ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2022. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $3/291$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadatci iz matematike

3875. Ako je $0 \leq a, b \leq 1$ i $a+b=1$, dokaži

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+b}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

3876. Odredi najveći prirodan broj N takav da su oba broja $N+496$ i $N+224$ potpuni kvadrati.

3877. Točke M i N su polovišta dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$. Dokaži jednakost

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 = |AC|^2+|BD|^2+4|MN|^2.$$

3878. Ako je $\log_{10} 2 = a$ i $\log_{10} 3 = b$, izračunaj $\log_5 12$.

3879. Nađi 2×2 matrice B i C s cjelobrojnim elementima tako da vrijedi

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = B^3 + C^3.$$

3880. Kroz točku Q unutar trokuta ABC prolaze tri pravca, paralelna njegovim stranicama. Oni dijele trokut na šest dijelova, od kojih su tri trokuta s površinama S_1, S_2, S_3. Dokaži da je površina trokuta ABC jednaka $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

3881. Kružni lukovi $\overset{\frown}{AC}$ i $\overset{\frown}{BC}$ imaju središta u točkama B i A, a kružnica dodiruje te lukove i dužinu $\overline{AB}$. Ako je duljina svakog luka jednaka l, odredi opseg kružnice.

3882. Ako su h_a, h_b, h_c duljine visina, t_a, t_b, t_c duljine težišnica, a R i r duljine opisane i upisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, dokaži nejednakost

$$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c} \leq 1+\frac{R}{r}.$$

3883. Nađi cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)\right)=1.$$

3884. Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokaži da je

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}<2$$

ako i samo ako je

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}<2$$

3885. Bez korištenja računala odredi

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15} \cdot\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}.$$

3886. Na koliko se načina može razmjestiti m jedinica i n nula tako da nikoje dvije jedinice ne budu susjedne?

3887. Odredi sumu

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}.$$

3888. Dana je kvadratna jednadžba

$$ax^2+bx+c=0, \quad b^2-4ac \geq 0,$$

čija su rješenja x_1 i x_2.

a) Izrazi umnožak $(x_1-kx_2)(x_2-kx_1)$ kao funkciju koeficijenata a, b, c. Izvedi uvjet na koeficijente tako da omjer rješenja bude jednak k.

b) Pokaži da se uz taj uvjet rješenja zadane jednadžbe mogu izraziti kao racionalne funkcije od a, b, k, osim za $b=0$.

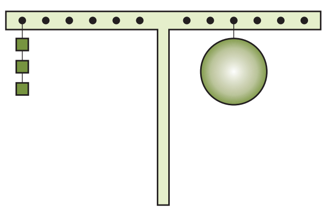
B) Zadatci iz fizike

OŠ – 506. Vozačica je na putnom računalu pratila potrošnju svojeg automobila vozeći po različitim cestama. Nakon 150 km vožnje po županijskim cestama prosječna je potrošnja bila 4 l (litre) na 100 km. Nakon toga je, bez resetiranja putnog računala, vozila 50 km po autocesti pri čemu je prosječna potrošnja porasla na 4.6 l na 100 km. Koliko je njen automobil bio lakši nakon te vožnje? Gustoća benzina je $770\ \mathrm{kg/m^3}$.

OŠ – 507. Bakrena je zavojnica napravljena od žice promjera 1 mm. Električni je otpor te zavojnice $12\ \Omega$. Kolika joj je masa? Električna je otpornost bakra $1.72 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$, a gustoća $8900\ \mathrm{kg/m^3}$.

OŠ – 508. Učenik je vodičima spojio 4 jednaka otpornika tako da ih je po jednog postavio na stranice kvadrata, a peti je otpornik postavio na dijagonalu tog kvadrata. Poznato je da peti otpornik ima otpor $32\ \Omega$. Kad je taj kvadrat spojio na izvor napona 4 V struja u glavnom vodu je iznosila 500 mA. Koliki je otpornik svakog od jednakih otpornika?

OŠ – 509. Poluga na slici je u ravnoteži. Koliko je puta masa okruglog tijela veća od mase pravokutnog tijela? Kad bismo okruglo tijelo premjestili jednu rupicu dalje od oslonca, koliko bi pravokutnih tijela trebalo dodati na lijevu stranu poluge da ona ostane u ravnoteži?



1791. Pri jednoliko ubrzanom gibanju tijelo u drugoj sekundi napravi 5 % veći put nego u prvoj. Odredi akceleraciju i početnu brzinu ako je put nakon 10 sekundi jednak 98 m.

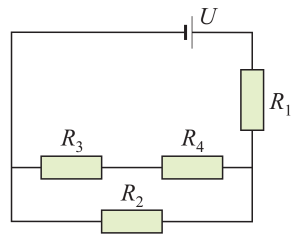
1792. Biljarska kugla rotira na stolu. Masa kugle je 100 g, a radijus 2.5 cm. Ako je početna kutna brzina rotacije $5\pi\ \mathrm{rad/s}$, a moment sile $3.5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Nm}$, koliko će okreta kugla napraviti do zaustavljanja?

1793. Kojom minimalnom brzinom treba izbaciti objekt iz svemirske postaje koja kruži na visini 415 km iznad površine Zemlje, da objekt izgori u Zemljinoj atmosferi? Uzmimo da će objekt izgoriti ako se spusti do 80 km visine nad površinom. Uzmimo da je Zemlja kugla radijusa 6371 km, mase $6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$.

