63. Državno natjecanje iz matematike, 10. – 12. svibnja 2022. g.

Ove godine je 11. svibnja 2022. održano Državno natjecanje iz matematike u Vodicama za učenike srednjih škola, A varijante i B varijante, Školsko natjecanje je održano 15. veljače, a Županijsko 24. ožujka. Zadatke je priredilo Državno povjerenstvo koje se sastoji od tri potpovjerenstva: za osnovne škole, srednje škole A varijante i srednje škole B varijante.

Za srednje je škole podijeljeno 4 prve, 11 drugih, 11 trećih nagrada i 14 pohvala za A varijantu, te 7 prvih, 7 drugih, 9 trećih nagrada i 19 pohvala za B varijantu.

Nagrade i pohvale učenika srednjih škola

A varijanta

I. razred

Nikola Vujica, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Marko Hrenić*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Val Karan*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Borna Čizmarević*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, *Luka Duplančić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Lana Milani*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka (III. nagrada); *Ratko Karačić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Karla Pogelšek*, XV. gimnazija, Zagreb, *Dario Vuksan*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

II. razred

Petra Grubišić, Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik (I. nagrada); *Barbara Kelava*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *David Lang*, XV. gimnazija, Zagreb, *Lara Semeš*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Petar Jukić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Marin Protulipac*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Marija Dora Marodi*, Gimnazija Josipa Slavenskog, Čakovec, *Lucija Pongrac*, XV. gimnazija, Zagreb, *Luka Protulipac*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

III. razred

Namik Agić, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Janko Bušelić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Santos Sepčić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Adian Anibal*, XV. gimnazija, Zagreb, *Borna Perković*, III. gimnazija, Split (II. nagrada); *Borna Banjanin*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ivan Janjić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Emanuel Tukač*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin (III. nagrada); *Lovre Pazinović*, III. gimnazija, Split, *Jagor Tambača*, XV. gimnazija, Zagreb, *Stella Čolo*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, *Vedran Ivanković*, Gimnazija Matije Antuna Reljkovića, Vinkovci (pohvala).

IV. razred

Vanja Vukmanović, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Dorijan Lendvaj*, XV. gimnazija, Zagreb, *Hrvoje Žlepalo*, Srednja škola Krapina, Krapina, *Petar Sruk*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Bernard Inkret*, XV. gimnazija, Zagreb, *Matej Vojvodić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (III. nagrada); *Patrik Pavić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ivan Jambrešić*, Privatna gimnazija i ekonomsko-informatička škola Futura s pravom javnosti, Zagreb, *Luka Passek-Kumerički*, XV. gimnazija, Zagreb, *Kristijan Šegovac*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (pohvala).

B varijanta

I. razred

Patrik Cvetek, Elektrotehnička škola, Split, *Petar Marić*, Srednja škola Dugo Selo, Dugo selo (I. nagrada); *Zvonko Andrijević*, II. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Mihael Miloslavić*, Biskupijska klasična gimnazija Ruđera Boškovića s pravom javnosti, Dubrovnik (III. nagrada); *Lorena Kaiser*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Stefano Stocco*, Talijanska srednja škola Dante Alighieri – Scuola media superiore italiana Dante Alighieri, Pola, Pula, *Tian Vlašić*, IX. gimnazija, Zagreb, *Matija Ljutić*, Prirodoslovna i grafička škola Rijeka, Rijeka (pohvala).

II. razred

Antun Kasalo, Gimnazija Sesvete, Sesvete, *Danijel Pilaj*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec (I. nagrada); *Karlo Levanić*, Graditeljska, prirodoslovna i rudarska škola, Varaždin, *Sonja Rajko*, Srednja škola Mate Balote, Poreć (II. nagrada); *Luka Klandir*, Srednja škola Zlatar, Zlatar (III. nagrada); *Tibor Andreani*, Tehnička škola Sisak, Sisak, *Artur Garifullin*, 1. gimnazija Split, Split, *Ema Pisanski*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Luka Vedriš*, Gimnazija dr. Ivana Kranjčeva Đurđevac, Đurđevac, *Matej Ban*, Srednja škola Hrvatski kralj Zvonimir, Krk, *Matija Krivec*, Gimnazija Sesvete, Sesvete (pohvala).

