O ULOZI MEMORIJE U MODELU VREDNOVANJA IMOVINE S HETEROGENIM UVJERENJIMA

dr. sc. Miroslav VERBIČ[1]
Institut za ekonomska istraživanja
Ljubljana, Slovenija

Izvorni znanstveni članak*
UDK 330
JEL C60, D83, D84, E32

Sažetak

U radu se analizira uloga memorije u modelu određivanja cijena s heterogenim uvjerenjima. Posebice je proučavan način na koji memorija u mjeri prilagodbe utječe na stabilnost evolucijskih adaptivnih sustava i opstanak tehničkog trgovanja. Kako bi se stekao uvid u promatranu problematiku, analizirana su dva slučaja: dihotomni slučaj fundamentalista protiv kontrasubjekata i trihotomni slučaj fundamentalista protiv uvjerenja suprotnih pristranosti. Ustanovljeno je da povećanje snage memorije stabilizirajuće djeluje na dinamiku sustava. No ono ne može eliminirati špekulativno ponašanje trgovaca u želji za kratkoročnim profitom. Nadalje, čini se da suprotne pristranosti, čak i kad ne postoje troškovi fundamentalista, ne vode kaotičnoj dinamici. Čini se kako su potrebna (jaka) uvjerenja ekstrapolatora trenda da bi se potaknule kaotične fluktuacije cijena imovine.

Ključne riječi: vrednovanje imovine, pristrana uvjerenja, kontrasubjekti, mjera prilagodbe, fundamentalisti, heterogena uvjerenja, snaga memorije, stabilnost

1. Uvod

Modeli heterogenih ekonomskih subjekata postoje u raznim područjima ekonomske analize poput modela preklapajućih generacija, modela tečaja, modela monetarne politike te modela socioekonomskog ponašanja. Ipak, čini se da je područje s najsustavnijim

* Primljeno *(Received):* 12.10.2007
Prihvaćeno *(Accepted):* 25.2.2008.

[1] Autor zahvaljuje Carssu H. Hommesu, Valentynu Panchenku, Janu Tuinstri i Florianu O. O. Wageneru sa Sveučilišta u Amsterdamu na korisnim prijedlozima i komentarima. Također zahvaljuje trima anonimnim recenzentima te recenzentu radne verzije članka sa Sveučilišta u Ljubljani. Odgovornost za iznesene tvrdnje i eventualne pogreške isključivo je autorova.

i možda najperspektivnijim nelinearnim dinamičkim pristupom upravo model određivanja cijene imovine. Doprinosi radova Brock i Hommes (1998), LeBaron (2000), Hommes i sur. (2002), Chiarella i He (2002), Chiarella, He i Zhu (2003), Gaunersdorfer, Hommes i Wagener (2003), Brock, Hommes i Wagener (2005), Hommes, Huang i Wang (2005) te Hommes (2006) detaljno pokazuju kako jednostavan model vrednovanja imovine može dovesti do složene dinamike, te samim time izuzetno otežati prognoziranje evolucije (razvoja) cijena na tržištima imovine. Osnovni analitički okvir takvog modela određivanja cijene imovine zapravo je primjena razvojne selekcije pravila očekivanja na financijskom tržištu. Tu su selekciju uveli Brock i Hommes (1997a), a naziva se i sustavom adaptivnih uvjerenja.

Kao model u kojemu subjekti imaju sposobnost mijenjanja uvjerenja, sustav adaptivnih uvjerenja u terminima standardnog određivanja cijene imovine diskontiranjem vrijednosti zapravo je izveden iz MV *(mean variance)* optimizacije te proširen na slučaj heterogenih uvjerenja (Hommes, 2006:47). Isti se može formulirati u terminima odstupanja od osnovnog *benchmarka*, te se može koristiti u eksperimentalnom i empirijskom testiranju odstupanja od *benchmarka* racionalnih očekivanja. Subjekti su ograničeno racionalni, djeluju neovisno jedan o drugome te svoje prognoze ili investicijske strategije temelje na vlastitim relativnim rezultatima. Takav sustav podrazumijeva aktivno učenje i prilagođavanje, a njegova je osnovna odrednica prirođena heterogenost (LeBaron, 2002). Drugim riječima, to znači da se tržišta mogu kretati od perioda u kojima se podržavaju različite skupine uvjerenja, do onih u kojima se ta ista uvjerenja i strategije odbacuju te je njihovo pojavljivanje vrlo rijetko.

Mješavina različitih tipova aktera na financijskom tržištu vodi do različitih dinamika koje predočuju neka stilizirana kvalitativna obilježja zapažena u praksi na financijskim tržištima (Campbell, Lo i MacKinlay, 1997; Johnson, Jefferies i Hui, 2003). Primjerice, riječ je o stalnosti, tj. nepromjenjivosti cijena imovine, nepredvidivosti povrata na dnevnoj razini, dugoročnom vraćanju cijena na njihovu prosječnu razinu, izrazitoj volatilnosti, grupiranju razdoblja povećane volatilnosti u skupine te distribuciji povrata imovine zaobljenijoj od normalne. Jedna od bitnijih spoznaja na tom području dosad jest da je nepravilno i kaotično ponašanje uzrokovano racionalnim izborom strategija predviđanja unutar ograničeno racionalnog okvira. Ono također iskazuje kvantitativna obilježja fluktuacija cijena imovine koje su zapažene na financijskim tržištima. Naime, zbog razlika u uvjerenjima ti modeli generiraju trajno velik opseg trgovine, koji je u suprotnosti s teoremom o nepostojanju trgovine u modelu racionalnih očekivanja. Stoga dijelovi različitih strategija trgovanja fluktuiraju tijekom vremena i jednostavna tehnička pravila trgovanja mogu opstati u evolucijskom natjecanju. U prosjeku tehnički analitičari mogu čak i zaraditi profit usporediv s onim što ga zarade fundamentalisti ili trgovci vrijednosti.

Novija literatura o modelima određivanja cijene imovine fokusira se uglavnom na utjecaj heterogenosti uvjerenja na tržišnu dinamiku i stabilnost u standardnom sustavu adaptivnih uvjerenja[2], te na mogućnost opstanka takvih "iracionalnih" špekulanata. Međutim, mnoga krucijalna pitanja vezana za same temelje modela određivanja cijene i teoretska razmatranja koja stoje iza njega ostaju otvorena. Jedno od tih pitanja vezano je

[2] Takav su model razradili Brock i Hommes (1997a).

za vremenske horizonte investitora, tj. za njihove perspektive planiranja i vrednovanja. Naime, dosad je vrlo slabo objašnjeno kako memorija, tj. udio prošlih informacija koje ekonomski subjekti kao donositelji odluka uzimaju u obzir, utječu na stabilnost evolucijskih adaptivnih sustava i opstanak tehničkog trgovanja.

LeBaron se (2002) koristio simuliranim financijskim tržištima utemeljenim na individualnim tržišnim subjektima, koji se vode relativno jednostavnim pravilima ponašanja što se s vremenom dograđuju. U biti, vrijeme i jest esencijalno obilježje tog modela. LeBaron je želio dokazati da se osoba koja svijet vidi stacionarnim, nepromjenjivim pri formiranju vlastitih uvjerenja treba služiti svim dostupnim informacijama. Nasuprot tome, ako osoba vidi svoje okruženje kao konstantno mijenjajuće, preporučljivo se koristiti serijama s manjim brojem prošlih podataka. Stoga se upravo objašnjena dvojba promatra kao evolucijski izazov pri kojemu se subjekti s dugotrajnim pamćenjem, koristeći se mnogim prošlim podacima, suprotstavljaju onima s kratkoročnim pamćenjem u borbi za tržišnu dominaciju. Pokazalo se da subjekti s kratkoročnom perspektivom utječu na tržište u smislu povećanja volatilnosti prinosa, ali i da stvaraju evolucijski prostor u kojemu oni sami mogu prosperirati. Promjena populacije ka subjektima s dugoročnijom memorijom dovela je do konvergencije strategija. Memorija ili, bolje rečeno, njezin nedostatak, pokazao se važnim aspektom koji sprečava konvergenciju tržišta i eliminaciju "iracionalnih", špekulativnih strategija.

Honkapohja i Mitra (2003) dobili su rezultate analize dinamike adaptivnog učenja u slučaju kad pravilo učenja ima konačnu memoriju i slučajni šokovi sprečavaju konvergenciju prema ravnoteži racionalnih očekivanja. Autori su se fokusirali na učenje kao stohastičku dinamičku ravnotežu. Iako se njihov rad ne odnosi na okruženje heterogenih subjekata, dobiveni su rezultati zanimljivi i u kontekstu ovog rada. Njihov osnovni doprinos jest tzv. načelo stabilnosti očekivanja, koje ima bitnu ulogu i u modelu potpunog učenja (Evans i Honkapohja, 2001). To načelo ne gubi na značajnosti ni u analizi nepotpunog učenja, ali poprima novi oblik. U modelima koje su navedeni autori analizirali stabilnost očekivanja jamčila je stacionarnost dinamike ekonomije učenja, kao i nepristranost predviđanja.

Chiarella, He i Hommes (2006) predložili su model dinamičkoga financijskog tržišta u kojemu se potražnja za trgovanom imovinom u sklopu ograničene racionalnosti može dekomponirati na potražnju fundamentalista i na onu tehničkih analitičara. Potražnja posljednjih pritom je određena razlikom između tekuće cijene i (dugoročnoga) pomičnog prosjeka cijena. Proučavanjem dinamike pomičnog prosjeka cijena otkrili su da povećanje vremenskog pomaka pomičnog prosjeka može destabilizirati inače stabilan sustav te dovesti do složenoga, pa čak i do kaotičnog ponašanja. Analiza odgovarajućega stohastičkog modela objasnila je različite tržišne fenomene poput privremenih napuhavanja cijena (*bubble*), iznenadnih slomova tržišta, otpornosti cijena ili pak promjene razine cijena.

Cilj ovog rada jest odrediti polazišta za kompetentnu i kritičku teoretsku analizu utjecaja memorije u jednostavnome, analitički lako obradivome modelu određivanja vrijednosti imovine s heterogenim uvjerenjima. Stoga će biti analiziran učinak povećanja memorije u mjeri prilagodbe evolucijskim adaptivnim sustavima te priroda njegovih posljedica na opstanak tehničkog trgovanja. Radi odbacivanja ili prihvaćanja hipoteze rada, provedena je adekvatna kvalitativna i numerička analiza. Dakle, najprije će model određivanja cijene imovine biti proširen za pretpostavku uključivanja memorije. Time će, ako bude moguće, biti pokriveni neki osnovni aspekti financijskih tržišta: 1. dualni slučaj fundamentalista protiv kontrasubjekata[3], 2. trihotomni slučaj fundamentalista protiv uvjerenja suprotnih pristranosti. Dopunjavajući analizu stabilnosti teorijom lokalnih bifurkacija, bit će moguća i numerička analiza utjecaja dodavanja različitih količina memorije mjeri prilagodbe na stabilnost standardnog modela određivanja cijene imovine, kao i na opstanak tehničkog trgovanja. Stoga će biti moguća i lokalna i globalna analiza stabilnosti za različite kombinacije tipova trgovaca.[4]

Slijedi kratak pregled rada. U drugom poglavlju izložen je model određivanja cijene imovine s heterogenim uvjerenjima koji dopušta endogene evolucijske promjene strategija. Time će biti osigurani temelji za analizu ekonomskih fluktuacija i implicirajućih pravila vezanih za formuliranje očekivanja. Pritom će biti naglašena uloga memorije u mjeri prilagodbe i moguće posljedice na ishod modela. U 3. i 4. poglavlju bit će kvalitativno i numerički analizirana dva spomenuta slučaja. Također će biti izloženi osnovni rezultati ispitivanja učinaka različitih tipova trgovaca na tržišnu stabilnost, zajedno s rezultatima analize učinaka promjene memorije na tržišna kretanja različitih ekonomskih kategorija. U posljednjem će poglavlju biti sažeti osnovni zaključci rada.

2. Model heterogenih subjekata

Sustav adaptivnih uvjerenja temelji se na mehanizmu koji promatra interakciju između skupina različitih tipova trgovaca te razliku između fundamentalnih (osnovnih) i stvarnih cijena. Financijska su tržišta, dakle, promatrana kao evolucijski sustavi, pri čemu su fluktuacije cijena potaknute evolucijskom dinamikom među različitim shemama očekivanja. Početni istraživački rad na tom području potaknuli su Brock i Hommes (1997a), koji su pokušali pomiriti dvije glavne struje u objašnjavanju ekonomskih fluktuacija – neoklasičnu i kejnezijansku (Hommes, 2006:1-5), te objasniti osnovna pravila u formuliranju očekivanja. Kako bismo teoretski analizirali taj problem, opisat ćemo jednostavan i analitički lako primjenjiv model određivanja cijene imovine, kakav su uveli i Brock i Hommes (1998). Model se može dekomponirati na dva simultana dijela: određivanje sadašnje vrijednosti imovine i evolucijsku selekciju strategija. Oni će zajedno rezultirati ravnotežnom jednadžbom određivanja cijene i jednadžbom frakcija tipova uvjerenja. Također će biti istaknuto gdje memorija ulazi u model u mjeri prilagodbe (i u pravilima očekivanja) i na koji bi način eventualno mogla utjecati na analizu.

2.1. Određivanje sadašnje vrijednosti imovine

Promatrani se model sastoji od jedne rizične i jedne nerizične imovine. Ponuda posljednje imovine savršeno je elastična pri bruto povratu R, gdje je $R = 1+ r$. Pritom h različitih tipova investitora ima različita uvjerenja o uvjetnom očekivanju i uvjetnoj varijanci varijabli koje se modeliraju, i to na temelju javno raspoloživih informacija o proš-

[3] To su pobornici tzv. *contrarian* investicijske strategije, koja zagovara ponašanje suprotno od psihologije mase, čiji je *modus operandi* kupovanje kad svi ostali panično prodaju i oprez kad svi ostali euforično kupuju.