1794. Izotop $^{63}\mathrm{Ni}$ raspada se β emisijom u $^{63}\mathrm{Cu}$. Mjerenjem je ustanovljeno da se nakon 73 dana broj raspada u jednakim vremenskim intervalima smanjio za 0.1384 %. Odredi vrijeme poluživota tog izotopa.

1795. Okomito na optičku rešetku upada svjetlost valne duljine 500 nm. Kolika je konstanta rešetke ako se drugi ogibni maksimum opaža na 15° većem kutu od prvog? Gledamo svjetlost propuštenu kroz rešetku.

1796. Na otporniku R_4 na shemi napon je 1.2 V veći od napona na R_3. Odredi napon izvora. $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$.



1797. Samarij je metal gustoće $7520\ \mathrm{kg/m^3}$ i atomske težine $150.36\ \mathrm{g/mol}$. Odredi raspon gustoća izotopski obogaćenog samarija, ako je masa najlakšeg stabilnog izotopa 143.912, a najtežeg $153.922\ \mathrm{g/mol}$.

C) Rješenja iz matematike

3847. *Nađi dvoznamenkasti pozitivan cijeli broj čiji je omjer sa zbrojem njegovih znamenaka minimalan.*

Rješenje. Neka je traženi dvoznamenkasti prirodni broj $\overline{xy} = 10x + y$. Iz uvjeta zadatka je

$$\frac{10x+y}{x+y} = 1 + \frac{9x}{x+y} = 1 + \frac{9}{1+\frac{y}{x}}.$$

Količnik na lijevoj strani je minimalan kada je izraz na desnoj strani minimalan, a to je kada je broj u nazivniku razlomka na desnoj strani maksimalan. Očito je to u slučaju $y = 9$, $x = 1$. Dakle, dvoznamenkasti prirodan broj za koji je traženi omjer minimalan je 19 i sami omjer iznosi 1.9.

Marko Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3848. *Nađi sva realna rješenja jednadžbe*
$$(16x^2-9)^3+(9x^2-16)^3=(25x^2-25)^3.$$

Rješenje. Koristeći formulu za zbroj kubova dana jednadžba je ekvivalentna s:
$$(25x^2-25)\Big[(16x^2-9)^2 - (16x^2-9)(9x^2-16)+(9x^2-16)^2\Big] = (25x^2-25)^3.$$
Uočimo da su $x_{1,2}=\pm 1$ rješenja naše jednadžbe, pa za ostale vrijednosti nepoznanice x jednadžbu podijelimo s $25x^2-25$. Slijedi
$$(16x^2-9)^2-(16x^2-9)(9x^2-16)+(9x^2-16)^2 = (25x^2-25)^2,$$
i jednostavnim sređivanjem dobivamo bikvadratnu jednadžbu
$$144x^4-337x^2+144=0$$
čija su rješenja:
$$(x^2)_1=\frac{9}{16} \implies x_{3,4}=\pm\frac{3}{4} \quad \text{i}$$
$$(x^2)_2=\frac{16}{9} \implies x_{5,6}=\pm\frac{4}{3}.$$
Prema tome, dana jednadžba ima ukupno šest rješenja.

Marko Dodig (3), Zagreb

3849. *Neka su a i b pozitivni brojevi takvi da je*
$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=5\sqrt{5ab}.$$
Dokaži da je
$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{5}.$$

Rješenje.
$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}=5\sqrt{5ab}$$
$$\iff \frac{a^5+b^5}{a^2b^2}=5\sqrt{5ab}$$
$$\iff (a+b)^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4 = 5\sqrt{5}\cdot\sqrt{ab}\cdot a^2b^2$$
$$\iff (a+b)^5-5ab(a^3+b^3)-10a^2b^2(a+b) = 5\sqrt{5}\cdot\sqrt{ab}\cdot a^2b^2$$
$$\iff (a+b)^5-5ab[(a+b)^3-3ab(a+b)] - 10(ab)^2(a+b) = 5\sqrt{5}\cdot\sqrt{ab}\cdot(ab)^2.$$
Uvedemo li supstituciju, $u=a+b$ i $v=ab$, imamo:
$$\iff u^5-5v[u^3-3uv]-10uv^2=5\sqrt{5}\cdot v^2\sqrt{v}$$
$$\iff u^5-5u^3v+5uv^2-5\sqrt{5}\cdot v^2\sqrt{v}=0$$
$$\iff u^3(u^2-5v)+5v^2(u-\sqrt{5v})=0$$
$$\iff u^3\cdot(u-\sqrt{5v})(u+\sqrt{5v}) + 5v^2\cdot(u-\sqrt{5v})=0$$
$$\iff (u-\sqrt{5v})\cdot\underbrace{(u^4+u^3\sqrt{5v}+5v^2)}_{>0}=0$$
$$\iff u-\sqrt{5v}=0$$
$$\iff u=\sqrt{5}\cdot\sqrt{v}$$
$$\iff \frac{a+b}{\sqrt{ab}}=\sqrt{5}$$
$$\iff \sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{5}.$$
Vidimo da vrijedi i obrat tvrdnje zadatka.

Marko Dodig (3), Zagreb

3850. *Neka su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=1$. Dokaži nejednakost*
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3)\geq 3.$$

Rješenje.
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{abc}\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 3$$
$$\iff \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2} - 3 - \frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}\geq 0$$
$$\iff a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right) + c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geq 0$$

Posljednja nejednakost očito vrijedi, pa vrijedi i polazna. Jednakost se postiže ako i samo ako je $a=b=c$.

