

Stručni rad

## **PITAGORA, GDJE SI?**

mag. Simona Kokol, prof. matematike  
Gimnazija Ptuj

**Sažetak**

Pitagorin teorem jedan je od najpoznatijih geometrijskih teorema. U okviru projektne aktivnosti učenici 4. razreda gimnazije tražili su poglavlja u kojima se koristi Pitagorin poučak. Radilo se u grupama. Svaka od njih tražila je Pitagorin poučak u određenoj godini učenja. Tijekom aktivnosti učenici su učvrstili svoje znanje i stekli uvid u matematičko gradivo koje je potrebno za maturo.

**Ključne riječi:**

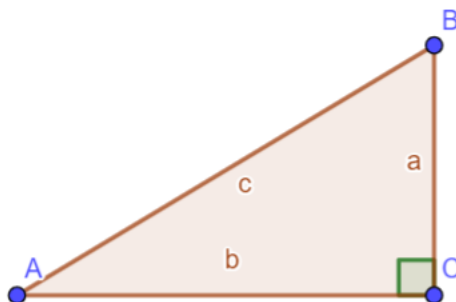
kompleksni brojevi, udaljenost, vektori, trigonometrijska funkcija, kružnica

## 1. Uvod

Pitagorin teorem je osnovni i najpoznatiji teorem geometrije koji se odnosi na pravokutne trokute i glasi:

Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama. Ako su  $a$  i  $b$  duljine kateta, a  $c$  duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, tada vrijedi

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Slika 1: Pravokutni trokut sa hipotenuzom  $c$  i katetama  $a$  i  $b$

Kao temeljni gradivni element geometrije, Pitagorin poučak često se skriva i koristi u raznim područjima matematike. Učenici često zaboravljaju da je temelj izvedenih formula i jednadžbi upravo Pitagorin teorem. Kada učenici uče za maturu i trebaju poznavati cjelokupni sadržaj srednjoškolskog programa, dobrodošlo je da radu pristupaju cjelovito i povezujući. Na taj će način lakše i trajnije zapamtiti gradivo.

## 2. Projektni rad

Projektni rad se temelji na samostalnom radu učenika. Četvrti razred srednje škole sam odlučila podijeliti u tri grupe, gdje je svaka grupa istraživala gradivo pojedine godine matematike. Cilj i želja je uključiti sve studente u projektnu aktivnost te ih potaknuti na aktivno učenje i istraživanje te učvršćivanje znanja. Tražeći gdje su i u kojim poglavljima matematike koristili Pitagorin poučak tijekom godina učenja, nesvjesno su ponavljali matematiku na drugačiji način.

Pri formiranju grupa treba voditi računa o njihovoj heterogenosti te uključiti učenike različitih sposobnosti i poticati ih na zajedničko učenje.

### 2.1. Pitagora u 1. razredu

Prva skupina je pronašla primjenu Pitagorinog teorema u izvođenju formule za udaljenost točaka i u konstrukciji kvadratnog korijena.

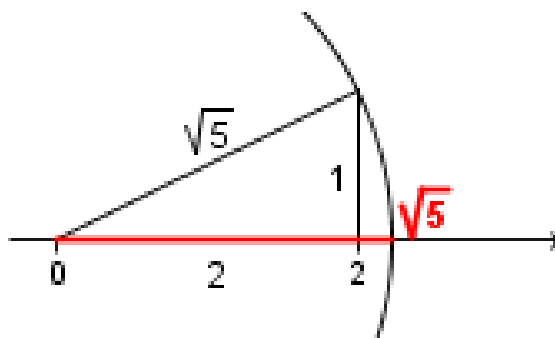
Za konstrukciju određenih kvadratnih korijena koristimo Pitagorin teorem, gdje je traženi korijen duljina hipotenuze, ako je broj ispod korijena jednak zbroju kvadrata prirodnih brojeva, ili duljina katete, ako je broj pod korijenom jednak razlici kvadrata prirodnih brojeva.

Primjer:

Kvadratni korijen broja 5 možemo zapisati kao zbroj kvadrata broja 2 in 1,

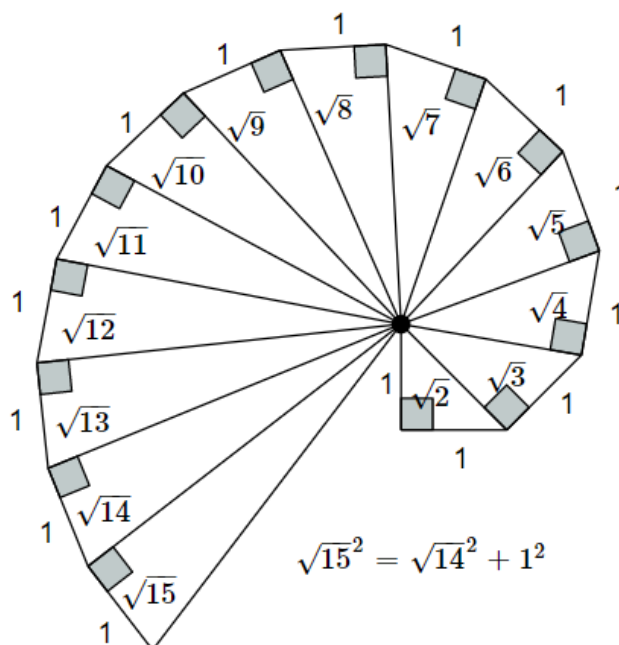
$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}.$$

Dakle, duljina hipotenuze pravokutnog trokuta sa katetama duljine 2 i 1 jednaka je  $\sqrt{5}$ .