[4] Trgovac imovinom na tržištu kapitala (engl. *trader*)

lim cijenama i dividendama. Dio sustava adaptivne potražnje koji se odnosi na određivanje sadašnje vrijednosti imovine služi za modeliranje svakoga pojedinog tipa investitora u obliku kratkoročnog *mean variance* maksimizatora očekivane potražnje za bogatstvom, $E_{h,t}W_t$, i to za rizičnu imovinu:

$$E_{h,t}W_{t+1} = RE_{h,t}W_t + (p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t)z_{h,t}, \tag{1}$$

pri čemu je p_t cijena (bivša dividenda) u vremenu t po dionici rizične imovine, a y_t proces koji se odnosi na nezavisnu, jednako distribuiranu (n.j.d.) dividendu rizične imovine u vremenu t. Veličina $z_{h,t}$ odnosi se na broj dionica što ih je u vremenu t kupio ekonomski subjekt tipa h, dok je $R_{t+1} = p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t$ prekomjerni povrat. Kako bi se provela kratkoročna *mean variance* maksimizacija očekivane potražnje za bogatstvom za rizičnu imovinu tipa h, potrebno je pronaći $z_{h,t}$ koji rješava:

$$\max_{z_{ht}} \left\{ E_{h,t}W_{t+1} - \frac{1}{2} aV_{h,t}W_{t+1} \right\}. \tag{2}$$

Stoga vrijedi:

$$z_{h,t} = \frac{E_{h,t}\left[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t\right]}{aV_{h,t}\left[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t\right]} = \frac{1}{a\sigma^2} E_{h,t}\left[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t\right], \tag{3}$$

pri čemu je $E_{h,t}W_{t+1}$ uvjerenje o očekivanoj vrijednosti bogatstva u vremenu $t+1$, uvjetovano na sve javno dostupne informacije u vremenu t, i to za trgovca tipa h. Uvjerenje o uvjetnoj varijanci jest $V_{h,t}W_{t+1}$, a postoji i faktor rizika $k = \frac{1}{a\sigma^2}$. Pretpostavlja se da su uvjerenja o uvjetnoj varijanci prekomjernog povrata konstantna i jednaka za sve jednake tipove investitora, tj. $V_{h,t} = \sigma^2$. Također se polazi od pretpostavke da sve trgovce karakterizira averzija na rizik, dana parametrom a, koji je konstantan kroz vrijeme.[5]

Rješavanje tog problema optimizacije dovodi do broja dionica što su ih kupili različiti tipovi subjekata, čime je moguće traženje ravnoteže između konstantne ponude rizičnih imovina po trgovcu z^s i zbroja potražnji:

$$\sum_{h=1}^{H} n_{h,t} k E_{h,t}\left[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t\right] = z^s, \tag{4}$$

gdje je $n_{h,t}$ udio trgovca tipa h od ukupno H tipova u vremenu t, te vrijedi da je $\sum_{h=1}^{H} n_{ht} = 1$.

Cijena rizične imovine određena je čišćenjem tržišta, što se može vidjeti ako se jednadžba (4) reformulira u oblik:

[5] Gaunersdorfer je (2000) istraživao slučaj promjenjive varijance te je podupro pretpostavku o konstantnoj i homogenoj varijanci.

$$Rp_t = \sum_{h=1}^{H} n_{h,t} E_{h,t}\left[p_{t+1} + y_{t+1}\right] - a\sigma^2 z^s, \tag{5}$$

gdje je $a\sigma^2 z^s$ premija na rizik. Riječ je, zapravo, o dodatnoj količini novca koju trgovci dobiju za držanje rizične imovine. Trgovci će kupiti rizičnu imovinu samo ako je njezina očekivana vrijednost veća ili jednaka očekivanoj vrijednosti nerizične imovine. Kako je ishod kupovine rizične imovine neizvjestan, uz nju se veže premija na rizik.

U najjednostavnijem primjeru n.j.d. dividendi sa srednjom vrijednosti $\bar{y}$, uz pretpostavku da trgovci imaju ispravna uvjerenja o dividendi, tj. $E_{h,t}\left[y_{t+1}\right] = \bar{y}$, tržišna cijena rizične imovine p_t u vremenu t bit će određena prema formuli:

$$Rp_t = \sum_{h=1}^{H} n_{h,t} E_{h,t}\left[p_{t+1}\right] + \bar{y} - a\sigma^2 z^s + \varepsilon_t, \tag{6}$$

gdje je uključen bijeli šum ε_t, koji označava slučajne fluktuacije ponude rizičnih dionica. Promotri li se poseban slučaj s konstantnom ponudom drugih dionica jednakom nuli, tj. $z^s = 0$, vrijedit će:

$$Rp_t = \sum_{h=1}^{H} n_{h,t} E_{h,t}\left[p_{t+1}\right] + \bar{y} + \varepsilon_t.$$

Ako se pak umjesto toga razmotri model s homogenim uvjerenjima bez šuma, u kojemu su svi trgovci racionalni, cjenovna će jednadžba biti pojednostavnjena na oblik:

$$Rp_t = E_t\left[p_{t+1}\right] + \bar{y} - a\sigma^2 z^s. \tag{7}$$

U ravnotežnom stanju očekivana će cijena biti jednaka osnovnoj. Spomenuta osnovna cijena rizične imovine $p*$ u slučaju homogenih uvjerenja bit će izvedena iz izraza:

$$Rp* = p* + \bar{y} - a\sigma^2 z^s. \tag{8}$$

Nametanjem uvjeta transverzalnosti izrazu (7) s beskonačno mnogo rješenja rezultirat će isključivanjem *bubble* rješenja (*cf*. Cuthbertson, 1996), te će izraz (8) imati samo jedno rješenje. Na temelju toga moguće je odrediti temeljnu cijenu te diskontiranu sumu očekivanih vrijednosti budućih dividendi:

$$p* = \frac{1}{R-1}\left[\bar{y} - a\sigma^2 z^s\right]. \tag{9}$$

Pojednostavnjivanjem temeljne cjenovne jednadžbe za slučaj n.j.d. procesa dividendi s konstantnim uvjetnim očekivanjem moguće je dobiti standardnu *benchmark* fundamentalnu vrijednost, tj. $p_t* = \frac{\bar{y}}{r}$, koja će biti primijenjena u daljnjem dijelu rada.

Uzevši u obzir odgovarajući oblik heterogenih uvjerenja o budućim cijenama, tj. uključivanjem u model determinističke funkcije, koja se razlikuje za sve tipove trgovaca i glasi:

$$E_{h,t}\left[p_{t+1}\right] = E_t\left[p^*_{t+1}\right] + E_{h,t}\left[x_{t+1}\right] = p^*_{t+1} + f_h\left(x_{t-1},\ldots, x_{t-L}\right),$$

zapravo ograničavamo uvjerenja o sljedećem odstupanju tekuće od cijene fundamentalne, x_t, na determinističke funkcije prošlih odstupanja od fundamentalne cijene:

$$E_{h,t}\left[p_{t+1}\right] = p* + f_h\left(x_{t-1},\ldots, x_{t-L}\right), \tag{10}$$

gdje je L broj vremenskih pomaka uzet u obzir za prošle informacije. Kako deterministička funkcija u pravilu očekivanja ovisi o prethodnim odstupanjima cijena, takav se korak zapravo može shvatiti i kao uključivanje memorije u model. Budući da uključivanje više prethodnih odstupanja cijena povećava dimenzije sustava i njegovu kompleksnost, ono dosad uglavnom nije bilo korišteno. Stoga se ovaj rad, kad se u model uključi samo jedan vremenski pomak u memoriji u pravilu očekivanja, tj. $f_h\ (x_{t-1})$, fokusira upravo na memoriju u mjeri prilagodbe.

Uzevši u obzir da vrijedi $p_t* = \frac{\bar{y}}{r}$, ravnotežna se cjenovna jednadžba (5) konačno može reformulirati u terminima odstupanja od temeljne cijene, $x_t = p_t - p*$:

$$Rx_t = \sum_{h=1}^{H} n_{h,t} E_{h,t}\left[x_{t+1}\right] = \sum_{h=1}^{H} n_{h,t} f_{h,t}. \tag{11}$$

Konkretni oblik determinističke funkcije u prognoziranju ili pravilu očekivanja zapravo je determinanta različitih tipova heterogenih subjekata u sustavu adaptivnih uvjerenja. Općenito, razlikujemo dva osnovna tipa investitora: fundamentaliste i tehničke analitičare. Fundamentalisti svoja uvjerenja temelje na pretpostavci da je cijena imovine određena isključivo njezinom fundamentalnom (temeljnom) vrijednošću hipoteze efikasnog tržišta (Fama, 1991), odnosno sadašnjom vrijednošću niza budućih dividendi. Budući da fundamentalisti nemaju nikakvih spoznaja o drugim uvjerenjima i frakcijama, vrijedi $f_{h,t} \equiv 0$. Stvarni financijski podaci pokazuju da fundamentalisti imaju stabilizirajući učinak na cijene (De Grauwe and Grimaldi, 2006).

Tehnički su analitičari[6], pak, uvjereni kako realne cijene imovine nisu potpuno determinirane temeljnom cijenom, već se mogu predvidjeti na temelju kretanja prošlih cijena. Ovisno o cilju analize, moguće je razdvojiti (čiste) fundamentaliste s pravilom očekivanja $f_{h,t} = g_h x_{t-1};\ g_h > 0$, (čiste) kontrasubjekte s pravilom očekivanja $f_{h,t} = g_h x_{t-1};\ g_h < 0$, te (čiste) subjekte s pristranim uvjerenjima, s pravilom očekivanja $f_{h,t} = b_h$. Pritom je g_h trend, a b_h pristranost trgovca tipa h (razlika između $p*$ i trgovčeva uvjerenja o $p*$).

[6] Uvriježen je i engl. naziv *chartists*, za koji ne postoji adekvatan hrvatski termin.

2.2. Evolucijska selekcija strategija

Kako bismo razumjeli dinamiku frakcija tipova trgovaca, nužno je razmotriti odgovarajuće formulacije realiziranoga prekomjernog povrata R_t iz jednadžbe (1) te potražnju različitih tipova trgovaca, $z_{h,t-1}$, definiranu izrazom (3).

Uzevši u obzir prirodu procesa dividendi $y_t = \bar{y} + \delta_t$ s konstantnim uvjetnim očekivanjem, $\bar{y} = E\left[y_{t+1}\right]$, te pretpostavljenom distribucijom $\delta_t : \mathrm{IIDN}(0,)\,\vartheta^2$, možemo formulirati jednadžbu profita svakoga pojedinog tipa trgovca u svakom periodu. Riječ je, naime, o produktu realiziranoga prekomjernog povrata i broja dionica kupljenih od trgovca tog tipa:

$$\pi_{h,t} = R_t z_{h,t-1} - C_h = (p_t + y_t - Rp_{t-1})\, kE_{h,t-1}\left[p_t + y_t - Rp_{t-1}\right] - C_h, \tag{12}$$

pri čemu su C_h troškovi koje trgovcima nameće primjena strategije h. Unatoč činjenici da takav korak čini model nešto složenijim, za određivanje tipa trgovca bit će upotrijebljeni upravo troškovi. Naime, logično je da će troškovi strategije trgovca rasti s povećanjem broja informacija koje se u njoj koriste.

Prikladno je reformulirati jednadžbu profita različitih tipova trgovca u terminima odstupanja od fundamentalne cijene:

$$\pi_{h,t} = (x_t - Rx_{t-1} + \delta_t)\, kE_{h,t-1}\left[x_t - Rx_{t-1}\right] - C_h. \tag{13}$$

Time se funkcija prilagodbe, tj. mjera uspješnosti svakoga pojedinog tipa trgovca, može definirati u terminima njegova realiziranog profita. Preciznije, može se definirati kao ponderirani zbroj realiziranih profita, tj. zbroj tekućih realiziranih profita i udio prošle prilagodbe, koja se pak definira kao prošli realizirani profiti:

$$U_{h,t} = wU_{h,t-1} + (1-w)\,\pi_{h,t}, \tag{14}$$

gdje su tekući realizirani profiti definirani u sljedećemu, konačnom obliku:

$$\pi_{h,t} = k\,(x_t - Rx_{t-1})(f_{h,t-1} - Rx_{t-1}) - C_h. \tag{15}$$

Funkcija prikladnosti za $U_{h,0} = 0$ također može biti revidirana u ovom obliku s eksponencijalno padajućim ponderima:

$$U_{h,t} = w^{t-1}(1-w)\,\pi_{h,1} + w^{t-2}(1-w)\,\pi_{h,2} + \ldots + w\,(1-w)\,\pi_{h,t-1} + (1-w)\,\pi_{h,t}.$$

Ravnotežna jednadžba vrednovanja pritom je definirana kao zbroj umnožaka frakcija pojedinih tipova trgovaca i njihovih determinističkih funkcija. U slučaju ravnotežne jednadžbe vrednovanja prilagodbe ulaze u sustav adaptivnih uvjerenja prije nego što je opažena ravnotežna cijena. To je prikladno za analiziranje modela vrednovanja imovine kao eksplicitne nelinearne diferencijske jednadžbe. Iako se nelinearna dinamika vrednovanja imovine može modelirati kao deterministički i kao stohastički proces, samo posljednji omogućuje istraživanje utjecaja šuma na dinamiku određivanja cijene.

Udio prošle prilagodbe u mjeri uspješnosti izražava se parametrom w; $0 \leq w \leq 1$, koji se naziva snagom memorije. Kad je vrijednost tog parametra jednaka nuli ($w = 0$), prilagodba je dana najrecentnijim neto realiziranim profitom. Zahvaljujući analitičkoj prilagodljivosti, to je najčešće slučaj u postojećoj literaturi o modelima određivanja cijene imovine s heterogenim subjektima, ali ne i u ovom radu. Naime, osnovni doprinos ovog rada jest analiza slučaja u kojemu je memorija različita od nule u mjeri prilagodbe. Kad parametar snage memorije poprimi pozitivnu vrijednost, određeni udio tekućih realiziranih profita u nekom danom periodu uzet je u obzir pri izračunavanju mjere uspješnosti u sljedećem periodu. Naravno, ako navedeni parametar poprimi vrijednost 1, u obzir se uzima cjelokupno bogatstvo akumulirano do trenutka promatranja.

Jednadžba funkcije prilagodbe (14) donekle je drukčija od one koju su primijenili Brock i Hommes (1998), u kojoj je koeficijent tekućih realiziranih profita fiksiran na vrijednost 1. Naime, ako se parametar snage memorije zapiše kao $w = 1 - \frac{1}{T}$, pri čemu je T određeni broj vremenskih perioda, funkcija prilagodbe može se izraziti ovako:

$$U_{h,t} = \left(1 - \frac{1}{T}\right) U_{h,t-1} + \frac{1}{T} \pi_{h,t}, \tag{16}$$

što je ekvivalentno uzimanju posljednjih T zapažanja s jednakim ponderom. Kako T konvergira beskonačnosti, tako se memorijski parametar približava jedinici, te se cjelokupno akumulirano bogatstvo uzima u obzir u analizi. Stoga je vjerojatno da je izraz (14) pogodnija formulacija mjere prilagodbe od one što su je upotrijebili Brock i Hommes (1998) i koju nalazimo u nekolicini drugih radova.

Konačno, sada je moguće multinomnim logit modelom, koristeći se parametrom β, izraziti frakcije tipova uvjerenja, $n_{h,t}$, koje su ažurirane u svakom periodu, kao diskretne vjerojatnosti izbora:

$$n_{h,t} = \frac{\exp\left[\beta U_{h,t-1}\right]}{\sum_{i=1}^{H} \exp\left[\beta U_{i,t-1}\right]}. \tag{17}$$

Navedni parametar β određuje brzinu kojom ekonomski subjekti mijenjaju strategije predviđanja. Ako je intenzitet izbora jednak nuli, tada svi trgovci imaju jednak ponder, te se ukupan broj trgovaca jednoliko raspoređuje prema postojećim strategijama. No ako se intenzivnost izbora približava beskonačnosti (tzv. neoklasični limit), tada svi trgovci teže primjeni najboljeg prediktora, tj. strategiji s najvećom prilagodbom.