Marko Dodig (3), Zagreb

3851. *Postoji li pozitivan cijeli broj x koji zadovoljava nejednadžbu*

$$\left|5+\log_x \frac{1}{5}\right| < \frac{8}{5}?$$

Rješenje. Riješimo nejednadžbu na skupu $\mathbb{R}$. Uvjeti su $x>0$ i $x \neq 1$. Redom imamo:

$$\begin{aligned}
\left|5+\log_x \frac{1}{5}\right| &< \frac{8}{5}\\
-\frac{8}{5} < 5+\log_x \frac{1}{5} &< \frac{8}{5}\\
-\frac{33}{5} < \log_x \frac{1}{5} &< -\frac{17}{5}\\
-\frac{33}{5} < \log_x 5^{-1} &< -\frac{17}{5}\\
-\frac{33}{5} < -\log_x 5 &< -\frac{17}{5}\\
\frac{17}{5} < \frac{1}{\log_5 x} &< \frac{33}{5}\\
\frac{5}{33} < \log_5 x &< \frac{5}{17}\\
5^{\frac{5}{33}} < x &< 5^{\frac{5}{17}}\\
\sqrt[33]{3125} < x &< \sqrt[17]{3125}.
\end{aligned}$$

Kako je $1 < 1.276 \approx \sqrt[33]{3125} < x < \sqrt[17]{3125} \approx 1.605 < 2$, ne postoji prirodan broj x koji zadovoljava zadanu nejednadžbu.

Marko Dodig (3), Zagreb

3852. *Nađi sve parove (a,b) realnih brojeva za koje sustav jednadžbi*

$$20x^2+20y^2+ax+by+18=0$$

$$18x^2+18y^2+ax+by+20=0$$

ima zajedničko rješenje.

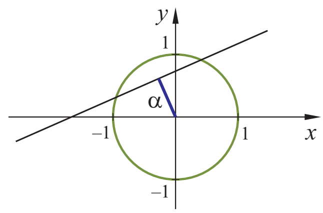
Rješenje. Oduzimanjem druge od prve jednadžbe dobivamo

$$x^2+y^2=1.$$

Ovo je jednadžba kružnice sa središtem u $(0,0)$ polumjera 1. Tada imamo

$$20(x^2+y^2)+ax+by+18=0 \quad \text{tj.}$$

$$ax+by+38=0.$$



Jednadžbe imaju zajedničko rješenja ako je pravac $ax+by+38=0$ udaljen od ishodišta manje ili jednako 1. Dakle

$$d=\frac{|a\cdot 0+b\cdot 0+38|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1 \quad \text{tj.}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \geqslant 38.$$

Zadovoljavaju sve točke (a,b) za koje je $\sqrt{a^2+b^2} \geqslant 38$.

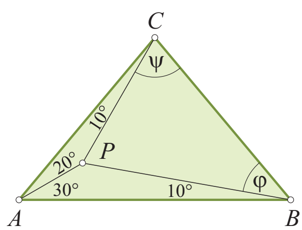
Ur.

3853. *Točka P je unutar trokuta ABC takva da je $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCA = 10^\circ$, $\sphericalangle CAP = 20^\circ$ i $\sphericalangle PAB = 30^\circ$. Dokaži da je $\triangle ABC$ jednakokračan.*

Rješenje. Nacrtamo li sliku prema uvjetima zadatka sa slike vidimo:

$$\psi = 180^\circ - 10^\circ - 10^\circ - 20^\circ - 30^\circ - \varphi$$

$$\psi = 110^\circ - \varphi.$$



Iskoristimo poučak o sinusima redom za trokute ABP, BCP i ACP:

$$\frac{|AP|}{\sin 10^\circ}=\frac{|BP|}{\sin 30^\circ}, \quad \frac{|BP|}{\sin\psi}=\frac{|CP|}{\sin\varphi},$$

$$\frac{|CP|}{\sin 20^\circ} = \frac{|AP|}{\sin 10^\circ}.$$

Sada je:

$$\frac{|AP|}{\sin 10^\circ} \cdot \frac{|BP|}{\sin \psi} \cdot \frac{|CP|}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{|AP|}{\sin 10^\circ} \cdot \frac{|BP|}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{|CP|}{\sin \varphi}$$

$$\iff \sin 30^\circ \cdot \sin\varphi = \sin 20^\circ \cdot \sin\left(110^\circ - \varphi\right)$$

$$\iff \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi = \sin 20^\circ \cdot \sin\left[180^\circ - \left(110^\circ - \varphi\right)\right]$$

$$\iff \sin\varphi = 2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin\left(70^\circ + \varphi\right)$$

$$\iff \sin\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[\cos\left(50^\circ + \varphi\right) - \cos\left(90^\circ + \varphi\right)\right]$$

$$\iff \sin\varphi = \cos\left(50^\circ + \varphi\right) + \sin\varphi$$

$$\iff \cos\left(50^\circ + \varphi\right) = 0$$

$$\iff 50^\circ + \varphi = 90^\circ$$

$$\iff \varphi = 40^\circ.$$

Dakle, trokut je jednakokračan jer je $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = 50^\circ$. Ovime je tvrdnja dokazana.