III. razred

Tin Jovanović, Graditeljska tehnička škola, Zagreb (I. nagrada); *Lucija Stipetić*, Gimnazija i strukovna škola Bernardina Frankopana, Ogulin, *Dora Gašparić*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec (II. nagrada); *Kristijan Bilanović*, Srednja škola Vrbovec, Vrbovec, *Dea Gubijan*, Srednja škola Vrbovec, Vrbovec, *Mateo Mitrović*, Srednja škola Biograd na Moru, Biograd na Moru (III. nagrada); *Noa Sorić*, Gimnazija Vladimira Nazora, Zadar, *Ela Benić*, Gimnazija Dubrovnik, Dubrovnik, *Vito Arić*, Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, *Viktor Delač*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Luka Stanić*, II. gimnazija, Zagreb (pohvala).

IV. razred

Bruno Brščić, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile, Pazin, *Antonio Jurešić*, Srednja škola Hrvatski kralj Zvonimir, Krk (I. nagrada); *Ivona Bosec*, Srednja škola Marka Marulića, Slatina, *Marko Ćiril Zovko*, IX. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Marko Cindrić*, I. gimnazija, Zagreb, *Marko Vujnović*, Gimnazija Sisak, Sisak, *Marko Vuković*, Gimnazija i strukovna škola Bernardina Frankopana, Ogulin, *Marko Ćavar*, Tehnička škola, Požega (III. nagrada); *Ana Jurčević*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Ivo Andričić*, Srednja škola Dragutina Stražimira, Sveti Ivan Zelina, *Dea Vladislavić*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Marko Pekas*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (pohvala).

Zadatci s Državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Natjecanje se održava u 11 učionica u kojima se nalazi isti broj klupa raspoređenih na isti način: u određenom broju stupaca i određenom broju redova. U svakoj je klupi po jedan učenik. Kada bi u svakoj učionici bio jedan red klupa manje i jedan stupac klupa više, bilo bi dovoljno 10 učionica, a još bi dvije klupe ostale prazne. Koliko ukupno može biti učenika na natjecanju ako je poznato da je njihov broj troznamenkast?

2. Odredi sve realne brojeve a za koje jednadžba
$$||x-2|-x+a| = x+3$$
ima točno dva realna rješenja.

3. Dan je jednakokračan trokut ABC kojemu je $\overline{BC}$ osnovica. S vanjske strane tog trokuta nacrtani su jednakokračni trokuti CBD, ACE i BAF slični trokutu ABC, kojima su osnovice redom $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{BF}$. Ako je $\sphericalangle CAB = 38°$, odredi $\sphericalangle EDF$.

4. Odredi sve parove nenegativnih cijelih brojeva (k, m) za koje vrijedi
$$3m^3 - m + 21 = 3^{3k+1} - 2 \cdot 3^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+2}.$$

5. Dan je konveksan mnogokut s 2022 vrha kojem se nikoje tri dijagonale ne sijeku u istoj točki. Potrebno je obojiti neke dijagonale crveno tako da iz svakog vrha izlazi barem jedna crvena dijagonala. Koliko je najmanji mogući broj sjecišta (u vrhu ili unutrašnjosti) crvenih dijagonala?

II. razred

1 Koeficijenti a, b i c kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ tri su uzastopna prirodna broja (u nekom od šest mogućih poredaka), a njezina su rješenja realni brojevi. Dokaži da je jedno od rješenja broj -1.

2 Dvije kružnice polumjera 1 i 3 diraju se izvana u točki A, a njihova vanjska zajednička tangenta ih dira u točkama B i C. Odredi zbroj kvadrata duljina stranica trokuta ABC.

3 Postoje li prirodni brojevi k i m takvi da je $2022^k + 2022^m$ kvadrat prirodnog broja?

4 Štapić je kvadar dimenzija $1 \times 1 \times 2$, a posuda je tijelo dobiveno uklanjanjem kockice $1 \times 1 \times 1$ iz kvadra dimenzija $3 \times 3 \times 2$ na sredini jedne od dviju polovica $3 \times 3 \times 1$. Ako je dopušteno koristiti koliko god je potrebno štapića i posuda, koliko je najmanje takvih tijela potrebno za sastavljanje kocke dimenzija $303 \times 303 \times 303$ bez rupa i preklapanja? Tijela je dopušteno rotirati.