Frakcije trgovaca su, dakle, određene prilagodbom i intenzitetom izbora. Rangirane su prema prilagodbi, ali ne biraju svi ekonomski subjekti najbolji prediktor. Stoga je očito da je racionalnost u modelu određivanja cijene ograničena. Kako bi se osiguralo da frakcije tipova uvjerenja ovise samo o odstupanjima od temeljne cijene koja se mogu promatrati u nekom određenom vremenskom periodu, funkcija prilagodbe u jednadžbi frakcija tipova uvjerenja smije ovisiti isključivo o prošlim prilagodbama i prošlim vrijednostima povrata. Takva restrikcija osigurava da su prošli realizirani profiti veličine koje se mogu promatrati i koristiti pri odabiru prediktora.

Pitanje koje se nameće jest je li kratkoročna *mean variance* maksimizacija trgovaca realna pretpostavka, posebno zato što je u modelu dopuštena dugotrajnija memorija trgovaca. Ta je pretpostavka često korištena u ekonomskome i financijskome modeliranju, iako bi zasigurno bilo zanimljivo promotriti model u kojemu trgovci imaju sposobnost planiranja do u daleku budućnost. Ili, primjerice, čak u beskonačnost, kao u Lucasovu modelu određivanja cijena imovine (1978). Međutim, u takvim se modelima obično pretpostavlja savršena racionalnost radi prilagodljivosti analize. Dosad se vrlo mali broj radova bavio modelima s beskonačnim vremenskim horizontom trgovaca te s ograničenom racionalnošću i heterogenim uvjerenjima. Nadalje, diskutabilna je i sposobnost pojedinca da planira za tako dugo razdoblje unaprijed, umjesto da se, primjerice, koristi jednostavnom heuristikom za kraće vremensko razdoblje i povremeno je prilagođava. Naposljetku, memorija u mjeri prilagodbe nije ekvivalent vremenskom horizontu planiranja, već "evoluacijski horizont" kojim se trgovac koristi kako bi odlučio o eventualnoj promjeni strategije. Postoje empirijski i eksperimentalni dokazi o tome kako ljudi pridaju veće značenje novijoj prošlosti nego onoj daljoj, a upravo je to formalizirano u modelu primijenjenom u ovom radu.

3. Fundamentalisti protiv kontrasubjekata

Prvi primjer koji će biti analiziran jest dualni model heterogenih subjekata, s fundamentalistima i kontrasubjektima kao tržišnim sudionicima. Fundamentaliste karakterizira deterministička funkcija oblika:

$$f_{1,t} \equiv 0 \tag{18}$$

te imaju određeni pozitivni trošak skupljanja informacija C, tj. $C > 0$. Kontrasubjekte obilježava ova deterministička funkcija:

$$f_{2,t} = gx_{t-1};\ g < 0 \tag{19}$$

i informacijski trošak jednak nuli. Riječ je, dakle, o slučaju fundamentalista protiv čistih kontrasubjekata. Jednadžba frakcija tipova uvjerenja ima oblik:

$$n_{h,t} = \frac{\exp\left[\beta U_{h,t-1}\right]}{\exp\left[\beta U_{1,t-1}\right] + \exp\left[\beta U_{2,t-1}\right]};\ h = 1, 2. \tag{20}$$

Radi praktičnosti, uvest ćemo i diferenciju frakcija, m_t:

$$m_t = n_{1,t} - n_{2,t} = \frac{\exp\left[\beta U_{1,t-1}\right] - \exp\left[\beta U_{2,t-1}\right]}{\exp\left[\beta U_{1,t-1}\right] + \exp\left[\beta U_{2,t-1}\right]} = \tanh\left[\frac{\beta}{2}\left(U_{1,t-1} - U_{2,t-1}\right)\right]. \tag{21}$$

Konačno, jednadžba mjere prilagodbe ima oblik:

$$U_{1,t} = wU_{1,t-1} + (1-w)\ \left[-kRx_{t-1}(x_t - Rx_{t-1}) - C\right], \tag{22}$$

$$U_{2,t} = wU_{2,t-1} + (1-w)\ \left[k(x_t - Rx_{t-1})(gx_{t-2} - Rx_{t-1})\right]. \tag{23}$$

Radi analiziranja uloge memorije u promatranome heterogenom modelu vrednovanja imovine, najprije će biti ispitana pozicija i stabilnost ravnotežnog stanja, te ciklus *period 2* u vezi s parametrom snage memorije. Također će biti promatrane moguće kvantitativne promjene u dinamici. Nakon toga uslijedit će određene numeričke simulacije kojima će se kombinirati analiza globalne stabilnosti s analizom lokalne stabilnosti.

3.1. Pozicija ravnotežnog stanja

U promatranome dualnom modelu s heterogenim subjektima, u kojemu se ispituje slučaj fundamentalista protiv kontrasubjekata, ravnotežna cjenovna jednadžba ima oblik:

$$Rx_t = n_{2,t}gx_{t-1} = \frac{1-m_t}{2}gx_{t-1}, \tag{24}$$

pri čemu vrijedi da je $n_{1,t} - n_{2,t} = m_t$ *i* $n_{1,t} + n_{2,t} = 1$. Jednadžba za izražavanje razlike između frakcija tipova uvjerenja ima oblik:

$$m_t = \tanh\left[\frac{\beta}{2}(w(U_{1,t-2} - U_{2,t-2}) - (1-w)(kgx_{t-3}(x_{t-1} - Rx_{t-2}) + C))\right]. \tag{25}$$

Ravnotežno cjenovno odstupanje x fiksna je točka sustava ako zadovoljava uvjet $x = f(x)$ za funkciju $f(x)$. U promatranome dualnom modelu fundamentalista protiv kontrasubjekata vrijedi:

$$Rx = \frac{1-m}{2}gx, \tag{26}$$

gdje je $x^{eq} = 0$ ili $R = \frac{1-m^*}{2}g$, te stoga vrijedi $m^* = 1 - \frac{2R}{g}$. U ovom posljednjem slučaju rezultat je fundamentalno (temeljno) ravnotežno stanje, pri kojemu je cijena jednaka temeljnoj, a razlika u frakcijama dana je izrazom:

$$m^{eq} = \tanh\left[\frac{\beta}{2}(w(U_1^{eq} - U_2^{eq}) - (1-w)C)\right].$$

Budući da iz izraza (22) i (23) slijedi da je $U_1^{eq} = -C$ i $U_2^{eq} = 0$ kada je $w \neq 1$, ravnotežna razlika frakcija može se pojednostaviti ovako:

$$m^{eq} = \tanh\left[\frac{\beta}{2}\left(-wC - (1-w)C\right)\right] = \tanh\left[-\frac{\beta C}{2}\right]. \tag{27}$$

Moguća su i druga (nefundamentalna) ravnotežna stanja koja bi trebala zadovoljavati izraz:

$$m^* = \tanh\left[\frac{\beta}{2}\left(w\,(U_1^* - U_2^*) - (1-w)\;\; kgx^*(x^* - Rx^*) + C\right)\right]. \tag{28}$$

Kako se može izvesti da vrijedi $U_1^* = -kRx^{*2}(1-R) - C$ i $U_2^* = kx^{*2}(1-R)(g-R)$ konačno se dobiva:

$$m^* = \tanh\left[-\frac{\beta}{2}\left(kgx^{*2}(1-R) + C\right)\right]. \tag{29}$$

Stoga u ovom trenutku možemo formulirati sljedeću lemu.

Lema 1*: Temeljno ravnotežno stanje u slučaju fundamentalista protiv kontrasubjekata jest jedinstveno ravnotežno stanje sustava. Pritom memorija ne utječe na poziciju toga ravnotežnog stanja.*

3.2. Stabilnost ravnotežnog stanja

Kako bi se provela analiza stabilnosti ravnotežnog stanja, promatrani je sustav potrebno preoblikovati u diferencijsku jednadžbu:

$$X_t = F_1\,(X_{t-1}), \tag{30}$$

pri čemu je $X_{t-1} = (x_{1,t-1},\, x_{2,t-1},\, x_{3,t-1},\, u_{1,t-1},\, u_{2,t-1})$ vektor novih varijabli, definiranih ovako: $x_{1,t-1} := x_{t-1}$, $x_{2,t-1} := x_{t-2}$, $x_{3,t-1} := x_{t-3}$, $u_{1,t-1} := U_{1,t-2}$ i $u_{2,t-1} := U_{2,t-2}$.

Dobivena je, dakle, 5-dimenzionalna diferencijska jednadžba prvog reda:

$$x_{1,t} = x_t = \frac{1}{R} n_{2,t} g x_{1,t-1} =$$

$$\frac{1}{R} g x_{1,t-1} \frac{\exp\left[\beta U_{2,t-1}\right]}{\exp\left[\beta U_{1,t-1}\right] + \exp\left[\beta U_{2,t-1}\right]} = \frac{1}{R} g x_{1,t-1} \frac{\exp\left[\beta u_{2,t}\right]}{\exp\left[\beta u_{1,t}\right] + \exp\left[\beta u_{2,t}\right]}, \tag{31}$$

$$x_{2,t} = x_{t-1} = x_{1,t-1}, \tag{32}$$

$$x_{3,t} = x_{t-2} = x_{2,t-1}, \tag{33}$$

$$u_{1,t} = U_{1,t-1} = wu_{1,t-1} + (1-w)\left[-kRx_{2,t-1}(x_{1,t-1} - Rx_{2,t-1}) - C\right], \tag{34}$$

$$u_{2,t} = U_{2,t-1} = wu_{2,t-1} + (1-w)\left[k\,(x_{1,t-1} - Rx_{2,t-1})\,(gx_{3,t-1} - Rx_{2,t-1})\right]. \tag{35}$$

Lokalna stabilnost ravnotežnog stanja određena je svojstvenim vrijednostima Jacobijeve matrice, koju ovdje nećemo prezentirati zbog ograničenosti opsega rada. Sada možemo izraziti Jacobijevu matricu 5-dimenzionalne funkcije. Pri fundamentalnom ravnotežnom stanju $X^{eq} = (0, 0, 0, -C, 0)$ dobivamo novu Jacobijevu matricu, pomoću koje je moguće izravno procijeniti karakterističnu jednadžbu za promatrani slučaj:

$$g(\lambda) = \left(\frac{1}{R} n_2^{eq} g - \lambda\right) \lambda^2 (w - \lambda)^2 = 0. \tag{36}$$

Njezina su rješenja (svojstvene vrijednosti) $\lambda_1 = \frac{1}{R} n_2^{eq} g$, $\lambda_{2,3} = 0$ i $\lambda_{4,5} = w$. Ravnotežno je stanje X^{eq} stabilno za $|\lambda| < 1$; odnosno ako vrijedi da je $-R < g n_2^{eq} < R$ i $w < 1$.

Sada je moguće izraziti i sljedeću lemu.

***Lema 2**: Temeljno ravnotežno stanje u slučaju fundamentalista protiv kontrasubjekata globalno je stabilno za -R < g < 0. Memorija ne utječe na stabilnost toga ravnotežnog stanja.*

3.3. Bifurkacije i ciklus period 2

Bifurkacija je kvalitativna promjena dinamičkog ponašanja nastala zbog promjene parametara (Brock and Hommes, 1998). Specifična vrsta bifurkacije nastala zbog promjene jednog parametra naziva se jednodimenzionalnom bifurkacijom. Postoji više vrsta takvih bifurkacija: udvostručivanje perioda, sedlasto-čvorna i Hopfova bifurkacija. Prva spomenuta vrsta ima jedinstvenu vrijednost Jacobijeve matrice jednaku -1, jedinstvena vrijednost druge jednaka je 1, a treća vrsta ima kompleksne svojstvene vrijednosti na jediničnom krugu.

Promotrimo li jedinstvenu vrijednost od interesa, λ_1, logično je da se sedlasto-čvorna bifurkacija ni u kojem slučaju ne može dogoditi. Naime, jednadžba:

$$1 = \frac{1}{R} n_2^{eq} g \tag{37}$$

nikad neće vrijediti zbog činjenice da je na njezinoj lijevoj strani pozitivna konstanta, a na desnoj izraz koji je uvijek negativan za $g < 0$, $R > 0$ i $n_2^{eq} > 0$. Nasuprot tome, jednadžba:

$$-1 = \frac{1}{R} n_2^{eq} g \tag{38}$$

može biti zadovoljena za $n_2^{eq} \neq 0$, jer su u tom primjeru obje strane jednadžbe negativne. Stoga je (primarna) bifurkacija udvostručivanjem perioda moguća u promatranom modelu za sljedeću vrijednost β:

$$\beta^* = \frac{1}{C} \ln\left[-\frac{R}{R+g}\right]. \tag{39}$$

Navedena je vrijednost dobivena uvrštavanjem $n_2^{eq} = \dfrac{1}{\exp\left[-\beta C\right]+1}$ u jednadžbu (38), te njezinim rješavanjem po parametru snage memorije β.

Sada je moguće ispitati postojanje ciklusa *period 2* $\{(x^*, m^*), (-x^*, m^*)\}$ Uzevši u obzir da vrijedi $U_1^* = kRx^{*2}(1+R) - C$ i $U_2^* = kx^{*2}(1+R)(g+R)$, ciklus *period 2* uslijedit će ako je $-R = \dfrac{1-m^*}{2}g$, te stoga za $m^* = 1+\dfrac{2R}{g}$ vrijedi:

$$m^* = \tanh\left[-\frac{\beta}{2}\left(kgx^{*2}(1+R)+C\right)\right]. \tag{40}$$

Na osnovi toga možemo izraziti sljedeću lemu.

***Lema 3**: U slučaju fundamentalista protiv kontrasubjekata fundamentalno ravnotežno stanje (0, m^{eq}) nestabilno je za $g < -2R$, te postoji ciklus period 2* $\{(x^*, m^*), (-x^*, m^*)\}$. *Ako je $-2R < g < -R$, postoje dvije mogućnosti:*

(1) ako vrijedi $m^* = 1+\dfrac{2R}{g} < m^{eq}$, tada je (0, m^{eq}) jedinstveno, globalno stabilno ravnotežno stanje,

(2) ako vrijedi $m^* = 1+\dfrac{2R}{g} > m^{eq}$, tada je ravnotežno stanje (0, m^{eq}) nestabilno i postoji ciklus period 2 $\{(x^*, m^*), (-x^*, m^*)\}$. *Memorija ne utječe na poziciju ciklusa period 2.*

Baš kao i u radu Brock i Hommes (1998), izraziti kontrasubjekti za koje vrijedi $g < -2R$ mogu dovesti do postojanja ciklusa *period 2*, i to čak i kad za fundamentaliste ne postoje troškovi ($C = 0$). Ako su ti troškovi pozitivni ($C > 0$), izraziti kontrasubjekti za koje vrijedi $-2R < g < -R$ mogu dovesti do ciklusa *period 2*. Kako se intenzivnost izbora povećava do $\beta = \beta^*$, uslijedit će udvostručivanje perioda u kojemu će temeljno ravnotežno stanje postati nestabilno, te će se stvoriti (stabilni) ciklus *period 2* s jednom točkom iznad i jednom ispod fundamentalne.