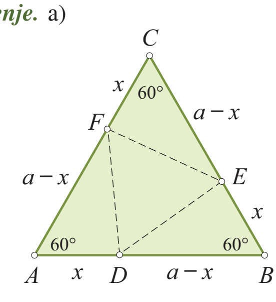
Marko Dodig (3), Zagreb

3854. *Neka je a duljina stranice jednakostraničnog trokuta ABC. Nadalje, točke $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$ i $F \in \overline{AC}$ zadovljavaju uvjete $|AD| = |BE| = |CF| = x$.*

a) Dokaži da je trokut DEF jednakostraničan.

b) Nađi vrijednost parametra x za koji je površina trokuta DEF minimalna.

Rješenje. a)



Sa slike i uvjeta zadatka vidimo

$$\triangle ADF \cong \triangle BED \cong \triangle CFE$$

(sukladne su im po dvije odgovarajuće stranice i kut između njih), pa slijedi

$$|FD| = |DE| = |EF|.$$

Dakle, trokut DEF je jednakostraničan.

b) Sada koristimo kosinusov poučak:

$$|FD|^2 = |DE|^2 = |EF|^2$$
$$= x^2 + (a-x)^2 - 2 \cdot x \cdot (a-x) \cdot \cos 60^\circ$$
$$= 3x^2 - 3ax + a^2.$$

Iz formule

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |EF|^2 \implies$$

$$P(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}ax + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Znači, površinu smo izrazili kao kvadratnu funkciju po nepoznanici x. Graf te funkcije je parabola i ekstremna vrijednost se postiže u tjemenu parabole (u našem slučaju se radi o minimumu jer je vodeći koeficijent $\frac{3\sqrt{3}}{4} > 0$). Koordinate tjemena su

$$T(x_0, y_0) = T\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{D}{4A}\right),$$

a u našem slučaju je $x_0 = -\frac{B}{2A} = \frac{a}{2}$.

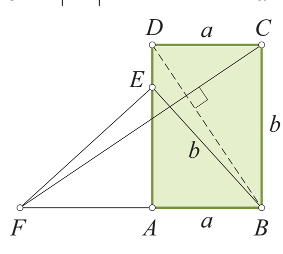
Dakle, minimalna vrijednost površine se postiže za $x = \frac{a}{2}$ i iznosi $P_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2$.

Marko Dodig (3), Zagreb

3855. *Dan je pravokutnik $ABCD$, $|AB| < |BC|$. Na stranici $\overline{AD}$ je točka E takva da je $|BE| = |BC|$. Pravac kroz C okomit na BD siječe AB u F. Dokaži da je $\measuredangle BEF$ pravi kut.*

Rješenje. Sa slike vidimo $\triangle BCD \sim \triangle FBC$, pa vrijedi

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{|BF|} \implies |BF| = \frac{b^2}{a}.$$

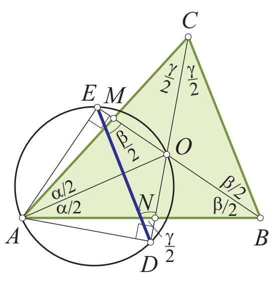


Iz $\triangle ABE$ je
$$\cos \measuredangle EBF = \frac{a}{b}.$$
Sada koristimo kosinusov poučak za trokut BEF:
$$\begin{aligned}|EF|^2 &= |BF|^2 + |BE|^2 \\ &\quad - 2 \cdot |BF| \cdot |BE| \cdot \cos \measuredangle EBF \\ &= \frac{b^4}{a^2} + b^2 - 2 \cdot \frac{b^2}{a} \cdot b \cdot \frac{a}{b} \\ &= \frac{b^4}{a^2} - b^2.\end{aligned}$$
Opet, po poučku o kosinusima za taj isti trokut je
$$\cos \measuredangle BEF = \frac{|EF|^2 + |BE|^2 - |BF|^2}{2 \cdot |EF| \cdot |BE|},$$
a jer je
$$\begin{aligned}&|EF|^2 + |BE|^2 - |BF|^2 \\ &= \frac{b^4}{a^2} - b^2 + b^2 - \frac{b^4}{a^2} = 0\end{aligned}$$
$$\Longrightarrow \cos \measuredangle BEF = 0 \Longrightarrow \measuredangle BEF = 90^\circ.$$
Time je tvrdnja zadatka dokazana.

Marko Dodig (3), Zagreb

3856. *Dan je trokut ABC. Pravci AD i AE su okomice iz vrha A na simetrale kutova C i B, tim redom. Dokaži $DE \parallel BC$.*

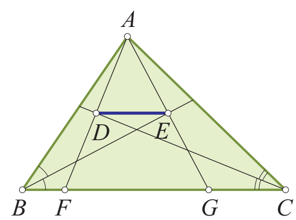
Prvo rješenje. Najprije uočimo da točke A, D, E, O leže na istoj kružnici, čiji je promjer $\overline{AO}$. Vidimo da je točka O centar upisane kružnice trokutu ABC.



Tako imamo:
$$\measuredangle AND = 180^\circ - \beta - \frac{\gamma}{2}$$
$$\begin{aligned}\measuredangle DAN &= 90^\circ - \left(180^\circ - \beta - \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= \beta + \frac{\gamma}{2} - 90^\circ.\end{aligned}$$
Tako je
$$\begin{aligned}\measuredangle OAD &= \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\gamma}{2} - 90^\circ \\ &= \underbrace{\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)}_{=90^\circ} + \frac{\beta}{2} - 90^\circ = \frac{\beta}{2}.\end{aligned}$$
Kao kutovi nad istim lukom kružnice je
$$\measuredangle OAD = \measuredangle OED = \frac{\beta}{2}.$$
Analogno je:
$$\measuredangle AME = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \gamma,$$
$$\measuredangle CAE = \frac{\beta}{2} + \gamma - 90^\circ$$
i potom $\measuredangle OAE = \frac{\gamma}{2}$. Ponovno za kutove nad istim lukom kružnice vrijedi:
$$\measuredangle OAE = \measuredangle ODE = \frac{\gamma}{2}.$$
Dobili smo:
$$\measuredangle OED = \measuredangle OBC = \frac{\beta}{2},$$
$$\measuredangle ODE = \measuredangle OCB = \frac{\gamma}{2},$$
pa se radi o kutovima s paralelnim kracima i vrijedi $DE \parallel BC$.

