijedi, potpunu fizičku ekvivalenciju (homogenog)[15] gravitacijskog polja i odgovarajućeg ubrzanja referentnog sustava.*

U skraćenoj formi:

> *U cijelom univerzumu i za sva vremena u dovoljno malom laboratoriju koji slobodno pada svi zakoni prirode (osim zakona gravitacije) imaju isti oblik kao u specijalnoj teoriji relativnosti. Drugim riječima, sustav koji slobodno pada je lokalno inercijalan.*

[13] Postoje zatvorene orbite i za $F \propto 1/r^3$, na primjer, ali je određena početnim uvjetima i nije stabilna.

[14] Laboratorij na površini Zemlje (op. autora)

[15] op. autora

Primijenjeno na promatrača unutar lifta koji pada u polju sile teže, on neće znati nalazi li se u liftu koji pada ili u inercijalnom sustavu.

Lokalizirano gravitacijsko polje. Da gore rečeno bude razumljivije promatrajmo gibanje materijalne točke inercijalne mase m_i u gravitacijskom polju sile teže usmjerene u negativnom smjeru z-osi određene vertikalnom niti viska. Newtonova jednažba gibanja je

$$m_i \frac{d^2 z}{dt^2} = -m_g g,$$

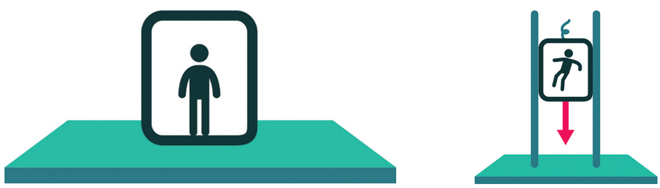
gdje je m_g gravitacijska masa, a g ubrzanje sile teže. Zbog jednakosti inercijalne i gravitacijske mase, možemo ih izostaviti iz jednadžbe gibanja. Zanima nas jednažba gibanja u koordinatnom sustavu koji se giba u smjeru negativne z-osi akceleracijom a. Ako označimo koordinatu materijalne točke u tom ubrzanom sustavu sa z' tada je transformacija između ta dva sustava

$$z' = z + \frac{1}{2}at^2, \; t' = t,$$

a jednažba gibanja mase u ubrzanom sustavu

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = a - g.$$

U slučaju da je $a = g$, tj. ubrzani sustav je sustav lifta koji slobodno pada u polju sile teže, onda se čestica ponaša kao slobodna čestica čija je brzina gibanja određena sa svojom početnom vrijednošću. Drugim riječima, promatrač u ubrzanom sustavu koji slobodno pada u homogenom gravitacijskom polju ne zna je li na njega djeluje gravitacija ili ne. To znači da gravitaciju možemo shvatiti kao fiktivnu silu koja je posljedica ubrzanja, a tijela u ubrzanom sustavu se ponašaju kao da su pod utjecajem gravitacije.



Slika 7. Lift u polju sile teže. Lijevo – miruje, čovjek osjeća ubrzanje. Desno – slobodno pada, čovjek lebdi u bestežinskom stanju.

Ako skočim iz aviona i slobodno padam imam osjećaj da na mene ne djeluje sila. U trenutku kontakta s tlom trenutačno se uključi ubrzanje iznosa g što može biti pogubno za moje kosti. Moj sustav se dalje giba s ubrzanjem g u smjeru z-osi. Osobe koje žive dijametralno suprotno na Zemlji nisu u istom homogenom gravitacijskom polju i kao nemaju isto fiktivno ubrzanje. Apstraktno gledajući, gravitacijsko polje bi se moglo rekonstruirati iz mnoštva lokaliziranih ubrzanih sustava u kojima se slobodna tijela gibaju po pravcima. Drugim riječima, raspored masa u univerzumu određuje neku geometrijsku strukturu koja je, lokalno gledajući, euklidska ili struktura prostora Minkowskog, ovisno o tome kako gledamo na brzinu širenja svjetlosti.

Posljedica 6 poznata je u literaturi kao Newtonov princip ekvivalencije. Za razliku od Einsteinovog principa ekvivalencije on govori o uniformnoj akceleracji kojom se sustav giba, dok Einstein umjesto toga koristi lokalizirano gravitacijsko polje. U tom smislu je Einsteinov princip specijalni slučaj Newtonovog. Da li je to zaista tako?