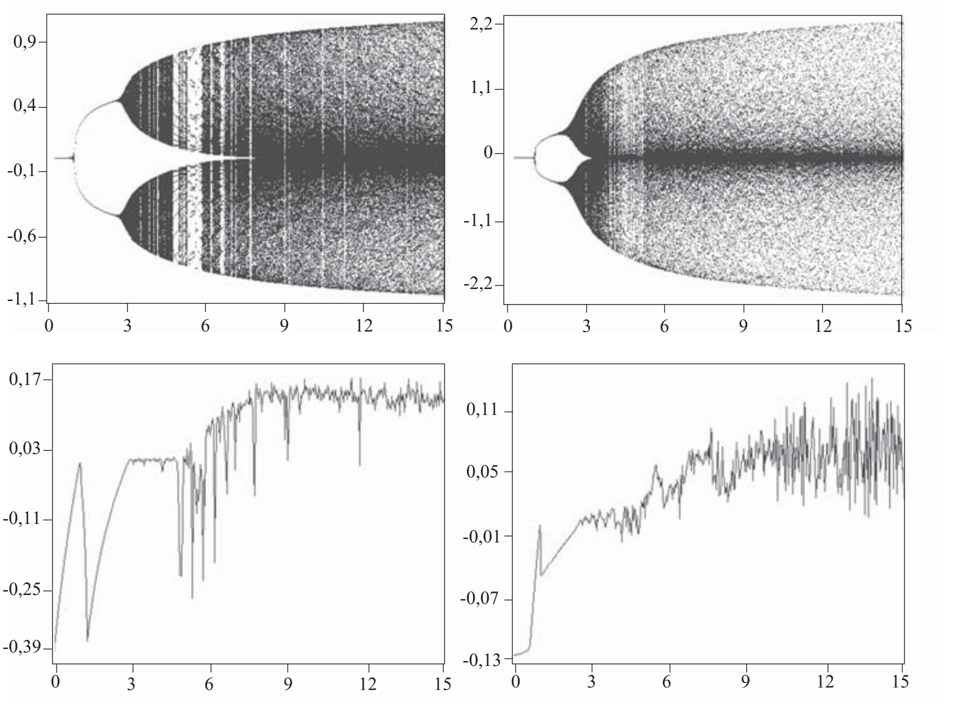
Kad nastane daljnje povećanje intenziteta izbora, vjerojatno će se naći vrijednost $\beta = \beta^{**}$, za koju će ciklus *period 2* postati nestabilan, te će se dogoditi Hopfova bifurkacija, baš kao i u radu Brock i Hommes (1998). Model bi tada dobio atraktor koji se sastoji od dva invarijantna kruga oko obiju (nestabilnih) dvoperiodičkih točaka. Jedna od njih nalazila bi se iznad, a druga ispod fundamentalne. Neposredno nakon takve Hopfove bifurkacije dinamika cijena je periodička ili kvaziperiodička i kreće se naprijed i natrag između dva kruga. Taj se fenomen ne može izravno dokazati zbog periodičkih točaka različitih od nule, iako je 5-dimenzionalni sustav (31) - (35) i dalje simetričan s obzirom na izvorni. Stoga ćemo u sljedećem dijelu rada predočiti tok Hopfove bifurkacije te pojavljivanje atraktora.

3.4. Numerička analiza

Numerička analiza slučaja fundamentalista protiv kontrasubjekata bit će provedena za fiksne vrijednosti parametara $R = 1{,}1$, $k = 1{,}0$, $C = 1{,}0$ i $g = -1{,}5$. Parametri koji će varirati jesu intenzitet izbora β i, naravno, snaga memorije w. Bit će primijenjena četiri analitička alata[7]: bifurkacijski dijagrami, dijagram najvećeg Ljapunovljeva eksponenta (LCE), fazni dijagrami i grafički prikazi vremenskih serija.

Prvo i najvažnije jest to da se dinamičko ponašanje sustava može očitati iz analize bifurkacijskih dijagrama. Slika 1. prikazuje bifurkacijske dijagrame za različite vrijednosti parametra snage memorije. Vidljivo je da za niske vrijednosti parametra β postoji stabilno ravnotežno stanje, i to fundamentalno. Kao što je dokazano u lemi 1, pozicija tog ravnotežnog stanja neovisna je o memoriji, tj. $x^{eq} = 0$, što je jasno dokazano provedenim simulacijama. Povećavanjem β, i to pri $\beta = \beta^*$, pojavljuje se (primarno) udvostručivanje perioda. Usto, ravnotežno stanje postaje nestabilno i pojavljuje se stabilni ciklus *period 2*, kao što je dokazano u lemi 3. Iz simulacija je vidljivo da je bifurkacijska vrijednost također neovisna o memoriji. Na stabilnost ravnotežnog stanja, dakle, ne može se utjecati memorijom, što je i dokazano u lemi 2.

Slika 1. Bifurkacijski dijagrami i dijagrami najvećeg LCE parametra β u slučaju fundamentalista protiv kontrasubjekata



Napomena: Horizontalna os predočuje intenzitet izbora (β). Na vertikalnoj osi gornjih dvaju dijagrama zabilježene su vrijednosti odstupanja cijena od fundamentalne vrijednosti (x), dok su na donja dva dijagrama na horizontalnoj osi prikazani najveći LCE. Dijagrami se razlikuju s obzirom na parametar snage memorije; na lijevome je w = 0,3, dok je na desnome w = 0,9.

Izvor: autorov model simulacije

[7] Budući da su ti alati poznati i često rabljeni, neće biti detaljno objašnjavani u ovom radu. Za detaljna objašnjenja vidjeti Arrowsmith i Place (1990), Shone (1997) te Brock i Hommes (1998).

Uz daljnje povećavanje β doista se pojavljuje (sekundarna) Hopfova bifurkacija, i to pri $\beta = \beta^{**}$. Kao što je rečeno u dijelu 3.3, ciklus *period 2* postaje nestabilan i pojavljuje se atraktor koji se sastoji od dva invarijantna kruga oko svake (nestabilne) dvoperiodičke točke, pri čemu je jedna iznad, a druga ispod fundamentalne. Riječ je o superkritičkoj Hopfovoj bifurkaciji, pri kojoj se ravnotežno stanje postupno mijenja ili u nestabilnu ravnotežu ili u atraktor (*cf*. Guckenheimer i Holmes, 1983; Frøyland, 1992; Kuznetsov, 1995). Pozicija ciklusa *period 2* neovisna je o memoriji, no ovisna je o intenzitetu izbora, što je vidljivo iz jednadžbe (40). Numeričke simulacije također sugeriraju da ni sekundarna bifurkacijska vrijednost ne varira ovisno o promjeni parametra snage memorije, w. Za $\beta > \beta^{**}$ pojavljuje se kaotično dinamičko gibanje koje je prožeto mnogim *stable cycles* (uglavnom višeg reda). Takav je bifurkacijski put u kaos u radu (Brock i Hommes (1997a) nazvan još racionalnim putem u slučajnost (Brock i Hommes, 1997a), dok je njegov posljednji dio nazvan prekidanjem invarijantnog kruga.

Proučavanjem grafičkog prikaza Ljapunovljeva eksponenta parametra β dolazi se do identičnih zaključaka o dinamičkom ponašanju sustava. Naime, iz slike 1. vidljivo je da je najveći LCE manji od 0, te je prema tome, sustav stabilan do primarne bifurkacije, koja je neovisna o memoriji. Pri toj bifurkacijskoj vrijednosti događa se kvalitativna promjena u dinamici sustava, tj. period se udvostručuje, čime se dobiva stabilni ciklus *period 2*. Ljapunovljev eksponent opet je manji od nule, te se može zaključiti da je sustav stabilan do sekundarne bifurkacije. Pri toj bifurkacijskoj vrijednosti ponovno se događa kvalitativna promjena, ovog puta Hopfova bifurkacija, ali dinamika od te točke nadalje postaje izrazito složena.

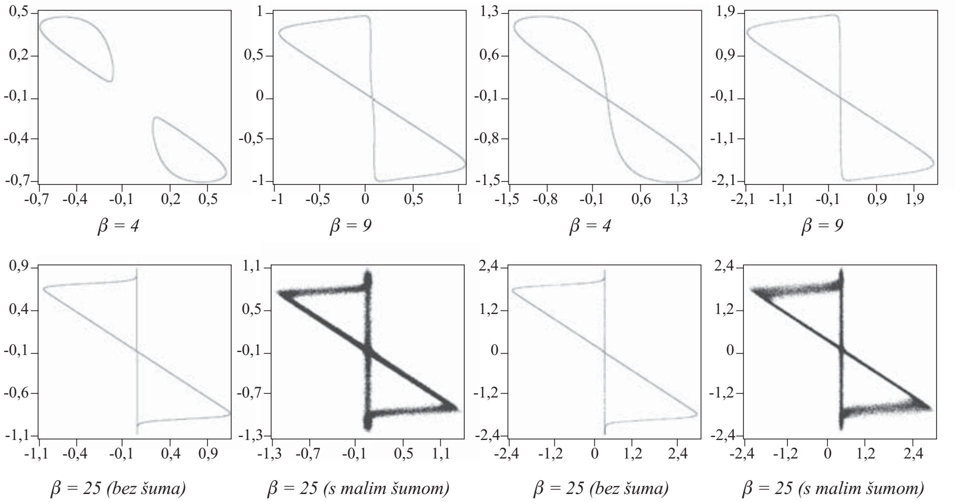
Za niže vrijednosti parametra w Ljapunovljev eksponent nakon β^{**} nije pozitivan, ali je blizu nule, što implicira kvaziperiodičku dinamiku. Nakon određenoga kratkog perioda Ljapunovljev eksponent postaje (s iznimkama) uglavnom pozitivan, što podrazumijeva kaotičnu dinamiku, prožetu stabilnim ciklusima. Grafikon Ljapunovljeva eksponenta zapravo ima fraktalnu strukturu (*cf*. Brock i Hommes, 1998, str. 1258). Kada je $w = 0{,}9$, globalna dinamika nakon β^{**} automatski postaje kaotična. Stoga memorija sasvim sigurno utječe na dinamiku nakon sekundarne bifurkacije. Budući da je ona zapravo bifurkacija nastala udvostručenjem perioda, zapravo je riječ o putovima u kaos udvostručivanjem perioda.

Zatim će biti promatrani grafički prikazi atraktora u ravnini (x_t, x_{t-1}), te u ravnini[8] $(x_t, n_{1,t})$ bez šuma. Pritom je n.j.d. šum dodan ponudi rizičnih dionica. Na grafikonu u svaka četiri dijela slike 2. i 3. najprije se može uočiti atraktor za intenzitet izbora iznad vrijednosti sekundarne bifurkacije. Orbite konvergiraju k takvom atraktoru, koji se sastoji od dva invarijantna kruga oko svake (nestabilne) dvoperiodičke točke[9], pri čemu je jedna iznad, a druga ispod fundamentalne. Kako se intenzitet izbora povećava, tako se krugovi sve više približavaju jedan drugome. Na gornjem desnom i donjem lijevom grafikonu svakoga od četiri dijela slika 2. i 3. može se uočiti da sustav gotovo već ima homokliničku orbitu. Stabilna mnogostrukost fundamentalnoga ravnotežnog stanja, $W^s(0, m^{eq})$, sa-

[8] Atraktori u $(x_t, n_{2,t})$ ravnini samo su zrcalne slike atraktora u $(x_t, n_{1,t})$ ravnini (rotirani za 180 stupnjeva), te stoga neće biti zasebno razmatrani.

[9] Iako se topološki govori o krugovima, stvarni oblik takvog atraktora može, što je vidljivo iz slika, biti dosta različit.

Slika 2. Fazni dijagrami ravnine (x_t, x_{t-1}) u slučaju fundamentalista protiv kontrasubjekata



Napomena: Na horizontalnoj osi zabilježene su vrijednosti odstupanja cijena od fundamentalne vrijednosti (x_t). Vertikalna os predočuje odstupanja cijena od fundamentalne vrijednosti, s vremenskim pomakom unatrag (x_{t-1}). Skupine od četiri dijagrama razlikuju se s obzirom na parametar snage memorije w; u lijevoj je grupi w = 0,3, dok je u desnoj w = 0,9.

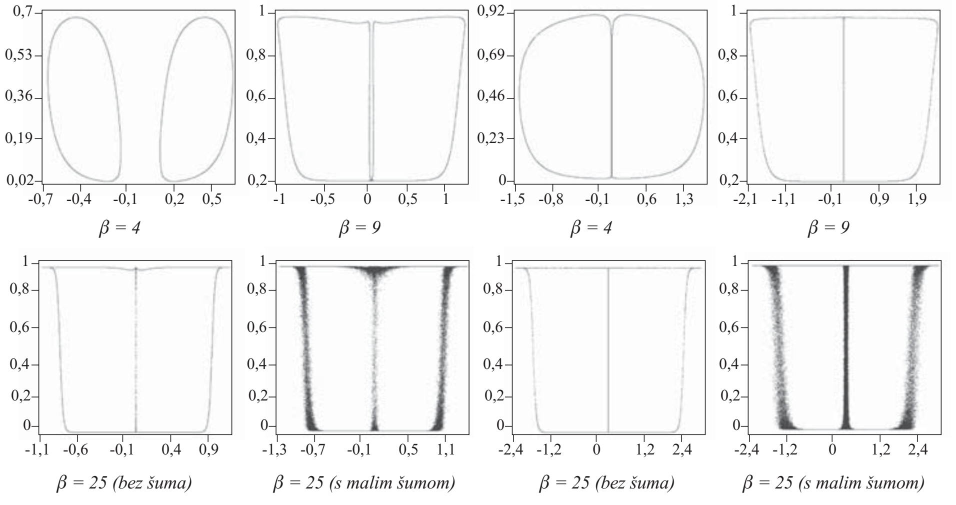
Izvor: autorov model simulacije

država vertikalni segment, $x^{eq} = 0$, dok nestabilna mnogostrukost, $W^u(0, m^{eq})$, ima dvije grane. Jedna se kreće udesno, a druga ulijevo. Obje se tada "preklapaju unazad" blizu stabilnoj mnogostrukosti.

Naime, kako su dokazali Brock and Hommes (1998, p. 1254), za model određivanja cijene imovine bez dodatne memorije, ta je nestabilna mnogostrukost $W^u(0, -1)$ ograničena i njezine orbite konvergiraju u sedlastu točku (0, -1) za beskonačan intenzitet izbora i izrazite kontrasubjekte, $g < -R$. Konkretno, sve točke nestabilne mnogostrukosti konvergiraju u (0, -1) i time su i one na stabilnoj mnogostrukosti. Prema tome, sustav ima homokliničke orbite za beskonačan intenzitet izbora. Samim time može se očekivati da će u slučaju izrazitih kontrasubjekata i visokog intenziteta izbora biti dobiven sustav koji ima gotovo homoklinički presjek između stabilne i nestabilne mnogostrukosti te fundamentalnoga ravnotežnog stanja. Upravo je to vidljivo i iz donjega lijevog grafikona obaju dijelova slika 2. i 3, koji sugeriraju postojanje kaosa za visoki intenzitet izbora. Iz donjega desnoga grafikona obaju dijelova slika 2. i 3. može se zaključiti kako dodavanje maloga dinamičkog šuma u sustav ne mijenja takve zaključke.