Slika 2: konstrukcija  $\sqrt{5}$  koristeći Pitagorin poučak

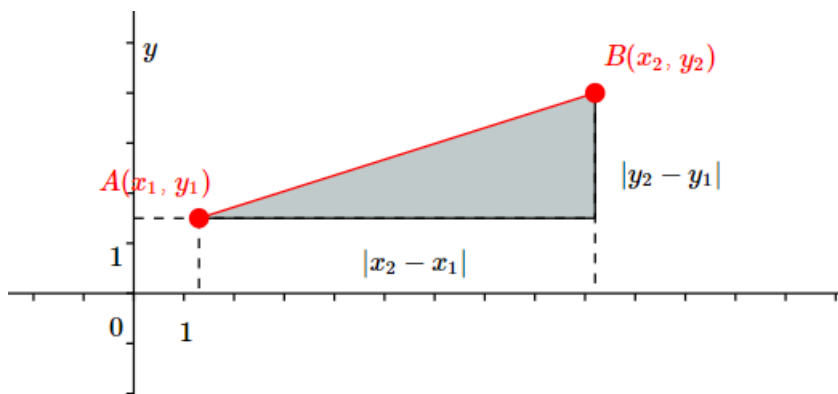
Na sličan način nastaje poznati Pitagorin puž (slika 2), koji prikazuje udaljenosti čije su duljine jednake korijenima uzastopnih prirodnih brojeva.



Slika 3: Pitagorin puž

Još jedna upotreba Pitagorinog teorema je izračunavanje udaljenosti između dviju točaka u ravnini. Ako znamo koordinate točaka  $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$  u ravnini, tada se udaljenost između njih izračunava kao duljina hipotenuze u trokutu, gdje je duljina jednoga kraka absolutna razlika x koordinata točaka i duljina drugog kraka je absolutna razlika y koordinata podatkovnih točaka. Tako dobivamo formulu

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

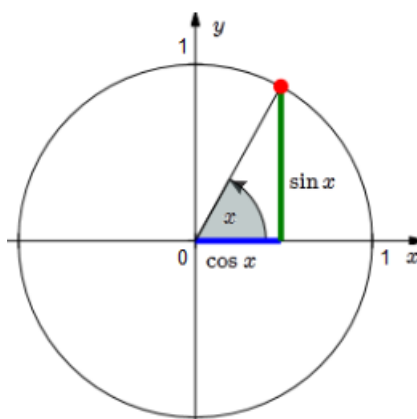


Slika 4: Udaljenost između dvije točke u ravnini

## 2.2. Pitagora u 2. razredu

U drugoj godini najprije definiramo trigonometrijske funkcije u pravokutnom trokutu, a zatim njihovu definiciju proširujemo na jediničnu kružnicu (slika 4). Kutne funkcije kao omjeri stranica u pravokutnom trokutu povezane su Pitagorinim teoremom u poznatoj relaciji:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$



Slika 5: Jedinična kružnica i kutne funkcije

Zapisana relacija slijedi izravno iz Pitagorinog poučka ako se podjeli sa kvadratom hipotenuze. Zapisani odnos može se i vidjeti na pravokutnom trokutu (slika 4), gdje su katete jednake odgovarajućim funkcijama, a hipotenuza je jednaka polumjeru jedinične kružnice.

Ponovo se susrećemo s Pitagorinim teoremom kod vektora. Uz pomoć vektora i skalarnog produkta izvodimo kosinusni teorem koji vrijedi u svakom trokutu. Koristi se za izračun treće stranice trokuta ako su nam poznate dvije stranice i međukut:

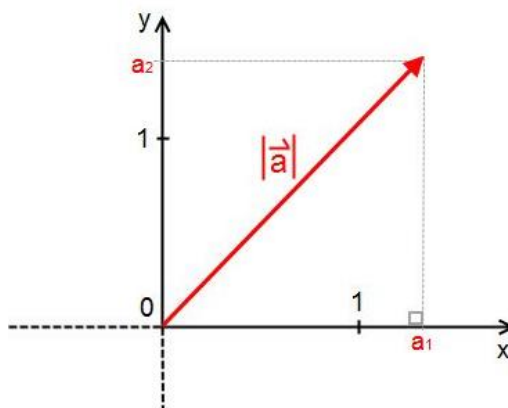
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

U slučaju pravog kuta  $\gamma$  dobivamo Pitagorin poučak jer je  $\cos 90^\circ = 0$ .