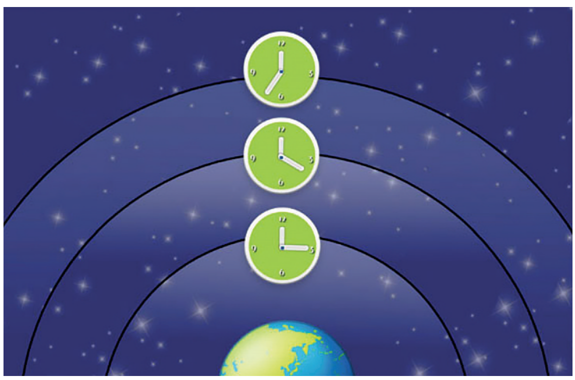
Ako se radi o gravitaciji u Newtonovom kontekstu to je istina. Međutim, Einsteinov princip uključuje i elektromagnetske pojave, a dodatno bi trebalo objasniti i što Einstein misli pod inercijalnim sustavom. Za razliku od Einsteina, Newton pretpostavlja da su svi događaji istovremeni što vodi na Galilejevu invarijantnost, dok Einsteinov princip sinkronizacje satova vodi na Lorentzove transformacije.

Newton je koristio posljedicu 6 kako bi zaključio da je sustav Urana i njegovih satelita u odnosu na Sunce inercijalni sustav jer je gravitacijsko polje Sunca u okolini Urana lokalno homogeno, a što mu je trebalo kao motivacijski račun za formulu (1). Newtonov princip je aproksimativan i jednostran, jer homogeno akceleracijsko polje unosi inercijalnost u sustav, ali ne i obratno. Einsteinov princip, ako zanemarimo njegov sadržaj, čini i obratno — poistovjećuje gibanje u inercijalnom sustavu s okvirom koji slobodno pada. Einsteinov je princip, iskreno govoreći, totalno zbunjujući i neintuitivan za one koji se ne bave astrofizikom.

Dilatacija vremena. Gravitacija usporava vrijeme. Što to znači? Ako imamo dva sata na različitim udaljenostima od Zemlje koja miruju na položajima $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ i ako s f_1, f_2 označimo frekvenciju satova[16] onda je

$$\frac{f_2}{f_1} = 1 + \frac{1}{c^2}\left(U(\mathbf{x}_2) - U(\mathbf{x}_1)\right),$$

gdje U predstavlja potencijalnu energiju gravitacijskog polja ($\mathbf{g} = -\nabla U$). To ima za posljedicu da sat na položaju jačeg gravitacijskog polja sporije otkucava. Na slici 8 prikazana su tri sata u gravitacijskom polju Zemlje. Sat koji je najbliži Zemlji je najsporiji.



Slika 8. Dilatacija vremena. Vrijeme sporije teče ako je sat pod utjecajem jače gravitacije.

Nećemo ulaziti u matematički formalizam ove činjenice, samo ćemo usporediti metriku specijalne i opće teorije relativnosti:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)c^2dt^2 + (d\mathbf{x})^2 \qquad \text{(OTR)}$$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (d\mathbf{x})^2. \qquad \text{(STR)}$$

Ako je laboratorij malih dimenzija u gravitacijskom polju onda je $U \approx const$ i izraz $1 - 2U/c^2 \approx 1$ što je u skladu s principom ekvivalencije.

[16] ... u odnosu na neki treći sat. Obično se uzima idealizirani sat s dva paralelna ogledala na udaljenosti L za koji je jedan otkucaj $d\tau = 2L/c$.

3.4. Gravitacija i svjetlost

Rečenice poput: *“Gravitacija utječe na svjetlost”* i *“Ako je svjetlost oblik energije, onda bi ona trebala biti privučena gravitacijom i njena brzina bi trebala ovisiti o gravitaciji”*, nemaju mnogo smisla u općoj teoriji relativnosti. Ovako iskazane samo dokazuju kako smo cijepljeni da na svijet gledamo kroz prizmu klasične mehanike i euklidske geometrije.