I ovoga puta može se primijetiti da memorija utječe na globalnu dinamiku sustava. Naime, i konvergencija sustava atraktoru koji se sastoji od dva invarijantna kruga i međusobno približavanje tih krugova događa se pri nižim vrijednostima intenziteta izbora brže nego kad je u modelu prisutno više memorije. Štoviše, čini se da smo pri istom intenzitetu izbora, ali uz veću snagu memorije, bliže dobivanju homokliničkog presjeka između stabilne i nestabilne mnogostrukosti fundamentalnoga ravnotežnog stanja.

Slika 3. Fazni dijagrami ravnine (x_t, $n_{1,t}$) u slučaju fundamentalista protiv kontrasubjekata



Napomena: Horizontalna os označava odstupanja cijena od fundamentalne vrijednosti (x_t), a vertikalna frakciju fundamentalista ($n_{1,t}$). Skupine od četiri dijagrama razlikuju se s obzirom na parametar snage memorije w; u lijevoj je skupini w = 0,3, a u desnoj w = 0,9.

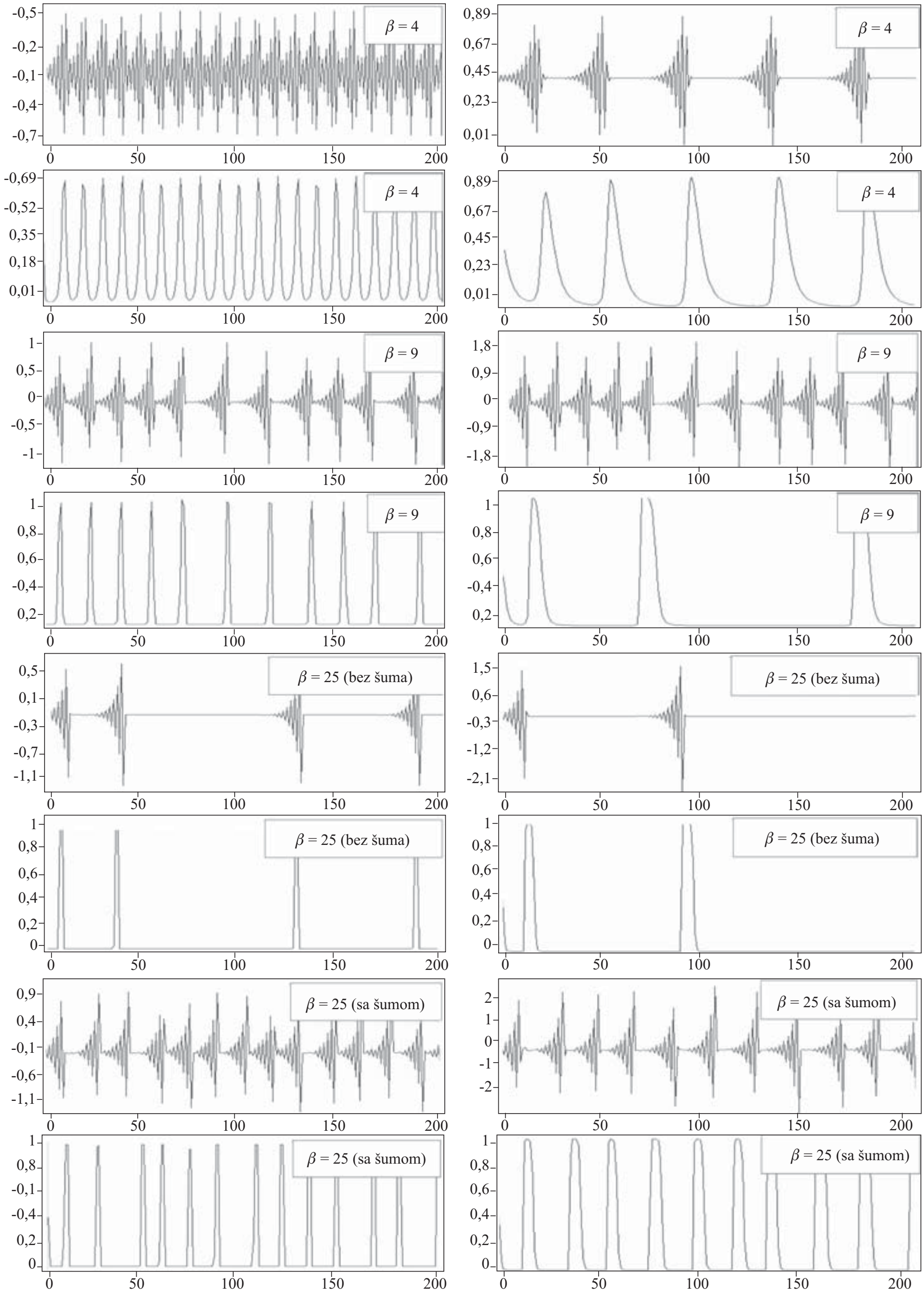
Izvor: autorov model simulacije

Na kraju će biti analizirani grafički prikazi vremenskih serija, tj. odstupanja cijena od fundamentalne za frakciju fundamentalista.[10] Slika 4. pokazuje vremenske serije koje odgovaraju atraktorima sa slika 2. i 3, sa šumom i bez šuma dodanoga ponudi rizičnih dionica. Slično zaključcima Brocka i Hommesa (1998), i tu se može vidjeti da cijene imovine karakteriziraju nepravilni prijelazi između stabilne faze, s cijenama blizu onima (nestabilnima) fundamentalnima, i nestabilne faze, sa sve većim fluktuacijama cijena u oba smjera.

Dakako, ti se nepravilni prijelazi reflektiraju na frakcije fundamentalista i kontrasubjekata na tržištu. Naime, kad oscilacije cijena oko nestabilnoga ravnotežnog stanja postanu dovoljno velike, trgovcu postaje profitabilno slijediti fundamentalnu vrijednost hipoteze efikasnog tržišta, i to čak i unatoč troškovima koje nameće takva strategija. Frakcija fundamentalista time se približava jedinici, te se cijena imovine stabilizira. Međutim, tada spomenuti troškovi dovedu fundamentaliste u poziciju da se ne mogu natjecati na tržištu, te se frakcija fundamentalista ubrzano približava nuli. Logično, u isto se vrijeme frakcija kontrasubjekata jednakom brzinom približava jedinici. Što je veći intenzitet izbora, to će, *ceteris paribus*, ostvarivanje te tranzicije biti brže. Kad se β približi neoklasičnom li-

[10] Frakcija kontrasubjekata zapravo je jedinični komplement frakcije fundamentalista, tj. $n_{1,t} + n_{2,t} = 1$, pa je zbog toga nećemo posebno grafički promatrati.

Slika 4. Vremenske serije cijena i frakcija u slučaju fundamentalista protiv kontrasubjekata



Napomena: Horizontalna os predočuje vrijeme (t). Vertikalna os na svakom paru grafikona vremenskih serija označava odstupanja cijena od fundamentalne vrijednosti (x_t), a zatim frakciju fundamentalista ($n_{1,t}$). Grafikoni s lijeve i desne strane slike razlikuju se s obzirom na parametar snage memorije w; na lijevima je w = 0,3, a na desnima w = 0,9.

Izvor: autorov model simulacije

mitu, ukupan broj trgovaca[11] koristit će se najboljim prediktorom s obzirom na troškove, tj. strategijom s najboljom prilagodbom.

Dodatna memorija ne utječe na obrazac kretanja cijena imovine *per se*, ali utječe na sam period kretanja. Naime, pri jednakom intenzitetu izbora i većoj snazi memorije, period toga nepravilnog ciklusa u prosjeku se produžuje. To se događa tako da stabilna faza, s cijenama blizu fundamentalnoj, traje dulje, dok se trajanje nestabilne faze, s cjenovnim fluktuacijama, znatnije ne mijenja. Stoga je učinak uključivanja dodatne memorije uglavnom stabilizirajući s obzirom na cijene imovine. Imajući na umu različite tipove trgovaca, može se zaključiti da uključivanje dodatne memorije utječe na tranziciju iz kratkog perioda dominacije fundamentalista ka dužem periodu tržišne dominacije kontrasubjekata. Ta tranzicija, pri jednakom intenzitetu izbora, zahtijeva dulje vrijeme provedbe. Stoga povećanje memorije uzrokuje zadržavanje trgovaca pri strategijama koje su bile profitabilnije u prošlosti, ali se u recentnijim periodima ta profitabilnost smanjila.

4. Fundamentalisti protiv uvjerenja suprotnih pristranosti

U tom, drugom promatranom slučaju riječ je o fundamentalistima na jednoj i subjektima s uvjerenjima suprotnih pristranosti na drugoj strani. Fundamentaliste ponovno karakterizira deterministička funkcija oblika:

$$f_{1,t} \equiv 0 \tag{41}$$

Kao što je vidljivo, ne karakterizira ih nikakav trošak skupljanja informacija, tj. $C = 0$. Subjekte s pristranim uvjerenjima karakteriziraju ove determinističke funkcije:

$$f_{2,t} = b_2;\ b_2 > 0, \tag{42}$$

$$f_{3,t} = b_3;\ b_3 < 0, \tag{43}$$

i to za optimistične i pesimistične pristranosti, respektivno.[12] Oni također u promatranom modelu nemaju nikakav trošak skupljanja informacija. Jednadžba frakcija tipova uvjerenja ima oblik:

$$n_{h,t} = \frac{\exp\left[\beta U_{h,t-1}\right]}{\sum_{i=1}^{3}\exp\left[\beta U_{i,t-1}\right]};\ h = 1,2,3. \tag{44}$$

Konačno, time se dolazi do mjere prilagodbe za svaki pojedini tip uvjerenja:

$$U_{1,t} = wU_{1,t-1} + (1-w)\left[-kRx_{t-1}(x_t - Rx_{t-1})\right], \tag{45}$$

$$U_{2,t} = wU_{2,t-1} + (1-w)\left[k(x_t - Rx_{t-1})(b_2 - Rx_{t-1}\ \right], \tag{46}$$

[11] Trgovac vrijednosnicama na burzi kapitala.
[12] U ovom ćemo radu promatrati isključivo simetrični slučaj.

$$U_{3,t} = wU_{3,t-1} + (1-w)\left[k\,(x_t - Rx_{t-1})\,(b_3 - Rx_{t-1})\right]. \tag{47}$$

Kako bi se analizirala uloga memorije u promatranome heterogenom modelu određivanja cijene imovine, najprije ćemo ispitati poziciju i stabilnost ravnotežnog stanja. Potom ćemo analizirati moguće kvalitativne dinamičke promjene, sve u vezi s parametrom snage memorije. Nakon toga bit će provedene numeričke simulacije kombinacijom analize globalne i lokalne stabilnosti.

4.1. Pozicija ravnotežnog stanja

Analizu promatranoga trihotomnog modela započet ćemo reformulacijom sustava u oblik diferencijske jednadžbe:

$$X_t = F_2\,(X_{t-1}), \tag{48}$$

pri čemu je $X_{t-1} = (x_{1,\,t-1}, x_{2,t-1}, u_{1,t-1}, u_{2,t-1}, u_{3,t-1})$ vektor novih varijabli, definiranih ovako: $x_{1,\,t-1} := x_{t-1}$, $x_{2,t-1} := x_{t-2}$, $u_{1,t-1} := U_{1,\,t-2}$, $u_{2,t-1} := U_{2,\,t-2}$ i $u_{3,t-1} := U_{3,t-2}$.

Stoga se time dobiva sljedeća 5-dimenzionalna diferencijska jednadžba prvog reda:

$$x_{1,t} = x_t = \frac{1}{R}\,(n_{2,t}b_2 + n_{3,t}b_3) = \frac{1}{R}\left(\frac{\exp\left[\beta U_{2,t-1}\right]}{\sum_{i=1}^{3}\exp\left[\beta U_{i,t-1}\right]}b_2 + \frac{\exp\left[\beta U_{3,t-1}\right]}{\sum_{i=1}^{3}\exp\left[\beta U_{i,t-1}\right]}b_3\right) =$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\exp\left[\beta u_{2,t}\right]}{\sum_{i=1}^{3}\exp\left[\beta u_{i,t}\right]}b_2 + \frac{\exp\left[\beta u_{3,t}\right]}{\sum_{i=1}^{3}\exp\left[\beta u_{i,t}\right]}b_3\right), \tag{49}$$

$$x_{2,t} = x_{t-1} = x_{1,t-1}, \tag{50}$$

$$u_{1,t} = U_{1,t-1} = wu_{1,t-1} + (1-w)\left[-kRx_{2,t-1}\,(x_{1,t-1}) - Rx_{2,t-1})\right], \tag{51}$$

$$u_{2,t} = U_{2,t-1} = wu_{2,t-1} + (1-w)\left[k\,(x_{1,t-1} - Rx_{2,t-1})\,(b_2 - Rx_{2,t-1})\right], \tag{52}$$

$$u_{3,t} = U_{3,t-1} = wu_{3,t-1} + (1-w)\left[k\,(x_{1,t-1} - Rx_{2,t-1})\,(b_3 - Rx_{2,t-1})\right]. \tag{53}$$

Za promatrani model s tri tipa uvjerenja može se reći kako općenito može imati ova ravnotežna odstupanja cijena:

$$x = \frac{1}{R}\,(n_2b_2 + n_3b_3). \tag{54}$$

Fundamentalno stabilno stanja dobiva se za $b_2 = -b_3 = b > 0$ (uvjerenja suprotnih pristranosti), pri čemu je $x^{eq} = 0$. Takav zaključak proizlazi iz uvjeta $u_1^{eq} = u_2^{eq} = u_3^{eq} = 0$ kad je $w \neq 1$, kao i iz relacije $n_1^{eq} = n_2^{eq} = n_3^{eq} = \frac{1}{3}$, dobivene iz iznova napisane jednadžbe (44).

Generalizacijom upravo izloženih činjenica možemo oblikovati sljedeću lemu.

Lema 4: *Fundamentalno stabilno stanje u slučaju fundamentalista protiv subjekata suprotnih pristranih uvjerenja ujedno je i jedinstveno stabilno stanje sustava. Memorija ne utječe na poziciju toga stabilnog stanja.*

4.2. Stabilnost ekvilibrija i bifurkacije

Lokalna stabilnost ravnotežnog stanja također je određena svojstvenim vrijednostima Jacobijeve matrice. U fundamentalnom stabilnom stanju $X^{eq} = (0, 0, 0, 0, 0)$ Jacobijeva matrica iznjedrit će karakterističnu jednadžbu oblika:

$$g(\lambda) = -\left(\lambda^2 - \left(w - \frac{2}{3R}k\beta\, b^2(w-1)\right)\lambda - \frac{2}{3}k\beta\, b^2(w-1)\right)\lambda\left(w-\lambda\right)^2 = 0. \qquad (55)$$

Navedena jednadžba ima tri pripadajuća rješenja, od kojih su dva dvostruka: $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = w$ te $\lambda_{4,5} = \frac{1}{6R}\left(2b^2\beta\, k(1-w) + 3Rw \pm \sqrt{\left(2b^2\beta\, k(w-1) - 3Rw\right)^2 - 24b^2\beta\, k(1-w)R^2}\right)$.