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Produžimo AD i AE do sjecišta F i G s BC. Trokuti ADC i FDC su sukladni jer je $AD \perp CD$ i $|AD| = |DF|$.

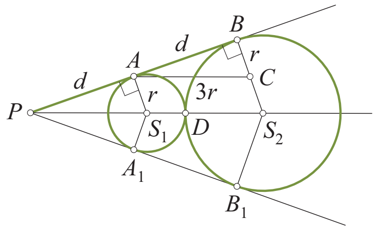


Slično su trokuti AEB i GEB sukladni, pa je $|AE| = |EG|$. U trokutu AFG su točke D i E polovišta od $\overline{AF}$ i $\overline{AG}$. Zato je $DE \| FG$, tj. $DE \| BC$.

Ur.

3857. *Dvije kružnice se dodiruju izvana, a PAB i PA_1B_1 su zajedničke tangente, pri čemu je $|PA| = |AB| = d$. Kolika je površina manjeg kruga?*

Rješenje. $|S_1S_2| = r_1 + r_2 = |AC|$.



$\triangle PS_1A \sim \triangle PS_2B$ (pravokutni trokuti imaju zajednički šiljasti kut kod vrha P)

$$\frac{|PB|}{|PA|} = \frac{2d}{d} = 2.$$

Ako je $r_1 = r$, onda je $r_2 = 2r$. Kako je $|AC| = |S_1S_2| = r_1 + r_2 = r + 2r = 3r$, a trokut ACB pravokutan, slijedi:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2,$$

$$(3r)^2 = d^2 + r^2$$

$$9r^2 = d^2 + r^2, \quad d^2 = 8r^2$$

pa je $r^2 = \dfrac{d^2}{8}$. Površina manjeg kruga jednaka je $P = r^2\pi$ ili $P = \dfrac{d^2\pi}{8}$.

Borna Cesarec (4),
Srednja škola Krapina, Krapina

3858. *Ako su c i h duljine hipotenuze i visine pravokutnog trokuta, dokaži nejednakost*

$$\frac{c}{h} + \frac{h}{c} \geq \frac{5}{2}.$$

Prvo rješenje. Koristeći da vrijedi $h = \dfrac{ab}{c}$, redom imamo:

$$\frac{c}{h} + \frac{h}{c} \geq \frac{5}{2}$$

$$\iff \frac{c^2}{ab} + \frac{ab}{c^2} \geq \frac{5}{2}$$

$$\iff \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{ab}{a^2+b^2} \geq \frac{5}{2}$$

$$\iff 2(a^2+b^2)^2 + 2a^2b^2 - 5ab(a^2+b^2) \geq 0$$

$$\iff 2a^4 - 5a^3b + 6a^2b^2 - 5ab^3 + 2b^4 \geq 0$$

$$\iff 2\cdot\frac{a^2}{b^2} - 5\cdot\frac{a}{b} + 6 - 5\cdot\frac{b}{a} + 2\cdot\frac{b^2}{a^2} \geq 0$$

Uvedemo li supstituciju $t = \dfrac{a}{b}$, imamo:

$$\iff 2t^2 - 5t + 6 - \frac{5}{t} + \frac{2}{t^2} \geq 0$$

$$\iff 2t^4 - 5t^3 + 6t^2 - 5t + 2 \geq 0$$

$$\iff 2t^4 - 2t^3 - 3t^3 + 3t^2 + 3t^2$$
$$- 3t - 2t + 2 \geq 0$$

$$\iff 2t^3(t-1) - 3t^2(t-1) + 3t(t-1)$$
$$- 2(t-1) \geq 0$$

$$\iff (t-1)(2t^3 - 3t^2 + 3t - 2) \geq 0$$

$$\iff (t-1)[2(t^3-1) - 3t(t-1)] \geq 0$$

$$\iff (t-1)^2[2(t^2+t+1) - 3t] \geq 0$$

$$\iff (t-1)^2(2t^2 - t + 2) \geq 0$$

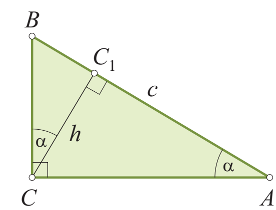
$$\iff 2(t-1)^2 \underbrace{\left[\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}\right]}_{>0} \geq 0.$$

Ova nejednakost je očito točna, a jednakost vrijedi kad je $t = 1$ tj. $a = b$, pa je pravokutni trokut jednakokračan. Tada još vrijedi $c = a\sqrt{2}$, $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Imamo

$$c = |AC_1| + |C_1B| = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} + h\operatorname{tg}\alpha.$$



Nejednakost prelazi u njoj ekvivalentnu

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha} \geqslant \frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right) + 1 \geqslant 0.$$

Neka je

$$u = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha} = 2.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$u^2 - \frac{5}{2}u + 1 = 0$$

su $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = 2$.