U skladu s Einsteinovom teorijom takozvana *gravitacija* je fiktivna sila, koja je posljedica načina mjerenja prostora i vremena u pravokutnom euklidskom prostoru. Prostorno-vremenski kontinuum je zakrivljen pseudoriemannov prostor s određenom vrstom ’lokalne’ metrike. Ako promatramo tijelo koje se slobodno giba u gravitacijskom polju našeg Sunca i njegovo gibanje opišemo u terminima te promjenjive lokalne metrike koju predlaže Einstein, tijelo se giba po prirodnoj putanji zvanoj *geodetska linija* i to bez utjecaja ikakve sile.

U tom lokalnom sustavu brzina svjetlosti je konstantna, dok promatrač koji ne koristi taj lokalni sustav već opisuje svemir u euklidskom prostoru, tj. preračunava zakrivljene koordinate u kartezijeve, brzina svjetlosti može varirati.

Ideja da postoji “utjecaj gravitacije na svjetlost” nije nova; sâm Newton je, imajući na umu korpuskularnu teoriju svjetlosti, već spominjao tu ideju. Ona ima i eksperimentalnu potvrdu koja se očituje u prividnom pomaku udaljenih zvijezda kad njihovo svjetlo prolazi kraj Sunca. Taj prividni pomak bi mogao nastati na način da se putanja svjetlosne zrake savije u blizini Sunca, kao što se savije prolaskom kroz optičku leću.

Njemački matematičar Soldner (1803) je prvi izračunao kut skretanja u istoj vrijednosti kao i Einstein uvažavajući, naravno, korpuskularnu teoriju. Einstein (1911) izračunava da bi svjetlosna zraka koja prolazi tik uz Sunce trebala biti privučena i doživjeti skretanje od $0.875''$ (lučnih) sekundi.

Rađanje OTR. Nezadovoljan vlastitim računom Einstein pokazuje svoju domišljatost uvodeći posve nove koncepte u strukturu prostora i rađa se opća teorija relativnosti. U njegovom novom modelu ne radi se o utjecaju gravitacije na svjetlost nego o novom načinu mjerenja udaljenosti u gravitacijskom polju. Prirodno gibanje slobodne čestice i gibanje svjetlosti odvija se po tzv. geodetskim linijama koje imaju veću zakrivljenost u blizini velikih masa. Svjetlosna zraka koja prolazi blizu Sunca je zakrivljena, ne zbog “privlačenja” od strane Sunca već zbog toga što Sunce zakrivljuje prostor oko sebe, a time i putanju svjetlosti — utjecaj je dakle indirektan.

Četiri godine kasnije (1915), oboružan novim saznanjima, Einstein je ponovio račun i dobio dvostruko veću vrijednost $1.75''$. U to vrijeme Einstein i njegova teorija bili su ismijavani od Engleza i Amerikanaca, vjerojatno zato što je bio njemački državljanin, a sve se odigrava u sjeni 1. svjetskog rata. Iznenađenje dolazi već 1919. kad je, za vrijeme pomrčine Sunca, Eddington, Englez iz Newtonovog sveučilišta, eksperimentalno potvrdio[17] Einsteinov račun. Međutim, potpunu afirmaciju opća teorija relativnosti

[17] Godine 1917. Eddington je pripremao s astronomom Dysonom ekspediciju na današnju Ekvatorijalnu Gvineju, jer se pružala dobra prilika za mjerenje zbog velikog broja zvijezda koje su se 29. svibnja 1919. trebale sakupiti oko Sunca. Čak je bila odobrena i pozamašna svota novaca od strane britanske vlade. U to vrijeme rat je još uvijek bio neizvjesan, a postojala je i opasnost da Eddington bude regrutiran, iako je kao kveker tražio izuzeće zbog prigovora savjesti. Na kraju je britanska vlada ipak odobrila znanstveniku pacifisti da izbjegne ratne vojne dužnosti kako bi mogao provjeriti teoriju kreiranu od neprijateljskog znanstvenika. Osim Eddingtonovog tima, Englezi su poslali još jedan tim s istim zadatkom u mjesto Sobral na sjeveru Brazila. Prije Eddingtonove ekspedicije bilo je nekoliko njih (ukupno 4), ali bez uspjeha zbog lošeg vremena.

dobiva nakon detekcije gravitacijskih leća i gravitacijskih valova generiranih od dvojnih zvijezda i pomaka spektralnih linija dalekih zvijezda prema crvenome dijelu spektra.