Fundamentalno stabilno stanje stabilno je uz uvjet $|\lambda| < 1$, što u promatranom slučaju znači da umnožak svojstvenih vrijednosti $\lambda_{4,5}$ mora biti manji od jedan, tj. $-\frac{2}{3}k\beta b^2\,(w-1) < 1$. U terminima intenziteta izbora to se događa za $\beta < -\frac{3}{2kb^2\,(w-1)}$, dok je u terminima snage memorije ispunjenost uvjeta zajamčeno za $w < 1 - \frac{3}{2k\beta b^2}$.

Stoga možemo izreći sljedeću lemu.

Lema 5: *Fundamentalno stabilno stanje u slučaju fundamentalista protiv subjekata suprotnih uvjerenja globalno je stabilno za* $\beta < -\frac{3}{2kb^2\,(w-1)}$. *Memorija utječe na stabilnost sustava njegovim ograničavanjem na dani interval vrijednosti parametra.*

Promotrimo li svojstvene vrijednosti $\lambda_{4,5}$ karakteristične jednadžbe, može se zaključiti da će se sedlasto-čvorna bifurkacija dogoditi uz uvjet:

$$\beta = \frac{3R}{2b^2\,k\,(1-R)}. \qquad (56)$$

Kako je $\beta \geq 0$, a desna je strana izraza uvijek negativna za $R > 1$, navedeni uvjet neće nikad vrijediti. No bifurkacija udvostručivanjem perioda dogodit će se za:

$$\beta = \frac{3\,R\,(w+1)}{2b^2k\,(R+1)\,(w-1)}. \tag{57}$$

Budući da je $\beta \geq 0$, a desna je strana izraza ili negativna ili nedefinirana za $0 \leq w \leq 1$, nameće se zaključak kako ni taj uvjet nikad neće vrijediti.

Od tri kvalitativne promjene razmotrene u poglavlju 4.3. preostala je samo Hopfova bifurkacija. Da bi ona nastala, kompleksno konjugirani par svojstvenih vrijednosti mora izlaziti izvan jediničnog kruga. Svojstvene vrijednosti $\lambda_{4,5}$ kompleksne su za $(2b^2\beta k(w-1)-3Rw)^2 - 24b^2\beta k(1-w)R^2 < 0$, čime se može dobiti sljedeći interval vrijednosti parametra β:

$$\frac{R\left(3w-6R-2\sqrt{R(R-w)}\right)}{2b^2k(w-1)} < \beta < \frac{R\left(3w-6R+2\sqrt{R(R-w)}\right)}{2b^2k(w-1)}. \tag{58}$$

Stoga možemo izreći sljedeću lemu.

Lema 6: *Postoji vrijednost intenzivnosti izbora β^* takva da fundamentalno ravnotežno stanje, koje je stabilno za $0 \leq \beta > \beta^*$, postaje nestabilno sve dok vrijedi $\beta > \beta^*$. Za vrijednost $\beta^* = -\dfrac{3}{2kb^2\,(w-1)}$ sustav pogađa Hopfova bifurkacija. Memorija utječe na pojavu te bifurkacije, i to tako da se uz više memorije bifurkacija događa kasnije.*

Kao što je upravo ustanovljeno, u slučaju fundamentalista protiv subjekata suprotnih pristranih uvjerenja povećavanje intenziteta izbora promjene prediktora destabilizira fundamentalno ravnotežno stanje. To se događa zbog Hopfove bifurkacije. Stoga je, na tragu Brocka i Hommesa (1998) s jednostavnijom verzijom modela, moguće zaključiti kako je prvi korak ka složenim fluktuacijama cijena različit ako postoje pristrani subjekti u odnosu prema slučaju s kontrasubjektima. Ta se teza ne mijenja niti kad kao faktor u modelu posluži memorija.

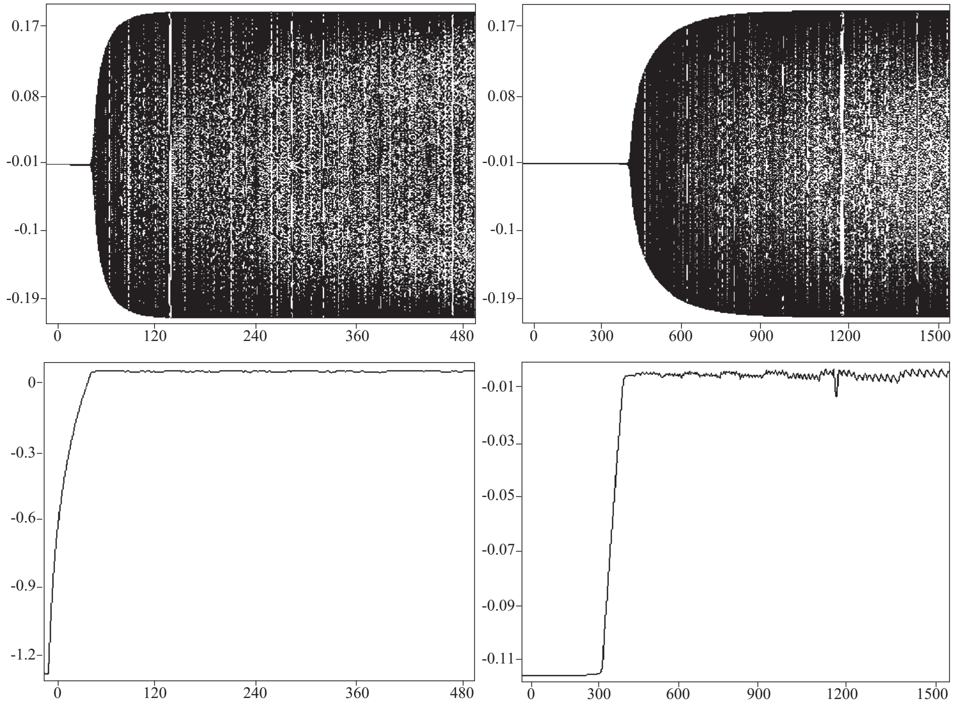
4.3. Numerička analiza

Numerička analiza slučaja fundamentalista i subjekata suprotnih pristranih uvjerenja bit će provedena za fiksne vrijednosti parametara $R = 1{,}1$, $k = 1{,}0$, $b_2 = 0{,}2$ i $b_3 = -0{,}2$. Bit će, dakle, variran parametar snage memorije w i parametar intenzivnosti izbora β. Pritom će biti upotrijebljena ista četiri analitička alata kao u poglavlju 4.3.

Dinamičko ponašanje sustava i u tom primjeru primarno može biti određeno istraživanjem bifurkacijskih dijagrama. Iz slike 5. može se vidjeti da za niske vrijednosti β postoji ravnotežno stanje, i to fundamentalno. Kao što je dokazano u lemi 4, pozicija tog stanja $x^{eq} = 0$ neovisna je o memoriji, što je provedenim simulacijama jasno potvrđeno. S povećavanjem pri razini $\beta = \beta^*$ nastaje Hopfova bifurkacija. Pritom ravnotežno stanje postaje nestabilno i pojavljuje se atraktor koji se sastoji od invarijantnog kruga oko (nestabilnog) ravnotežnog stanja. I tada je riječ o superkritičkoj Hopfovoj bifurkaciji, pri čemu se ravnotežno stanje postupno mijenja u nestabilnu ravnotežu ili u atraktor.

Kao što je dokazano u lemi 6, bifurkacijska vrijednost varira s mijenjanjem parametra snage memorije. Iz slike 5. također se može vidjeti da se uz veći parametar snage memorije bifurkacija događa kasnije. Za $\beta > \beta^*$ pojavljuje se složeno dinamičko ponašanje, koje je prožeto stabilnim ciklusima. Kao što je već otkriveno u poglavlju 4.2, neovisno o

Slika 5. Bifurkacijski dijagrami i dijagrami najvećeg LCE parametra β u slučaju fundamentalista protiv uvjerenja suprotnih pristranosti



Napomena: Horizontalna os predočuje intenzitet izbora (β). Vertikalna os na gornjim dvama dijagramima označava odstupanja cijena od fundamentalne vrijednosti (x), te vrijednost najvećeg LCE u donjima dvama dijagramima. Dijagrami se razlikuju s obzirom na parametar snage memorije w; na lijevom je w = 0,3, a na desnome w = 0,9.

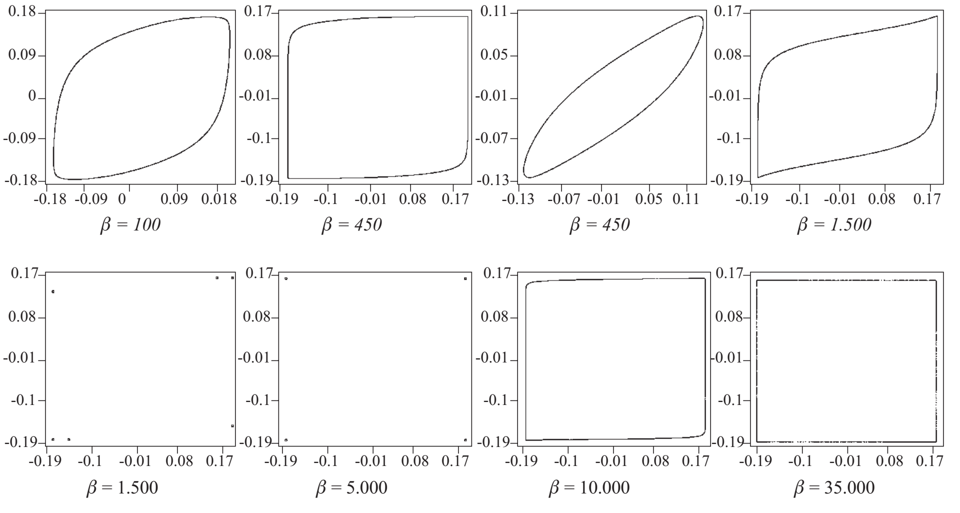
Izvor: autorov model simulacije

količini dodatne memorije uzete u obzir, takav (bifurkacijski) put u složenu dinamiku različit je od onoga pri postojanju kontrasubjekata, kada je opažen put u kaos udvostručivanjem perioda (racionalni put u slučajnost).

Proučavanjem grafikona najvećeg Ljapunovljeva karakterističnog eksponenta parametra β mogu se donijeti precizniji zaključci o dinamičkom ponašanju sustava. Naime, iz slike 5. vidljivo je da je najveći LCE manji od nule, te je stoga sustav stabilan do bifurkacije. Pri bifurkacijskoj vrijednosti događa se kvalitativna promjena u dinamici, odnosno Hopfova bifurkacija. Od te točke nadalje dinamika postaje znatno složenija. Naime, vidljivo je da je nakon $\beta = \beta^*$ najveći LCE ne-negativan, ali uglavnom blizu nule. Takve njegove vrijednosti impliciraju periodičku i kvaziperiodičku dinamiku, tj. za visoke vrijednosti intenziteta izbora mogu se dogoditi samo pravilne (kvazi-)periodičke fluktuacije oko nestabilnoga ravnotežnog stanja. Još jedna važna spoznaja jest da prevladavajuća kvaziperiodička dinamika ne razvija kaotičnu dinamiku, te je put u kaotičnu dinamiku uistinu drukčiji od dosad promatranih putova.

Nakon toga promatrani su dijagrami atraktora u ravninama, određeni s (x_t, x_{t-1}) i $(x_t, n_{1,t})$. Na gornjem lijevom dijagramu svakoga od dva dijela slike 6. odmah se može primijetiti postojanje atraktora za intenzitet izbora veći od bifurkacijske vrijednosti. Orbite konvergiraju tom atraktoru, koji se sastoji od invarijantnog kruga oko (nestabilnoga) fundamentalnog ravnotežnog stanja. Atraktor dobiven u ravnini $(x_t, n_{1,t})$ donekle je drukčiji. Naime, nestabilno ravnotežno stanje raspršuje se u mnogo točaka te, kao što je prikazano na slici 7, poprima oblik petlje.

Slika 6. Fazni dijagrami ravnine (x_t, x_{t-1}) u slučaju fundamentalista protiv uvjerenja suprotnih pristranosti

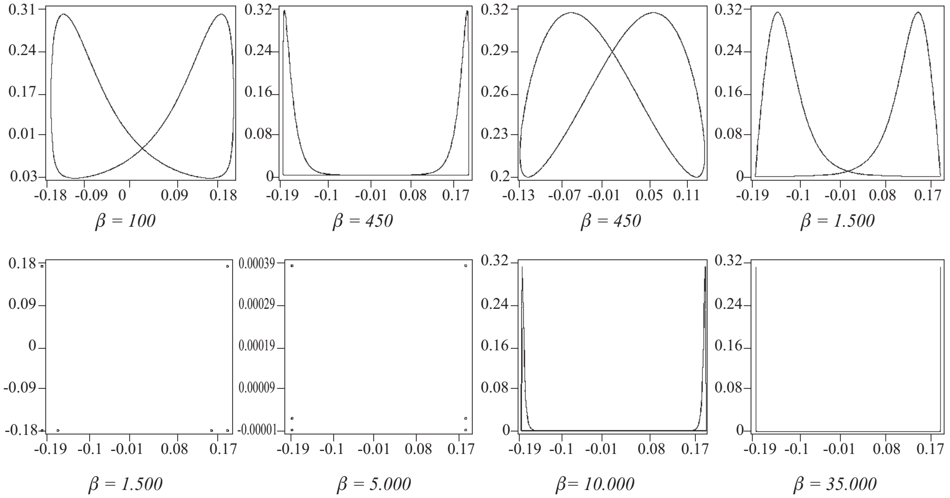


Napomena: Horizontalna os predočuje odstupanja cijena od fundamentalne vrijednosti (x_t). Vertikalna os također označava cjenovna odstupanja od fundamentalne vrijednosti, ali s vremenskim pomakom (x_{t-1}). Skupine od četiri dijagrama razlikuju se s obzirom na parametar snage memorije w; u lijevoj je skupini w = 0,3, a u desnoj w = 0,9.