5 Dani su pozitivni realni brojevi a, b, c takvi da je $abc = 1$. Dokaži da vrijedi
$$\frac{a + c\sqrt{a}}{a^2b + c + 2} + \frac{b + a\sqrt{b}}{b^2c + a + 2} + \frac{c + b\sqrt{c}}{c^2a + b + 2} \leq \frac{1}{2}(a + b + c).$$

III. razred

1 Odredi sve realne brojeve a takve da nejednakost
$$\cos(2x) + 2a\cos x + 7 \geq 0$$
vrijedi za sve realne brojeve x.

2 Odredi sve prirodne brojeve a i b takve da je
$$a^2 = 4b + 3 \cdot V(a, b),$$
pri čemu $V(m, n)$ označava najmanji zajednički višekratnik brojeva m i n.

3 Na stranici $\overline{AB}$ šiljastokutnog trokuta ABC nalazi se točka D. Neka su X i Y redom središta kružnica opisanih trokutima ADC i BCD. Dokaži da vrijedi
$$P(XDY) \geq \frac{1}{4}P(ABC),$$
gdje je $P(KLM)$ površina trokuta KLM. Kada vrijedi jednakost?

4 U ravnini kvadrata $ABCD$, ali izvan njega, nalazi se točka P. Ako je
$$|PA| = \sqrt{5}, \qquad |PB| = \sqrt{26} \qquad \text{i} \qquad |PD| = \sqrt{20},$$
odredi duljinu stranice kvadrata.

5 Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje *ne postoje* prirodni brojevi a, b, c takvi da je $n = a^2 + b^3 + c^6$.

IV. razred

1 Odredi sve prirodne brojeve m i n takve da je $2^{n!} = m^3 + 37$.

2 Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da za sve $x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{N}$ vrijedi:
$$(f(x) + 1)(f(y) + 1) = (x + 1)(f(y - 1) + 1) + f(x + 1).$$

3 Dani su kompleksni brojevi a, b i c za koje polinom
$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$
ima svojstvo da je apsolutna vrijednost svake njegove nultočke jednaka 1. Dokaži da i polinom
$$Q(x) = x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c|$$
ima isto svojstvo.

4 Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama P i Q. Pravac koji prolazi točkom Q siječe kružnice k_1 i k_2 još u točkama R i S, redom. Pravac SP siječe kružnicu k_1 još u točki M, a pravac RP siječe kružnicu k_2 još u točki N. Neka je T sjecište pravaca RM i SN. Dokaži da je trokut TMN jednakostraničan ako i samo ako je pravac MN zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2.

5 Dana je ploča dimenzija 2020×2022. Za dva polja te ploče kažemo da su *susjedna* ako imaju zajedničku stranicu ili se nalaze na početku i kraju istog retka ili stupca. Dakle, svako polje ima točno četiri susjedna polja. Viktor u svakom koraku bira jedno polje ploče i na ploču postavlja pet žetona: po jedan na odabrano polje i na svako polje susjedno odabranom. Nakon konačnog broja takvih koraka, na svakom polju nalazi se točno d žetona. Odredi najmanji mogući d.

Zadatci s Državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1 Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (a, b) takvih da je $a + b = 1000$ i da niti jedan od brojeva a i b ne sadrži znamenku 0 u svojemu dekadskom zapisu?

2 Odredite najveću vrijednost izraza $\left(\dfrac{12x^2 + 27y^2 + 12x + 36y + 29}{4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9}\right)^2$. Za koje se realne brojeve x, y ta vrijednost postiže?

3 Brod je ploveći rijekom prešao 24 km uzvodno i 28 km nizvodno. Za taj mu je put bilo potrebno pola sata manje nego za plovidbu 30 km uzvodno i 21 km nizvodno, odnosno, pola sata više nego za plovidbu 15 km uzvodno i 42 km nizvodno. Odredite brzinu broda na mirnoj vodi i brzinu rijeke (uz pretpostavku da se i brod i rijeka gibaju jednoliko).

4 Za koji $a \in \mathbb{R}$ jednadžba $||x + 2| - |2 - x| + 2| = 2 - a$ ima točno jedno rješenje?

5 Unutar jednakostraničnoga trokuta ABC stranice duljine 12 cm odabrana je točka T tako da vrijedi $|TP| : |TQ| : |TR| = 1 : 2 : 3$, pri čemu su P, Q i R nožišta okomica iz točke T na stranice trokuta. Kolika je površina trokuta $\triangle PQR$?