U standardnoj bazi ravnine duljina vektora  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  izračunava se pomoću formule:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

što je u biti Pitagorin teorem.

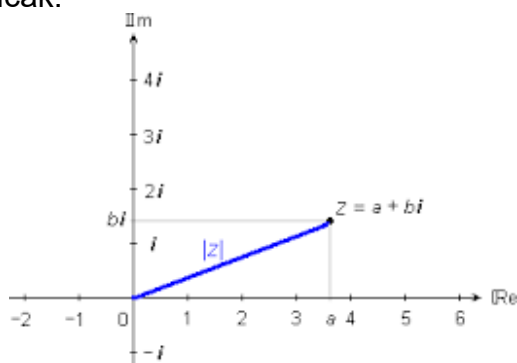


Slika 6: Duljina vektora

Pitagorin poučak ponovo koristimo kod kompleksnih brojeva za izračun apsolutne vrijednosti tih brojeva. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja jednaka je udaljenosti tog broja od broja 0. Kompleksni broj  $z = a + bi$  prikazan je u kompleksnoj ravnini kao točka s koordinatama  $z = (a, b)$  i zato je

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

što je opet Pitagorin poučak.

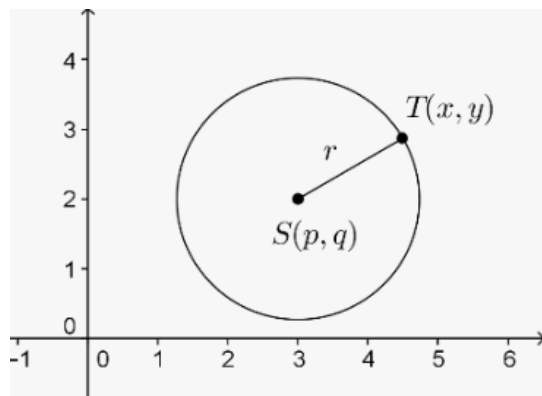


Slika 7: Kompleksna ravnina

### 2.3. Pitagora u 3. razredu

U ovoj godini upoznamo analitičku definiciju kružnice. Kružnica je skup točaka u ravnini koje su jednako udaljene od dane točke (središta). Za svaku točku  $T(x, y)$  na kružnici sa središtem u točki  $S(p, q)$ , udaljenost između njih jednaka je polumjeru  $r$ . Jednadžba kružnice je stoga ista kao formula za udaljenost između

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$



Slika 8: Kružnica

Sljedeća poglavlja, u kojima se najviše koristi Pitagorin teorem, su metrička geometrija u ravnini i u prostoru.

Koristimo ga za izračunavanje nepoznate duljine u različitim likovima, na primjer za izračun:

- diagonale kvadrata  $d = a\sqrt{2}$  i pravokutnika  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,
- visine jednakokraničnog trokuta  $v = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ ,
- visine jednakokračnog trapeza  $v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2}$ ,
- stranice romba sa diagonalama e i f  $a = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2}, \dots$

Koristi se za izračunavanje nepoznatih dimenzija u geometrijskim tijelima, za izračun tjelesne dijagonale kocke  $D = a\sqrt{3}$  i kvadra  $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , visine stošca  $v = \sqrt{s^2 - r^2}$ , visine piramide,...

### 3. Zaključak

Tijekom aktivnosti učenici su ponovili i učvrstili pojedina matematička poglavlja te se detaljno osvrnuli na korištenje Pitagorinog poučka u različitim temama u različitim godinama srednjoškolskog obrazovanja. Prva grupa našla je primjenu u konstrukciji kvadratnog korijena i u izračunavanju udaljenosti između dviju točaka. Druga grupa je pronašla Pitagorin teorem kod trigonometrijskih funkcijama, kompleksnih brojeva i vektorskim kodovima. Treća skupina bavila se sa jednadžbo kružnice i metričkoj geometriji u ravnini i prostoru. Pritom su nesvjesno pregledavali matematičke sadržaje i ujedno dobili pregled matematike koji im je od koristi prilikom učenja za maturu. Izradom prezentacije za ostale učenike koristili su tehnologiju u obrazovne svrhe i vježbali govor.

## 4. Literatura

- [1.] Jericijo, O., Kapus, H., Mohorčič, A., Pustavrh, S., Škrlec, M., Rauter Repija, I., Zmazek, V. (2014): Vega 1. URL: <https://eucbeniki.sio.si/vega1/41/index.html>
- [2.] Ivanec, D., Janežič, T., Jeler, A., Jericjo, O., Mohorčič, A., Pečovnik Menciger, A., Pustavrh, S., Špolad, M., Zmazek, V. (2014): Vega 2. URL: <https://eucbeniki.sio.si/vega2/index.html>
- [3.] Ivanec, D., Jericijo, O., Mohorčič, A., Pustavrh, S., Škrlec, M., Rauter Repija, I., Zmazek, V. (2015): Vega 3. URL: <https://eucbeniki.sio.si/vega3/index.html>