Eksperiment koji su Eddington i njegovi suradnici trebali provesti u suštini je jednostavan. Za vrijeme pomrčine Sunca, Mjesec prekriva Sunčev disk i otkriva polje zvijezda oko njega koje su inače nevidljive zbog Sunčevog blještavila. Uz pomoć teleskopa, astronomi na fotografskim pločama bilježe položaj zvijezda i te se snimke uspoređuju sa slikama istih zvijezda koje su napravljene ranije na noćnom nebu. Na slici napravljenoj za vrijeme pomrčine, zvijezde čija svjetlost doživljava skretanje čini se pomaknuta od njenog pravog položaja. Usporedba dviju Eddingtonovih fotografskih ploča, ostale su bile neupotrebljive, s pločama snimljenim na teleskopu u Oxfordu prije ekspedicije dala je predvidive rezultate u skladu s općom teprijom relativnosti $1.60'' \pm 0.31''$. Ekspedicija iz Brazila imala je tehničkih poteškoća zbog zagrijavanja teleskopa i njihova mjerenja daju $1.98'' \pm 0.12''$. Ekspedicija 1922. u Australiji (Campbell i Robert Trumpler) dobili su vrijednosti $1.72'' \pm 0.11''$. Ponovljene ekspedicije (1929, 1936, 1947, 1952 i 1973) nisu dale neka poboljšana mjerenja iako je ova posljednja imala uređaje visoke kvalitete. Moderna mjerenja bazirana na radio interferometrji, vršena uz pomoć satelita Cassini daju vrijednosti koje odstupaju za 10^{-3} od teorijskog predviđanja [2].

Ono što mi doživljavamo kao otklon svjetlosne zrake pri prolasku kraj Sunca je vizualizacija zakrivljenosti prostora u blizini mase Sunca. Za mjerenje "otklona" je povoljno to što zakrivljenost prostora slabi s udaljenošću od Sunca. Posljedica toga je da je daleko od Sunca geodetska linija po kojoj svjetlost putuje manje zakrivljena i mi je aproksimiramo s pravcem. Drugim riječima, odstupanje putanje svjetlosti od pravocrtne linije je uočljivo samo u blizini Sunca (slika 9).

Što se tiče projekcije svjetlosne putanje koja dolazi od udaljene zvijezde na Zemlju, njen početak i kraj možemo smatrati, u projekciji i u originalu, jednakim. Jednostavan račun koji objašnjava Einsteinovu vrijednost otklona od $1.748''$ može se naći u [10] i za njegovo razumijevanje dovoljno je poznavanje diferencijalnog računa.

Račun 'skretanja' zrake u gravitacijskom polju. Jedan od načina da se izračuna kut zakretanja svjetlosne zrake pod utjecajem Sunca je taj da se odrede geodetske linije u zakrivljenom prostoru-vremenu. To može biti mukotrpan posao jer treba riješiti skup diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

gdje je τ *pravo vrijeme*, tj. vrijeme u sustavu u kojem promatrač i njegov sat miruju na određenom položaju (ishodištu).

Određivanje simbola $\Gamma^\beta_{\mu\nu}$ zahtijeva računanje metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$, što opet zahtijeva rješavanje 10 parcijalnih diferencijalnih jednadžbi zakrivljenosti $R_{\mu\nu} = 0$, koje su povrh svega još i nelinearne. Kroz desetak godina proučavanja takvih jednadžbi uspjeli bismo doći do egzaktnog rješenja.

3.4.1. Analiza dimenzija

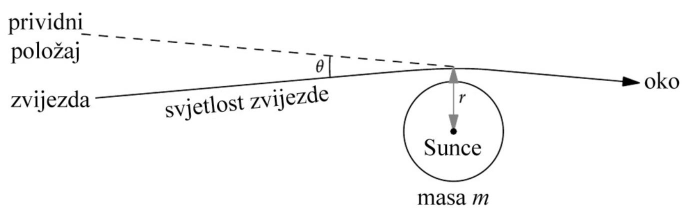
Mahajan [5] u svojoj knjizi rješava mnoge fizikalne i tehničke probleme uz pomoć analize dimenzija prisutnih fizikalnih veličina. Analiza daje odgovor do na neki faktor, kojeg treba odrediti mjerenjem ili snalaženjem na neki drugi način poznavajući složenost problema. Ta se procedura provodi u nekoliko koraka:

1. Određivanje relevantnih parametara.
2. Određivanje bezdimenzionalne grupe.
3. Formuliranje bezdimenzionalne tvrdnje u što generalnijem obliku.
4. Sužavanjem složenosti uz pomoć fizikalnog znanja.