Za $u \geqslant 2$ je $u^2 - \frac{5}{2}u + 1 \geqslant 0$.

Ur.

3859. *Novčić A se baca tri puta, a novčić B četiri puta. Kolika je vjerojatnost da je broj glava u oba slučaja jednak?*

Rješenje. Imamo četiri mogućnosti da se u ova dva odvojena bacanja, dvaju različitih novčića, pojavio isti broj glava. Pojavilo se 0, 1, 2 ili 3 glave u oba događaja. Vjerojatnost da se u oba događaja pojavilo 0 glava je:

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{0} = \frac{1}{128},$$

gdje je $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ vjerojatnost pojavljivanja glave u tri bacanja novčića A, $\binom{3}{0}$ je broj rasporeda glava (u prvom slučaju ih nema), te analogno za četiri bacanja novčića B. Još smo iskoristili princip produkta.

Analogno, vjerojatnost da se u oba događaja pojavila 1 glava je:

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{1} = \frac{12}{128}.$$

Vjerojatnost da su se u oba događaja pojavile 2 glave je:

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{2} = \frac{18}{128},$$

i vjerojatnost da su se u oba događaja pojavile 3 glave je:

$$p_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{3} = \frac{4}{128}.$$

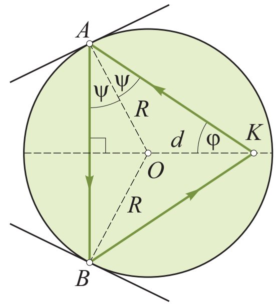
Dakle, tražena vjerojatnost je:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{35}{128} \approx 27.34 \ \%.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3860. *Stol za biljar ima oblik kruga polumjera R. Biljarska kugla se nalazi na stolu u položaju K i udaljena je od njegova središta O za d. Pod kojim kutom prema OK treba udariti kuglu da ona nakon druge refleksije od ruba stola opet prođe kroz položaj K?*

Rješenje. Najprije nacrtajmo odgovarajuću sliku.



Sa slike vidimo:

$$\varphi + 2\psi + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\varphi = 90^\circ - 2\psi,$$

gdje je ψ upadni kut, odnosno kut refleksije kugle (gledano prema okomici na tangentu povučenu u točki kružnice u kojoj se kugla odbila).

Poučak o sinusima za $\triangle AOK$ daje:

$$\frac{d}{\sin\psi} = \frac{R}{\sin\varphi}$$
$$\Longrightarrow R\sin\psi = d\sin\varphi$$
$$\Longrightarrow R\sin\psi = d\sin(90^\circ - 2\psi)$$
$$\Longrightarrow R\sin\psi = d\cos 2\psi$$
$$\Longrightarrow R\sin\psi = d(1 - 2\sin^2\psi)$$
$$\Longrightarrow 2d\sin^2\psi + R\sin\psi - d = 0$$
$$(\sin\psi)_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 8d^2}}{4d}.$$

Kako je $0 \leq \psi < 90^\circ$, uzimamo samo pozitivno rješenje sinusa upadnog kuta, tj. slijedi

$$\sin\psi = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 8d^2}}{4d}$$
$$\Longrightarrow \psi = \arcsin\frac{-R + \sqrt{R^2 + 8d^2}}{4d}.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 498. *Učenik ima dvije vrste utega od kojih jedni imaju 3 puta veću masu od drugih. Kad na istu oprugu objesi 3 manja utega, njena je duljina 19 cm, a kad objesi dva veća dugačka je 25 cm. Kolika je duljina neopterećene opruge?*

Rješenje.

$$m_1 = 3m_2$$

$$n_{\text{manjih}} = 3$$

$$l_1 = 19 \text{ cm}$$

$$n_{\text{većih}} = 2$$

$$\underline{l_2 = 25 \text{ cm}}$$

$$l_0 = ?$$

G – težina manjeg utega

$$F_1 = 3G$$

$$F_2 = 2 \cdot 3G = 6G.$$

Produljenje opruge je proporcionalno sa silom koja djeluje na oprugu. S dva veća utega na oprugu će djelovati dvostruko veća sila nego kad su na njoj tri manja utega pa će i produljenje biti dvostruko veće.

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

$$\Delta l_2 - \Delta l_1 = 25 \text{ cm} - 19 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$2\Delta l_1 - \Delta l_1 = 6 \text{ cm}$$

$$\Delta l_1 = 6 \text{ cm}$$

$$l_0 = l_1 - \Delta l_1 = 19 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 13 \text{ cm}.$$

Karla Belec (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 499. *Automobil se dvije trećine vremena gibao jednolikom brzinom, a trećinu je vremena jednoliko ubrzavao pri čemu je postigao dvostruko veću brzinu od početne. Koliki je omjer prijeđenih putova u prvom i drugom dijelu gibanja?*

Rješenje.

$$t_1 = \frac{2}{3}t, \quad t_2 = \frac{1}{3}t$$

$$\underline{v_2 = 2v_1 \qquad\qquad}$$

$$\frac{s_1}{s_2} = ?$$

$$s_1 = v_1 t_1 = \frac{2}{3} v_1 t.$$

Put prijeđen za vrijeme ubrzavanja možemo izračunati kao površinu u v-t grafu. Ta je površina u obliku trapeza kojem su osnovice v_1 i v_2, a visina t_2.

$$s_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t_2 = \frac{1}{2}(v_1 + 2v_1) \cdot \frac{1}{3}t = \frac{1}{2}v_1 t$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\frac{2}{3}v_1 t}{\frac{1}{2}v_1 t} = \frac{4}{3}.$$