Izvor: autorov model simulacije

Kako se intenzitet izbora povećava, dinamika ostaje periodička ili kvaziperiodička. Za prošla odstupanja cijena od fundamentalne vrijednosti i frakcija pristranih uvjerenja invarijantni se krug polako mijenja u oblik kvadrata (v. sl. 6). Za frakcije fundamentalista, pak, oblik petlje se polako mijenja u oblik kvadrata bez jedne stranice (v. sl. 7). Čini se da se za visoke vrijednosti intenziteta izbora dobivaju (stabilni) višeperiodički ciklusi. Čini se da se u slučaju prošlih odstupanja cijena od fundamentalne vrijednosti i frakcija pristranih uvjerenja dobiva stabilni ciklus *period 4*. Za frakcije fundamentalista, pak, zbog nemogućnosti konvergencije za vrlo visoke vrijednosti intenziteta izbora teško je dobiti ikakvu značajnu indikaciju proizašlu isključivo iz numeričkih simulacija. Međutim, ipak treba reći da se na temelju donjega desnog dijagrama obaju dijelova slike 7. mogu dobiti stabilni ciklusi *period 4* i *period 6*. Uistinu, i Brock i Hommes (1998) u jednostavnoj su verziji modela bez faktora memorije za suprotna pristrana uvjerenja i beskonačan inten-

Slika 7. Fazni dijagrami ravnine (x_t, $n_{1,t}$) u slučaju fundamentalista protiv uvjerenja suprotnih pristranosti



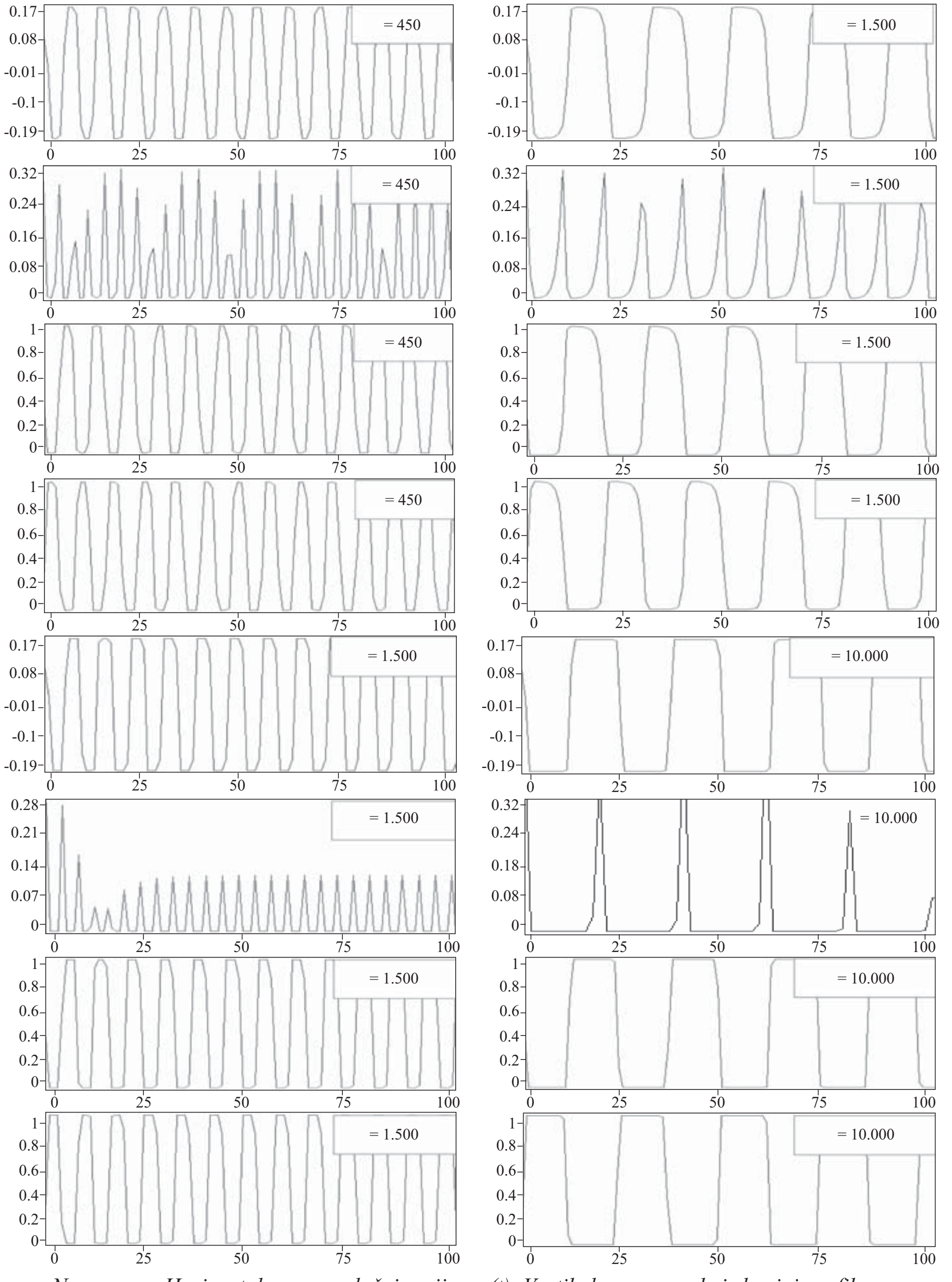
Napomena: Horizontalna os predočuje cjenovna odstupanja od fundamentalne vrijednosti (x_t), a vertikalna frakciju fundamentalista ($n_{1,t}$). Skupine od četiri dijagrama razlikuju se s obzirom na parametar snage memorije w; u lijevoj je skupini w = 0,3, a u desnoj w = 0,9.

Izvor: autorov model simulacije

zitet izbora dokazali da sustav ima stabilni ciklus *period 4* koji privlači sve orbite, osim malobrojnih primjera koji konvergiraju ka nestabilnom ravnotežnom stanju. Otkrili su također i da je prosječni profit u ciklusu *period 4* za sva tri tipa trgovaca jednak b^2.

I ovdje se ponovno pokazalo da memorija utječe na dinamiku sustava. Naime, i konvergencija sustava k atraktoru i daljnje razvijanje tog atraktora ovise o vrijednosti parametra snage memorije. Točan utjecaj memorije neusporedivo je teže procijeniti zbog ovisnosti bifurkacijske vrijednosti o snazi memorije te zbog potrebe biranja viših intenziteta izbora s većom snagom memorije kako bi se pokazala različita priroda atraktora sustava. Međutim, moguće je zaključiti da je pri jednakom intenzitetu izbora (nakon bifurkacijske vrijednosti) sustavu potrebno manje dodatne memorije kako bi razvio specifično stanje atraktora, ili čak (stabilni) višeperiodički ciklus.

Slika 8. Vremenske serije cijena i frakcija u slučaju fundamentalista protiv uvjerenja suprotnih pristranosti



Napomena: Horizontalna os predočuje vrijeme (t). Vertikalna os u svakoj skupini grafikona vremenskih serija predočuje cjenovna odstupanja od fundamentalne vrijednosti (x_t), te frakciju fundamentalista ($n_{1,t}$), optimistična pristrana uvjerenja ($n_{2,t}$) i pesimistična pristrana uvjerenja ($n_{3,t}$). Dijagrami na lijevoj i desnoj strani razlikuju se s obzirom na parametar snage memorije w; u onih na lijevoj strani w = 0,3, dok je u onih na desnoj w = 0,9.

Izvor: autorov model simulacije

Na kraju ćemo promotriti dijagrame vremenskih serija odstupanja cijena od fundamentalne vrijednosti i frakcija svih triju tipova trgovaca. Slika 8. pokazuje vremenske serije koje odgovaraju atraktorima na slikama 6. i 7. Vidljivo je da suprotna uvjerenja mogu uzrokovati neprekidne oscilacije oko fundamentalne razine, i to čak i ako ne postoje troškovi za fundamentaliste. Međutim, ona ipak ne mogu prouzročiti kaotična gibanja. Nadalje, čak i ako u promatranome trihotomnom modelu ne postoje troškovi i memorija je beskonačna, uz visok intenzitet izbora promjene strategija uvjerenja fundamentalista ne mogu istisnuti uvjerenja suprotnih pristranosti. Takav je zaključak već istaknut pojavom stabilnih višeperiodičkih ciklusa za visok intenzitet izbora.

Dakle, slijedeći argumentaciju Brocka i Hommesa (1998:1260), moguće je reći kako tržište može zaštititi pristranog trgovca od njegove vlastite nepromišljenosti, ali samo ako je on dio grupe trgovaca čije su pristranosti uravnotežene u smislu da su u prosjeku za sve tipove trgovaca jednake nuli. Glavne tržišne institucije nepristranim trgovcima mogu otežati nadmetanje s pristranim subjektima ako su pristranosti uravnotežene na nuli. No pri trgovanju na burzi trgovci mogu iskustveno naučiti koji su tipovi uravnoteženi i u trgovanju jednostavno odabrati drugu stranu. U takvim situacijama pristrani bi trgovci, ako ih ne zaštiti glavna tržišna institucija, bili eliminirani.

Dodatna memorija ne utječe na kretanje cijena imovine niti samih frakcija trgovaca, ali utječe na njegov period. Naime, pri jednakom intenzitetu izbora i većoj snazi memorije period cjenovnih ciklusa u prosjeku se produžuje, i to tako da pozitivne i negativne devijacije cijene od fundamentalne vrijednosti traju dulje. Isto vrijedi i za frakcije pristranih trgovaca, dok se za frakcije fundamentalista produljenje nepravilnog ciklusa pojavljuje u obliku manje frekventnih šiljaka. To je i razumljivo zato što stalne devijacije cijena od fundamentalne vrijednosti daju više prostora za pristrane trgovce te smanjuju mogućnost pojavljivanja fundamentalista. Snažnija memorija pridonosi tome da se trgovci duže pridržavaju strategije koja je u prošlosti bila profitabilna, iako to možda ne vrijedi u recentnijim periodima. Stoga se sustav, uz povećanje snage memorije, pri danom intenzitetu izbora približava čistoj kvaziperiodičkoj dinamici.

5. Zaključna razmatranja

Na tržištu s fundamentalistima i kontrasubjektima fundamentalno je ravnotežno stanje ujedno i jedinstveno ravnotežno stanje modela, koje se pojavljuje uz niske vrijednosti intenziteta izbora. Pritom memorija ne utječe ni na poziciju ravnotežnog stanja ni na njegovu stabilnost. Usto se pokazalo da povećanje intenziteta izbora rezultira primarnom bifurkacijom, tj. bifurkacijom udvostručivanjem perioda; ravnotežno stanje postaje nestabilno i pojavljuje se stabilni ciklus *period 2*. I primarna bifurkacijska vrijednost i pozicija ciklusa *period 2* neovisni su o memoriji. Za daljnje povećavanje intenziteta izbora uslijedit će i sekundarna bifurkacija (superkritička Hopfova bifurkacija), ciklus *period 2* postat će nestabilan i pojavit će se atraktor koji se sastoji od dva invarijantna kruga oko obiju (nestabilnih) dvoperiodičkih točaka. Pritom će jedna ležati ispod, a druga iznad fundamentalne vrijednosti. Za više vrijednosti intenziteta izbora uslijedit će kaotična dinamika cijena imovine, prožeta mnogim stabilnim periodičkim ciklusima. Takav se bifurkacijski put u kaos često naziva i racionalnim putem u slučajnost.

Za kontrasubjekte i visok intenzitet izbora razumno je očekivati da će biti dobiven sustav koji gotovo ima homoklinički presjek između stabilnih i nestabilnih mnogostrukosti fundamentalnoga ravnotežnog stanja. Navedeni presjek zapravo upućuje na pojavljivanje kaosa. Postoji određeni ograničeni interval vrijednosti snage memorije za koji je najvjerojatnije da će, uz dani intenzitet izbora, rezultirati takvim sustavom s više dodatne memorije u modelu. Racionalni izbor između uvjerenja fundamentalista i kontrasubjekata potiče situacije koje se zbog nekih praktičnih ograničenja ne ostvaruju, te su stoga nemoguće. Zbog toga su ih Brock i Hommes (1998:1258) nazvali *castles in the air*. Njihova je posljedica tržišna nestabilnost, karakterizirana nepravilnim oscilacijama u oba smjera oko nestabilne fundamentalne cijene hipoteze efikasnog tržišta. Dodatna memorija u prosjeku produžuje period tog nepravilnog ciklusa te se čini da ima stabilizirajući učinak s obzirom na cijenu imovine.

Na tržištu s fundamentalistima i subjektima suprotnih pristranih uvjerenja fundamentalno je ravnotežno stanje također jedinstveno stanje ekvilibrija sustava, te se dobiva za niske vrijednosti intenziteta izbora. Pokazalo se da memorija ne utječe na poziciju ravnotežnog stanja, ali utječe na njegovu stabilnost. S povećavanjem intenziteta izbora dogodi se Hopfova bifurkacija, ravnotežno stanje postaje nestabilno te se pojavi atraktor. Memorija utječe na pojavljivanje te bifurkacije, i to tako da velika snaga memorije uzrokuje višu bifurkacijsku vrijednost. Stoga jača memorija ima stabilizirajući učinak na dinamiku sustava tj., uz viši intenzitet izbora dinamičko ponašanje postaje složenije. Međutim, bez obzira na količinu dodatne memorije, takav put u složenu dinamiku različit je od onoga pri postojanju kontrasubjekata. Naime, nakon bifurkacijske vrijednosti pojavljuju se samo pravilne (kvazi) periodičke fluktuacije oko nestabilnoga fundamentalnog ravnotežnog stanja. Iz toga proizlazi važna činjenica: čini se da dominantna kvaziperiodička dinamika ne prerasta u kaotičnu dinamiku.

Nakon pojavljivanja bifurkacije više vrijednosti parametra snage memorije utječu na dinamiku tako da ona postaje manje periodička, a više kvaziperiodička. Stoga dinamika s povećanjem snage memorije konvergira čistom kvaziperiodičkom ponašanju. Suprotne pristranosti, čak i bez troškova fundamentalista, mogu uzrokovati neprekidne oscilacije oko fundamentalne vrijednosti, ali ne mogu dovesti do kaotičnog ponašanja. Nadalje, kad je u promatranome trihotomnom okruženju intenzitet izbora mijenjanja strategija visok, uvjerenja fundamentalista ne mogu potisnuti uvjerenja suprotnih pristranosti. To vrijedi čak i u situaciji bez troškova i s beskonačnom memorijom. Stoga je na temelju argumentacije Brocka i Hommesa (1998:1260) moguće konstatirati kako tržište ima sposobnost zaštite pristranog trgovca ako je on dio grupe trgovaca čija su uvjerenja uravnotežena.

Konačno, i provedena kvalitativna analiza i numeričke simulacije sugeriraju do same pristranosti ne potiču kaotične fluktuacije cijena imovine. Osjetljivost prema početnim stanjima i nepravilni prijelazi između različitih faza čine se potaknutima ekstrapolatorima trenda, u promatranom slučaju kontrasubjektima. Očito je da za poticanje kaotičnih fluktuacija cijena imovine moraju postojati uvjerenja (jakih) ekstrapolatora trenda kao što su jaki sljedbenici trenda ili jaki kontrasubjekti. Ključno obilježje modela heterogenih uvjerenja jest da su nepravilne fluktuacije cijena imovine potaknute racionalnim izborom strategija predviđanja, temeljenom na realiziranom profitu. Drugim riječima, promatrane devijacije od fundamentalne vrijednosti motivirane su željom za kratkoročnim profitom.

Također je moguće govoriti o racionalnim, animalnim instinktima koji, prema Brocku i Hommesu (1997b), očituju neka kvalitativna obilježja fluktuacija cijena imovine na realnim financijskim tržištima, poput autokorelacijske strukture cijena i povrata.

S engleskog preveo Petar Sorić

LITERATURA

Arrowsmith, D. K. and Place, C. M., 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Brock, W. A. and Hommes, C. H., 1997a. "A Rational Route to Randomness". *Econometrica* 65 (September), 1059-1095.