Objasnit ćemo značenje svakog od ovih koraka i primijeniti ga na naš slučaj.

1) Određivanje parametara. Skretanje svjetlosne zrake znači da se zvijezda pomiče u svoj prividni položaj, dok je stvarni položaj zaklonjen Suncem (gledano sa Zemlje). Naš cilj je izračunati kut θ (v. sliku 9). Prema tome, θ je jedna relevantna veličina koja nema fizikalnu dimenziju, njena dimenzija je dimenzija broja, tj. 1. Sljedeće dvije relevantne veličine su masa Sunca m i gravitacijska konstanta G. Utjecaj gravitacije Sunca zapravo dolazi kroz produkt Gm čija je dimenzija L^3T^{-2}. Kao što smo već ranije komentirali, zakrivljenost prostora odnosno gravitacija slabi s udaljenošću od Sunca, a njen utjecaj na zraku je najveći u položaju najbližem Suncu. Ima smisla uvesti i parametar r koji mjeri najmanju udaljenost zrake od Sunca. Dakle, relevantni parametri su:

θ	1	kut
Gm	L^3T^{-2}	gravitacija
r	L	udaljenost zrake od Sunca



Slika 9. Prividno skretanje svjetlosne zrake pod utjecajem Sunca.

2) Određivanje nezavisne bezdimenzionalne grupe parametara. Bezdimenzionalna grupa parametara je produkt oblika $g = p^r q^s r^t$, gdje su p, q, r parametri generatori grupe, a r, s, t realni brojevi takvi da je g bezdimenzionalna veličina. Grupa parametara je nezavisna ako se jedna grupa ne može prikazati kao produkt drugih grupa ili njihovih generatora.

U našem slučaju jedna grupa je kut θ jer je taj parametar bezdimenzionalan. Najopćenitiji zakon vezan uz tu grupu je $\theta = const$. Taj je zakon apsurdan jer ako je kut θ uzrokovan gravitacijom on mora biti funkcija od Gm i r. Te dvije fizikalne veličine trebale bi ući u drugu grupu parametara, ali zbog T^{-1} u dimenziji od Gm, ta dimenzija ne može biti kompenzirana s r.

Pitanje: *Što još nedostaje?*

Nedostaje još jedna fizikalna veličina, a to je brzina svjetlosti c čija je dimenzija LT^{-1}. Novi relevantni parametri su:

θ	1	kut
Gm	L^3T^{-2}	gravitacija
r	L	udaljenost zrake od Sunca
c	LT^{-1}	brzina svjetlosti

a bezdimenzionalna grupa parametara je sada Gm/rc^2.

Interpretacija grupe Gm/rc^2 je sljedeća. Fizikalna veličina Gm sama za sebe ne znači je li gravitacija slaba ili jaka, tj. može li se zanemariti ili ne u odnosu na neku drugu fizikalnu veličinu. Stoga je važno usporediti ju s nekom drugom fizikalnom veličinom iste dimenzije, a to je ovdje rc^2. Ta usporedba vodi na bezdimenzionalni omjer Gm/rc^2.

Pitanje: *Može li se formirati još neki par bezdimenzionalnih grupa?*

Može. Na primjer, θ i $Gm\theta/rc^2$ također čini skup nezavisnih bezdimenzionalnih grupa. S matematičkog gledišta svi parovi nezavisnih bezdimenzionalnih grupa su ekvivalentni jer svaki par može generirati bilo kakvu kvantitativnu tvrdnju o savijanju zrake. Naime, ako je naš cilj izračunati θ i ako se on pojavljuje u svakoj grupi onda ćemo iz svake kvantitativne tvrdnje, koja (do na faktor) izjednačava te dvije grupe, moći implicitno izračunati θ. Iako je račun legitiman, mnogo je teže razmišljati na taj način i rješavati takvu jednadžbu nego kad se θ pojavljuje samo na lijevoj strani.