David Pongrac (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 500. *Predmet visok 3 cm se nalazi na optičkoj osi ispred sabirne leće koja stvara stvarnu sliku visoku 6 cm. Kad se predmet približi leći za 15 centimetara nastaje prividna slika visoka 12 cm. Kolika je jakost te leće?*

Rješenje.

$$x = 3 \text{ cm}$$

$$y = 6 \text{ cm}$$

$$a_1 = a - 15 \text{ cm}$$

$$\underline{y_1 = 12 \text{ cm}}$$

$$j = ?$$

$$\frac{1}{f} = j = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

$$b = \frac{ay}{x} = 2a.$$

Slika je nakon pomicanja predmeta virtualna pa b_1 ima suprotan predznak od a_1, $b_1 = -4a_1$

$$j = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} = \frac{3}{2a}$$

$$j = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{4a_1}$$

$$= \frac{3}{4a_1} = \frac{3}{4(a - 15 \text{ cm})}$$

$$\frac{3}{2a} = \frac{3}{4(a - 15 \text{ cm})}$$

$$a = 4a - 60 \text{ cm}, \quad 2a = 60 \text{ cm}$$

$$a = 30 \text{ cm}, \quad b = 60 \text{ cm}$$

$$j = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{0.3\ \mathrm{m}} + \frac{1}{1.6\ \mathrm{m}}$$

$$j = 5\ \mathrm{dpt}.$$

Maja Unetić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 501. *Zemlji za jedan okret oko Sunca treba 365 dana i 6 sati, pa kažemo da godina ima 365 dana, a onih 6 sati brojimo zajedno svake prijestupne godine. Nekada je Zemlja brže rotirala oko svoje osi pa je godina imala 385 dana. Do promjena u brzini rotacije dolazi zbog promjena u udaljenosti Zemlje i Mjeseca. Kad bi te nekadašnje kraće dane podijelili na 24 sata koliko bi taj svaki sat imao sadašnjih minuta?*

Rješenje.

$T = 365\ \mathrm{d}\ 6\ \mathrm{h}$

$\underline{T_1 = 385\ \mathrm{d}}$

$h_1 = ?\ \mathrm{min}_1$

$1\ \text{godina} = 365\ \mathrm{d}\ 6\ \mathrm{h} = 8766\ \mathrm{h} = 525\,960\ \mathrm{min}$

$1\ \text{godina} = 385\ \mathrm{d} = 9240\ \mathrm{h}$

$9240 \cdot m_1 = 525\,960\ \mathrm{min}$

$$m_1 = \frac{525\,960\ \mathrm{min}}{9240} = 56.922\ \mathrm{min}.$$

Franko Doričić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1777. *Tijelo pada s vrha zgrade na tlo tako da u posljednjoj sekundi gibanja prevali 60.8 % visine zgrade. Ako je brzina izbačaja s vrha zgrade 7.9 m/s (prema dolje), odredi visinu zgrade i vrijeme pada tijela. Otpor zraka zanemariti.*

Rješenje. Koristeći formulu za slobodni pad $h = v_0 t + \frac{g}{2}t^2$ za trenutak pada i sekundu ranije, slijedi sustav jednadžbi:

$$h = 7.9t + \frac{9.81}{2}t^2,$$

$$h - 0.608h = 7.9(t-1) + \frac{9.81}{2}(t-1)^2,$$

h iz prve jednadžbe uvrstimo u drugu i jednostavnim sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu po t

$$2.982t^2 - 5.007t - 2.995 = 0,$$

čije je jedno pozitivno rješenje $t = 2.1526$ s.

Tu vrijednost uvrstimo u prvu jednadžbu sustava pa dobivamo visinu zgrade $h = 39.73$ m.

Marko Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1778. *Balon napunjen vodikom ima volumen 8.5 l. Odredi s koliko grama željeza možemo opteretiti balon da bi i dalje letio. Gustoće su: zrak 1.16 kg/m^3, vodik 0.08 kg/m^3 i željezo 7875 kg/m^3. Masa balona je 5 g, a volumen materijala balona i željeza je zanemariv.*

Rješenje. Ako s m_{Fe} označimo traženu masu željeza, ukupna masa koja težinom vuče balon prema dolje je $m_{\mathrm{Fe}} + m_{\mathrm{H_2}} + 0.005$ kg. Uz zanemariv volumen materijala balona i željeza, volumen je jednak volumenu vodika, tj. $V = 8.5\ \mathrm{l} = 0.0085\ \mathrm{m}^3$. Iz gustoće vodika, masa je

$$m_{H_2} = \rho \cdot V = 0.08 \cdot 0.0085 = 0.00068\ \mathrm{kg} = 0.68\ \mathrm{g}.$$

Da bi balon lebdio, omjer ukupne mase i volumena mora biti jednak gustoći zraka:

$$\frac{m}{V} = \frac{m_{\mathrm{Fe}} + 0.00568}{0.0085} = 1.16,$$

$$m_{\mathrm{Fe}} + 0.00568 = 0.00986$$

$$m_{\mathrm{Fe}} = 0.00418\ \mathrm{kg} = 4.18\ \mathrm{g}.$$

Ur.