II. razred

1 Mara je odlučila svoj cvjetnjak pravokutnog oblika preoblikovati u cvjetnjak kvadratnog oblika. Ako za stranicu kvadratnog cvjetnjaka odabere jednu stranicu pravokutnog cvjetnjaka, dvostruka površina dobivenog kvadrata bit će za 12 m^2 veća od površine pravokutnika. Ako za stranicu kvadratnog cvjetnjaka odabere drugu stranicu pravokutnog cvjetnjaka, zbroj površine kvadrata i dvostruke površine pravokutnika bit će 16 m^2. Koje su dimenzije Marinog cvjetnjaka?

2 Riješite jednadžbu:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x-1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{12x}}=0.$$

3 Neka su α, β i γ kutovi trokuta. Ako je $\dfrac{\sin^2\gamma+\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\sqrt{3}$ odredite kut α.

4 Duljine stranice trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a najveći kut trokuta je dva puta veći od najmanjeg kuta trokuta. Odredite duljine stranica tog trokuta.

5 Funkcija f zadana je pravilom pridruživanja $f(x)=x^2-\sqrt{b}\cdot x+c$, pri čemu su b i c realni parametri. Kolika je vjerojatnost da će pri slučajnom odabiru parametara b i c iz intervala $[0,10]$ minimalna vrijednost zadane funkcije biti veća ili jednaka 2 i manja ili jednaka 3?

III. razred

1 Odredite najveću vrijednost funkcije

$$f(x)=\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2\frac{8}{x}$$

na intervalu $[1,64]$.

2 Na plesnom festivalu sudjeluju dvije plesne skupine. U prvom dijelu festivala svaki je plesač otplesao po jedan ples sa svakim plesačem iz svoje skupine. Niti jedan plesač iz jedne skupine nije plesao s plesačem iz druge skupine. Koliko je plesača u svakoj pojedinoj skupini ako one zajedno imaju 42 plesača, a u prvom dijelu festivala se ukupno otplesao 421 ples? Drugi dio festivala formiraju se plesni parovi od po jednog plesača iz svake plesne skupine. Koliki je maksimalan broj takvih parova koji se mogu naći na plesnom podiju? (*Napomena*: plesače ne razlikujemo po spolu.)

3. Zadani su vektori $\vec{u}=\vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{v}=7\vec{m}-5\vec{n}$, $\vec{w}=\vec{m}-4\vec{n}$ i $\vec{z}=7\vec{m}-2\vec{n}$, pri čemu su $\vec{m},\vec{n}\neq\vec{0}$. Ako su vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$, te $\vec{w}$ i $\vec{z}$ okomiti, odredite kut između vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

4 Odredite sve parove prirodnih brojeva a i b takvih da je $a^2-4b^2=a-2b+2^{2022}$.

5 Trapez s međusobno okomitim dijagonalama ima osnovice duljina $a=12$ i $c=4$, a produžetci krakova trapeza sijeku se pod kutom α. Ako je $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, izračunajte površinu tog trapeza.

IV. razred

1 Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{cases} \sin \dfrac{\pi x}{2022} - \sin \dfrac{\pi y}{2022} = 1 \\ x - y = 2022 \end{cases}$$

ako je $|x| \leqslant 2022$ i $|y| \leqslant 2022$.

2 Neka je S_n, $n \in \mathbb{N}$ zbroj prvih n članova geometrijskog niza. Ako je $S_{100} = 10$ i $S_{300} = 210$ koliko je S_{400}?

3 Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a > 0$ i $f(f(x)) = 4x + 9$, za sve realne brojeve x. Dokažite da je broj $(f(p-1))^n - (2np + 1)$ djeljiv s p^2 za bilo koji prost broj p i prirodni broj n.

4 Iz točke A izvan kružnice povučene su tangente na kružnicu k s diralištima u točkama B i C. Pravac paralelan s AC prolazi točkom B i siječe kružnicu k ponovno u točki D. Ako je $|AB| = 49$ i $|CD| = 28$ odredite duljinu $|AD|$.

5 Mare je odabrala 6 različitih znamenki iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Koristeći te znamenke zapisala je na papiru sve moguće šesteroznamenkaste brojeve kojima se znamenke ne ponavljaju. Ako je S zbroj svih zapisanih brojeva, odredite najveći prosti djelitelj broja S.

Matko Ljulj