Iz tog razloga, kod odabira nezavisne bezdimenzionalne grupe, ciljnu varijablu, to je ovdje θ, treba ostaviti samo u jednog grupi. Takvo grubo pravilo ne umanjuje našu slobodu u kreiranju grupa, ali uveliko olakšava naš izbor.

Zadatak. *Formirajte novu bezdimenzionalnu grupu koja nastaje množenjem grupe* Gm/rc^2 *s* m_c/m_c*, gdje je* m_c *masa fotona. Grupirajte veličine dok se ne dobije fizikalna interpretacija brojnika i nazivnika.*

3) Formuliranje bezdimenzionalne tvrdnje. Treći korak je iskoristiti bezdimenzionalne grupe i zapisati najopćenitiju tvrdnju o savijanju zrake. Oblik takve tvrdnje je: $g_1 = f(g_2)$ što u našem slučaju vodi na jednadžbu

$$\theta = f\left(\frac{Gm}{rc^2}\right)$$

gdje je f realna funkcija realne varijable. Analiza dimenzija ne može dati oblik funkcije f. To je zvan njenog dosega. Ono što nam je donijela ta analiza je to da je kut θ funkcija od varijable Gm/rc^2, a ne od četiri varijable (G, m, r, c), što predstavlja veliko pojednostavnjenje.

4) Sužavanje složenosti uz pomoć fizikalnog znanja. Fizikalna intuicija o gravitaciji nam sugerira da povećavanje mase m povećava i kut otklona θ što upućuje na monotonost od f. Ne treba isključiti niti antigravitaciju, tj. kad masa odbija zraku. U tom slučaju kut θ bi bio negativan, što isključuje sve parne funkcije. Najjednostavnija funkcija koja udovoljava ovim zahtjevima je

$$\theta = \alpha\frac{Gm}{rc^2}, \quad \alpha > 0,$$

ili, grubo govoreći, kut skretanja zrake proporcionalan je s m/r jer su G i c nepromjenjive veličine. Razne teorije daju različite vrijednosti za faktor α. Vrijednost faktora $\alpha = 2$ daje otklon za Newtonovu gravitaciju računajući trajektoriju materijalne čestice koja prolazi blizu Sunca brzinom svjetlosti. Vrijednost $\alpha = 4$ daje odgovor za slučaj opće teorije relativnosti [2] i potvrđena je Eddingtonovim i drugim mjerenjima. Dakle,

$$\theta = \frac{Gm}{rc^2} \cdot \begin{cases} 1 & \text{(usputna pretpostavka)} \\ 2 & \text{(Newtonova gravitacija)} \\ 4 & \text{(opća teorija relativnosti).} \end{cases}$$

Pitanje: *Koliko su veliki ti kutovi i mogu li se eksperimentalno mjeriti?*

Izračunajmo prvo kut otklona za ako zraka prolazi tik uz Zemlju ($\alpha = 1$).

$$\theta_{\text{Zemlja}} \sim \frac{\overbrace{6.7 \cdot 10^{-11}\ \text{kg}^{-1}\ \text{m}^3\text{s}^{-2}}^{G} \cdot \overbrace{6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}^{m_{\text{Zemlja}}}}{\underbrace{6.4 \cdot 10^{6}\ \text{m}}_{R_{\text{Zemlja}}} \cdot \underbrace{10^{17}\ \text{m}^2\text{s}^{-2}}_{c^2}} \approx 0.7 \cdot 10^{-9} \quad \text{(radijana)}.$$

Teleskop dijametra D u stanju je razlikovati kutove koji nisu manji od λ/D, gdje je λ valna duljina svjetlosti. Za dobivenu vrijednost θ_{Zemlja} dijametar leće teleskopa trebao bi biti u promjeru bar 700 metara:

$$D \sim \frac{\lambda}{\theta_{\text{Zemlja}}} \sim \frac{0.5 \cdot 10^{-6}}{0.7 \cdot 10^{-9}}\ \text{m} \approx 700\ \ \text{m}.$$

Najveći teleskopi imaju leće dijametra oko 1 m; najveći zrcalni teleskopi imaju zrcala oko 10 metara, što znači da gore izračunato skretanje zrake pri prolasku kraj planete Zemlje nije moguće detektirati[18].