1779. *Top ispucava granate početnom brzinom iznosa v_0, uz domet D i vrijeme leta T. Uz 31 m/s veću brzinu ispucavanja od v_0 i isti kut izbačaja, domet se poveća za 1530 m, a vrijeme leta za 3.9 s. Odredi početnu brzinu v_0 i kut izbačaja granate. Otpor zraka zanemariti.*

Rješenje. Za oba slučaja koristimo izraze za domet i vrijeme leta kosog hica:

$$D = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi,$$

$$T = \frac{2v_0}{g}\sin\varphi.$$

Za vrijeme leta imamo drugu jednadžbu

$$T + 3.9 = \frac{2(v_0 + 31)}{g}\sin\varphi,$$

pa oduzimanjem prve dobijemo

$$3.9 = \frac{2 \cdot 31}{9.81}\sin\varphi.$$

Odatle je

$$\sin\varphi = 0.6171, \quad \varphi = 38°6'16''.$$

Za domet druga jednadžba glasi

$$D + 1530 = \frac{(v_0+31)^2}{g}\sin 2\varphi.$$

Uvrštavanjem D iz prve jednadžbe i izračunatog $\sin 2\varphi = 0.9712$ imamo:

$$1530g = 2\cdot 31 v_0 \sin 2\varphi + 31^2 \sin 2\varphi,$$
$$15009.3 = 62\cdot 0.9712\cdot v_0 + 961\cdot 0.9712,$$
$$v_0 = 233.76 \text{ m/s}.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

1780. *Koliko dana (izmjena dan-noć) na Marsu protekne u jednoj marsovoj godini (jedan krug oko Sunca)? Izračunaj koristeći sljedeće podatke: period rotacije Marsa (siderički dan) traje 24 h 37 min i 23 s, a obiđe Sunce za 1.8808 Zemljinih godina.*

Rješenje. Izraženo u satima, Marsova godina traje $1.8808\cdot 365.25\cdot 24 = 16\,487.1$ sat. Siderički dan traje $24 + 37/60 + 23/3600 = 24.62306$ sati. No izmjena dan-noć traje dulje od sideričkog (zvjezdanog) dana, jer treba uračunati i pomak Marsa u odnosu na Sunce tijekom tog dana. Oduzimanjem kutnih brzina rotacije slijedi izraz

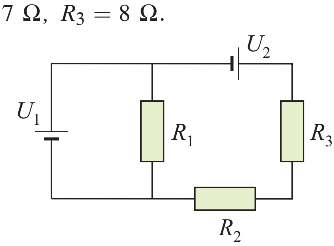
$$\frac{1}{T_{\text{Sunce}}} = \frac{1}{T_{\text{zvijezde}}} - \frac{1}{T_{\text{godina}}} = \frac{1}{24.62306} - \frac{1}{16487.1},$$
$$T_{\text{Sunce}} = 24.65989 \text{ sati}.$$

Konačno, u Marsovoj godini ima

$$\frac{T_{\text{godina}}}{T_{\text{Sunce}}} = 668.58 \text{ Marsovih dana}.$$

Ur.

1781. *Odredi struju i napon otpornika R_2 na shemi. $U_1 = 7$ V, $U_2 = 14$ V, $R_1 = 7$ Ω, $R_2 = 7$ Ω, $R_3 = 8$ Ω.*



Rješenje. U lijevoj petlji (A) imamo iz Kirchoffovog pravila: $U_1 = I_A R_1 - I_B R_1$.
U desnoj petlji (B) je

$$U_2 = I_B R_3 + I_B R_2 + I_B R_1 - I_A R_1.$$

Uvrštavanje u prvu jednadžbu daje $I_A = 1 + I_B$, pa iz druge jednadžbe imamo $I_B = 1.4$ A. Napon na otporniku R_2 tada je

$$U_{R_2} = I_B R_2 = 1.4\cdot 7 = 9.8 \text{ V}.$$

Dakle tražena struja i napon su 1.4 A i 9.8 V.

Marko Dodig (3), Zagreb

1782. *Automobil se penje uz kosinu konstantnog nagiba jednolikom brzinom. Pri snazi motora od 36.8 kW, brzina iznosi 48 km/h, a pri snazi 46.8 kW brzina je 60 km/h. Koliko se povećala sila otpora zraka na automobil?*

Rješenje. Zapišimo $P_1 = 36\,800$ W, $P_2 = 46\,800$ W, $v_1 = 40/3$ m/s, $v_2 = 50/3$ m/s. S obzirom da vrijedi

$$P_1 = F_1 v_1, \quad P_2 = F_2 v_2$$

povećanje sile otpora bit će

$$\Delta F = F_2 - F_1 = \frac{P_2}{v_2} - \frac{P_1}{v_1} = \frac{46\,800\cdot 3}{50} - \frac{36\,800\cdot 3}{40} = 48 \text{ N}.$$

Borna Cesarec (4),
Srednja škola Krapina, Krapina

1783. *Komet se giba oko Sunca tako da mu je brzina u perihelu 54 % veća od brzine u afelu. Odredi numerički ekscentricitet putanje kometa.*

Rješenje. Omjer brzine u perihelu i brzine u afelu je iz drugog Keplerovog zakona jednaka inverzu omjera odgovarajućih udaljenosti

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}},$$

a iz definicijskih veličina elipse, numerički ekscentricitet ε dobijemo iz izraza:

$$r_{\max} = a(1+\varepsilon), \quad r_{\min} = a(1-\varepsilon).$$

Kraćenjem velike poluosi a dobivamo

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad 1.54 = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$
$$\varepsilon = \frac{0.54}{2.54} = 0.2126.$$

Ur.