Brock, W. A. and Hommes, C. H., 1997b. "Models of Complexity in Economics and Finance" in: C. Heij [et al.]. *System Dynamics in Economic and Financial Models.* New York: John Wiley & Sons.

Brock, W. A. and Hommes, C. H., 1998. "Heterogeneous Beliefs and Routes to Chaos in a Simple Asset Pricing Model". *Journal of Economic Dynamics and Control,* 22 (8-9), 1235-1274.

Brock, W. A., Hommes, C. H. and Wagener, F. O. O., 2005. "Evolutionary Dynamics in Markets with Many Trader Types". *Journal of Mathematical Economics,* 41, 7-42.

Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C., 1997. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Chiarella, C. and He, X.-Z., 2002. "Heterogeneous Beliefs, Risk and Learning in a Simple Asset Pricing Model". *Computational Economics,* 19, 95-132.

Chiarella, C., He, X.-Z. and Hommes, C. H., 2006. "A Dynamic Analysis of Moving Average Rules". *Journal of Economic Dynamics and Control,* 30, 1729-1753.

Chiarella, C., He, X.-Z. and Zhu, P., 2003. "Fading Memory Learning in the Cobweb Model with Risk Averse Heterogeneous Producers". *Research Paper Series,* No. 108. Sydney: Quantitative Finance Research Centre, University of Technology.

Cuthbertson, K., 1996. *Quantitative Financial Economics: Stocks, Bonds and Foreign Exchange.* Chichester, UK: John Wiley & Sons.

De Grauwe, P. and Grimaldi, M., 2006. "Exchange Rate Puzzles: A Tale of Switching Attractors". *European Economic Review,* 50 (1), 1-33.

Evans, G. W. and Honkapohja, S., 2001. *Learning and Expectations in Macroeconomics.* Princeton: Princeton University Press.

Fama, E. F., 1991. "Efficient Capital Markets: II". *Journal of Finance,* 46 (5), 1575-1617.

Frøyland, J., 1992. *Introduction to Chaos and Coherence.* Bristol: Institute of Physics Publishing.

Gaunersdorfer, A., 2000. "Endogenous Fluctuations in a Simple Asset Pricing Model with Heterogeneous Agents". *Journal of Economic Dynamics & Control,* 24 (5-7), 799-831.

Gaunersdorfer, A., Hommes, C. H. and Wagener, F. O. O., 2003. "Bifurcation Routes to Volatility Clustering under Evolutionary Learning". *CeNDEF Working Paper,* No. 03-03. Amsterdam: University of Amsterdam.

Guckenheimer, J. and Holmes, P., 1983. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* New York: Springer-Verlag.

Hommes, C. H. [et al.], 2002. "Expectations and Bubbles in Asset Pricing Experiments". *CeNDEF Working Paper,* No. 02-05. Amsterdam: University of Amsterdam.

Hommes, C. H., 2006. "Heterogeneous Agent Models in Economics and Finance" in: L. Tesfatsion and K. L. Judd, eds. *Handbook of Computational Economics, Volume 2: Agent-Based Computational Economics.* Amsterdam: Elsevier Science.

Hommes, C. H., Huang, H. and Wang, D., 2005. "A Robust Rational Route to Randomness in a Simple Asset Pricing Model". *Journal of Economic Dynamics & Control,* 29 (6), 1043-1072.

Honkapohja, S. and Mitra, K., 2003. "Learning with Bounded Memory in Stochastic Models". *Journal of Economic Dynamics & Control,* 27 (8), 1437-1457.

Johnson, N. F., Jefferies, P. and Hui, P. M., 2003. *Financial Market Complexity: What Physics Can Tell Us about Market Behaviour.* Oxford: Oxford University Press.

Kuznetsov, Y. A., 1995. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York: Springer-Verlag.

LeBaron, B., 2000. "Agent Based Computational Finance: Suggested Readings and Early Research". *Journal of Economic Dynamics and Control,* 24 (5-7), 679-702.

LeBaron, B., 2002. "Short-memory Traders and Their Impact on Group Learning in Financial Markets", *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, 99 (3), 7201-7206.

Lucas, R. E., 1978. "Asset Prices in an Exchange Economy". *Econometrica,* 46 (6), 1429-1445.

Shone, R., 1997. *Economic Dynamics: Phase Diagrams and their Economic Application.* Cambridge: Cambridge University Press.

Dodatak: Dokazi lema

Dokaz leme 1.

Kako je $g < 0$, vrijedi da je $\frac{2R}{g} < 0$ i izraz $m^* = 1 - \frac{2R}{g}$ uvijek je veći od jedan. Nasuprot tome, vrijednost tangentno-hiperboličke funkcije definirana je na intervalu između -1 i 1. Budući da je $k > 0$, $g < 0$, $R > 1$, $C > 0$, a varijabla x je kvadrirana, desna strana izraza (29) uvijek je -1 i 0. Stoga izraz (29) neće imati rješenje i fundamentalno je ravnotežno stanje $(0, m^{eq})$ jedinstveno ravnotežno stanje sustava. Kako izraz (27) ne sadržava parametar snage memorije, baš kao ni izraz (26), memorija ne utječe na poziciju ravnotežnog stanja.

Dokaz leme 2.

Iz karakteristične jednadžbe (36) mogu se dobiti tri svojstvene vrijednosti, od čega su dvije zapravo dvostruke. Prva svojstvena vrijednost osigurava stabilnost kad vrijedi $-R < gn_2^{eq} < R$, dok druga i treća (dvostruke svojstvene vrijednosti) uvijek osiguravaju stabilnost. Fundamentalno je ravnotežno stanje stabilno, $-\frac{R}{n_2^{eq}} < g < \frac{R}{n_2^{eq}}$, ali kako n_2^{eq} ovisi o drugim parametrima sustava i $g < 0$, stabilnost jamči samo ispunjenje uvjeta $-R < g < 0$. Budući da se parametar snage memorije pojavljuje tek u trećoj (dvostrukoj) svojstvenoj vrijednosti, nameće se zaključak da memorija ne utječe na stabilnost ravnotežnog stanja, što je i pokazano u reduciranom sustavu.

Dokaz leme 3.

Iz izraza za svojstvenu vrijednost λ_1 karakteristične jednadžbe (36) očito je da je za $g < -2R$ fundamentalno ravnotežno stanje nestabilno. Nadalje, kako vrijedi $0 < m^* < 1$, jednadžba (40) ima dva rješenja, x^* i $-x^*$. Ako je jednadžba (38) zadovoljena, iz izraza $m^* = 1 + \frac{2R}{g}$ i (40) proizlazi da je $\{(x^*, m^*), (-x^*, m^*)\}$ ciklus *period 2*. Konačno, za $-2R < g < -R$ fundamentalno je ravnotežno stanje nestabilno i jednadžba (40) ima rješenja $\pm x^*$ ako i samo ako vrijedi da je $m^* > m^{eq} = \tanh\left[-\frac{\beta C}{2}\right]$. S obzirom na to da parametar snage memorije ne utječe na razliku frakcija tipova uvjerenja, može se reći da memorija ne utječe na poziciju ciklusa *period 2*.

Dokaz leme 4.

Za slučaj s $h = 1, \ldots, H$ čisto pristranih tipova b_h (uključujući i fundamentaliste s $b_1 = 0$) bit će dobiven nešto općenitiji rezultat. Polazeći od netransformiranih varijabli, sustav je dan jednakostima s:

$$Rx_t = \sum_{h=1}^{H} n_{h,t} b_h, \tag{A1}$$

$$n_{ht} = \frac{\exp\left[\beta\,(wU_{h,t-2} + (1-w)\left[k\,(x_{t-1} - Rx_{t-2})\,(b_h - Rx_{t-2})\right]\right]}{\sum_{i=1}^{H}\exp\left[\beta\,(wU_{i,t-2} + (1-w)\left[k\,(x_{t-1} - Rx_{t-2})\,(b_i - Rx_{t-2})\right])\right]};\, 1 \le h \le H. \qquad \text{(A2)}$$

Nakon izlučivanja identičnih članova iz eksponenata brojnika i nazivnika izraza (A2) dobiven je razlomak oblika:

$$n_{ht} = \frac{\exp\left[\beta\,(wU^{o}_{h,t-2} + (1-w)k\,(x_{t-1} - Rx_{t-2})\,b_h)\right]}{\sum_{i=1}^{H}\exp\left[\beta\,(wU^{o}_{i,t-2} + (1-w)k\,(x_{t-1} - Rx_{t-2})\,b_i)\right]};1 \le h \le H, \qquad \text{(A3)}$$

gdje je U^{o}_{ht} prilagodba trgovca tipa *h*, postignuta izlučivanjem identičnih članova kao u prethodnom izrazu. Dinamički sustav definiran izrazima (A1) i (A3) stoga ima oblik:

$$Rx_t = V_{\beta k}(x_{t-1} - Rx_{t-2}), \qquad \text{(A4)}$$

pri čemu je desna strana funkcije definirana ovako:

$$V_{\beta k}\ (y_t) = \frac{\exp\left[\beta\,(wU^{o}_{h,t-2}(y_{t-1}) + (1-w)kb_h y_t)\right]}{\sum_{i=1}^{H}\exp\left[\beta\,(wU^{o}_{i,t-2}(y_{t-1}) + (1-w)kb_i y_t)\right]} = \sum_{h=1}^{H} b_h n_h = \langle b_h \rangle. \qquad \text{(A5)}$$

Kako iz (52) i (53) slijedi da je $U_h^* = kx^*\,(1-R)\,(b_h - Rx^*)$, ravnotežna stanja izraza (A1) i (A3) ili izraza (A4) određena su ovako:

$$Rx^* = V_{\beta k}(x^* - Rx^*) = V_{\beta k}(-rx^*). \qquad \text{(A6)}$$

Pri tome vrijedi $r = R - 1$. Budući da ravnotežno stanje mora zadovoljiti jednadžbu (A6), jednostavan izračun, prema Brocku i Hommesu (1998, str. 1271), pokazuje da vrijedi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}V_{\beta k}(y) = \sum_{h=1}^{H}\left(\frac{\beta\,kb_h\exp[\beta kb_h\,y]}{\sum_{i=1}^{H}\exp[\beta\,kb_i y]} - \frac{\exp[\beta\,kb_h y]}{\left(\sum_{i=1}^{H}\exp[\beta\,kb_i y]\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\sum_{i=1}^{H}\exp[\beta\,kb_i y]\right)\right)b_h =$$

$$= \sum_{h=1}^{H}\left(\beta\,kn_h b_h^2 - \beta\,kn_h b_h \sum_{h=1}^{H} n_h b_h\right) = \sum_{h=1}^{H}\left(\beta\,kn_h b_h^2 - \beta\,kn_h b_h\,\langle b_h\rangle\right) =$$

$$\beta\,k\left[\langle b_h^2\rangle - \langle b_h\rangle^2\right] > 0, \qquad \text{(A7)}$$

pri čemu nejednakost proizlazi iz činjenice da se izraz u uglatoj zagradi može interpretirati kao varijanca stohastičkog procesa. Pritom se svaki b_h dobiva uz vjerojatnost n_h. Stoga se pri $x^* \, V_{\beta k}(y) \, x^*$ povećava, a $V_{\beta k}(-rx^*)$ smanjuje, pa iz izraza (A6) proizlazi da ravnotežno stanje x^* mora biti jedinstveno. Iz izraza (A5) dobiva se da je $V_{\beta k}(0) = \sum_{h=1}^{H} \frac{b_h}{H} = \bar{b}$ tako da je x^* jednako fundamentalnom ravnotežnom stanju ako i samo ako vrijedi da je $\bar{b} = 0$. Drukčije rečeno, to je ravnotežno stanje jedinstveno ako su sve pristranosti točno uravnotežene. Budući da u izrazima (A6) i $V_{\beta k}(0)$, ne postoji parametar snage memorije, može se zaključiti da memorija ne utječe na poziciju toga ravnotežnog stanja. Pritom se ipak treba spomenuti da taj izvod vrijedi samo za beskonačan intenzitet izbora jer su samo tada sve frakcije pozitivne.

Dokaz leme 5.

Iz karakteristične jednadžbe (55) može se dobiti pet svojstvenih vrijednosti. Prve tri uvijek osiguravaju stabilnost, dok je ostale dvije ograničavaju. Uz dane uvjete $k > 0$, $b > 0$, $\beta \geq 0$, $R > 1$ i $0 \leq w \leq 1$, uvjet stabilnosti u terminima β zapravo implicira $\beta < -\frac{3}{2kb^2(w-1)}$. Slično tome, uvjet stabilnosti u terminima w upućuje na $w < 1 - \frac{3}{2k\beta b^2}$. Stoga memorija, kako je pokazano, utječe na stabilnost ravnotežnog stanja.

Dokaz leme 6.

Kad se β povećava, izrazi koji sadržavaju β u jednadžbama za izražavanje svojstvenih vrijednosti $\lambda_{4,5}$ također se povećavaju. Pritom jedna svojstvena vrijednost mora prijeći jedinični krug u nekoj kritičnoj točki $\beta = \beta^*$. Tada, naime, fundamentalno ravnotežno stanje postaje nestabilno. Bifurkacija se mora dogoditi jer je iz karakteristične jednadžbe vidljivo da za sve $\beta \geq 0$ vrijedi $g(1) > 0$ i $g(-1) < 0$. U trenutku bifurkacije umnožak jedinstvenih vrijednosti $\lambda_{4,5}$ mora biti jednak 1, tj. mora vrijediti $-\frac{2}{3} k\beta b^2 (w-1) = 1$. To se događa kad postoje dvije realne svojstvene vrijednosti čiji je umnožak jednak jedinici, ili kod konjugirano kompleksnog para svojstvenih vrijednosti. Kako je izraz $\beta^* = -\frac{3}{2kb^2(w-1)}$ za svaku danu konačnu snagu memorije unutar intervala (58), moguće je zaključiti kako za $\beta = \beta^*$ svojstvene vrijednosti moraju biti kompleksne te se stoga događa Hopfova bifurkacija. S obzirom na to da parametar snage memorije uključen u izraz za β^*, zaključuje se da memorija utječe na pojavljivanje bifurkacije. Što je veća vrijednost tog parametra, to će i bifurkacijska vrijednost biti veća.

Miroslav Verbič

On the Role of Memory in an Asset Pricing Model with Heterogeneous Beliefs

Abstract

The paper discusses the role of memory in an asset pricing model with heterogeneous beliefs. In particular, we were interested in how memory in the fitness measure affects stability of evolutionary adaptive systems and survival of technical trading. In order to obtain an insight into this matter two cases were analyzed; a two-type case of fundamentalists versus contrarians and a three-type case of fundamentalists versus opposite biases. It has been established that increasing memory strength has a stabilizing effect on dynamics, though it is not able to eliminate speculative traders' short-run profit seeking behaviour from the market. Furthermore, opposite biases do not seem to lead to chaotic dynamics, even when there are no costs for fundamentalists. Apparently some (strong) trend extrapolator beliefs are needed in order to trigger chaotic asset price fluctuations.

Keywords: asset pricing, biased beliefs, contrarians, fitness measure, fundamentalists, heterogeneous beliefs, memory strength, stability