Druga je mogućnost tražiti jači izvor gravitacije, a to je Sunce. Kako je kut skretanja proporcionalan s m/r onda je

$$\frac{\theta_{\text{Sunce}}}{\theta_{\text{Zemlja}}} = \frac{m_{\text{Sunce}}}{m_{\text{Zemlja}}} \cdot \left(\frac{R_{\text{Sunce}}}{R_{\text{Zemlja}}}\right)^{-1} \approx 3000,$$

a najmanja leća koja bi bila u stanju dektektirati θ_{Sunce} trebala bi biti oko 25 cm ili 10 in (inča) u promjeru. Eddington je imao 13-inčne leće što je veće od 33 cm.

U početku je Einstein (1911) bio uvjeren da će opća teorija relativnosti dati vrijednost kao i Newtonova, a to je 4.2^{-6} radijana ili $0.87''$:

$$\underbrace{0.7 \cdot 10^{-9}\ \text{rad}}_{\theta_{\text{Zemlja}}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Newton}} \cdot \underbrace{3000}_{\theta_{\text{Sunce}}/\theta_{\text{Zemlja}}} \sim 4.2 \cdot 10^{-6}\ \ \text{rad}.$$

Eddingtom je izmjerio dvostruku vrijednost što se poklapalo s drugim po redu Einsteinovim izračunom (1915).

Literatura

[1] Joseph Bertrand, *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre*, C. R. Acad. Sci., 77: 849–853, 1873.

[2] M. Will Clifford, *The 1919 measurement of the deflection of light*, Classical and Quantum Gravity, 32 (12): 124001, jun 2015.

[3] Craig W. Fox, *The newtonian equivalence principle: How the relativity of acceleration led newton to the equivalence of inertial and gravitational mass*, Philosophy of Science, 83 (5): 1027–1038, 2016.

[4] Olga Kosheleva and Vladik Kreinovich, *Newton's Laws: What is Their Operational Meaning?*, 2014.

[5] Sanjoy Mahajan, *he Art of Insight in Science and Engineering: Mastering Complexity*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2014.

[18] Današnji radioteleskopi su daleko precizniji jer se mjerenja vrše na način da se kombinira više teleskopa zajedno.

[6] ISAAC NEWTON, *De motu corporum in gyrum*, 1684,
`https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-Ð-00009-00046/1`.

[7] ISAAC NEWTON, *De motu corporum in gyrum – Liber Secundus*, 1685. Neobjavljeni prijevod od George Smitha,
`http://https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03990/1`.

[8] ISAAC NEWTON, *Philosophi Naturalis Principia Mathematica*, Pepys Press, London, 1687. Englesko izdanje 1728, reprint *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, Greenwood Press, 1969, web izdanje
latinski: `http://www.gutenberg.org/files/28233/28233-h/28233-h.htm`,
engleski: `https://ebooks.adelaide.edu.au/n/newton/isaac/mathematical-principles-of-natural-philosophy/`.

[9] ALBERTO ROJO AND ANTHONY BLOCH, *The Principle of Least Action: History and Physics*, Cambridge University Press, 2018.

[10] ROBERT J. TRUMPLER, *The Relativity Deflection of Light*, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 41 (239): 23–34, 1929.

[11] R. VON EÖTVÖS, D. PEKÁR, AND E. FEKETE, *Beiträge zum Gesetz der Proportionalität von Trägheit and Gravität*, Annalen der Physik, 68 (11), 1922. English translation for the U. S. Department of Energy by J. Achzenter, M. Bickeböller, K. Bräuer, P. Buck, E. Fischbach, G. Lubeck, C. Talmadge, University of Washington preprint 40048-13-N6. – More complete English text reprinted earlier in Annales Universitatis Scientiarium Budapestiensis de Rolando Eötvös Nominate, Sectio Geologica, 7, 111, 1963.

[12] EDMUND WHITTAKER, *A History of the Theories of Aether and Electricity Volume I: The Classical Theories*, Thomas Nelson and Sons, New York, 1951.