IZVORNI ZNANSTVENI RAD
UDK 330.13:519.86

Prof. dr. sc. Ante Puljić

Mira Oraić, dipl.oec.

OD DIREKTNE DO INDIREKTNE FUNKCIJE KORISNOSTI I NATRAG

DUALITY BETWEEN DIRECT AND INDIRECT UTILITY FUNCTION

SAŽETAK: U ovom se članku svestrano analizira dualnost između dva modela ograničene optimizacije, između modela ograničene maksimizacije funkcije korisnosti i modela ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti. U procesu se ograničene maksimizacije funkcije korisnosti uzgredno izvodi Hotelling – Woldov identitet koji na znatno jednostavniji način generira rješenje modela ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti, inverzne Marshallove funkcije potražnje, od procesa rješavanja ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti. Royov identitet koji na znatno jednostavniji način generira rješenje problema ograničene maksimizacije funkcije korisnosti, Marshallove funkcije potražnje, od procesa rješavanja ograničene maksimizacije funkcije korisnosti. Oba procesa rješavanja daju jednake rezultate obrnutim redoslijedom. Ovi su teoretski rezultati doveli do velikog napretka na području empirijskih istraživanja.

KLJUČNE RIJEČI: model ograničene maksimizacije funkcije korisnosti, model ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti, Hotelling – Woldov identitet, Royov identitet, Marshallove funkcije potražnje, inverzne Marshallove funkcije potražnje

ABSTRACT: This article delivers a comprehensive analysis of duality between two models of constrained optimization, between the constrained maximization of the utility function model and the constrained minimization of indirect utility function model. In the process of constrained maximization of the utility function a Hotelling-Wold identity is derived in parallel, which generates the solution of the model of constrained minimization of the utility function, inverse Marshallian demand functions, in a significantly simpler way than the process of constrained minimization of the indirect utility function. Roy's identity generates the solution of the process of constrained maximization of the utility function problem, Marshallian demand function, in a significantly simpler way than the process of solving a constrained maximization of the utility function. Both ways of solving produce equal results in the reverse order. These theoretical results have led to considerable progress in the field of empirical research.

KEY WORDS: the constrained maximization of the utility function model, the constrained minimization of indirect utility function model, Hotelling-Wold identity, Roy's identity, Marshallian demand functions, inverse Marshallian demand functions

1. UVOD

Teoriju je dualnosti u ekonomiku uveo Harold Hotelling 1932. godine. Dugo je nakon toga bila neopravdano zanemarivana, stoga je tek šezdesetih godina prošloga stoljeća započela igrati važniju ulogu u teoretskoj i empirijskoj ekonomici. Nju je teško precizno definirati jer na različitim područjima iskrsava na velik broj različitih načina i igra veliki broj različitih uloga. Bez obzira na to, ovdje kao preludij raspravi o dualnosti u okviru teorije potražnje prihvaćamo njezinu najučestaliju definiciju koja kaže da je dualnost u ekonomskoj teoriji odnos između dva problema ograničene optimizacije. U našem se članku uistinu o tome i govori, o dualnosti između modela ograničene maksimizacije funkcije korisnosti i modela ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti. U njemu ćemo, u odnosu na dosadašnje postupke, na poboljšan način izvesti osnovni dualni rezultat, ističući u procesu izvođenja važnost Hotelling – Woldovog identiteta i Royovog identiteta znatno više nego što se to obično čini.

Scenarij našega članka polazi od stajališta da osnovni dualni rezultat kaže kako vektor normaliziranih cijena dobara, koji je zadan u problemu ograničene maksimizacije funkcije korisnosti, rješava problem ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti u kojem je zadana košara dobara koja rješava problem ograničene maksimizacije korisnosti. Jednostavnije rečeno, osnovni dualni rezultat kaže da dva problema ograničene optimizacije imaju jednaka rješenja zapisana na dva različita načina. Rješenje je modela ograničene maksimizacije funkcije korisnosti sustav Marshallovih ili nekompenziranih funkcija potražnje, dok je rješenje modela ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti sustav inverznih Marshallovih ili nekompenziranih funkcija potražnje. Ili još jasnije, sustav je inverznih Marshallovih ili nekompenziranih funkcija potražnje inverz Marshallovih ili nekompenziranih funkcija potražnje i obrnuto. Kada Marshallove funkcije potražnje uvrstimo u funkciju korisnosti, dobivamo indirektnu funkciju korisnosti, a kada inverzne Marshallove funkcije potražnje uvrstimo u indirektnu funkciju korisnosti, dobivamo funkciju korisnosti. U okviru ovog scenarija, grafički dokaz kvazikonveksnosti indirektne funkcije korisnosti i grafički prikaz dualnosti dvaju modela ključne su novine u ovom članku.

Osnovni dualni rezultat uzgredno prate još dva jednako važna rezultata, Hotelling – Woldov identitet i Royov identitet. Hotelling – Woldov identitet, koji normaliziranu cijenu svakog dobra izražava kao funkciju količina svih dobara, na jednostavan ćemo način, derivirajući direktnu funkciju korisnosti, uzgredno izvesti na putu od direktne do indirektne funkcije korisnosti, dok ćemo Royov identitet, koji količinu svakog dobra izražava kao funkciju normaliziranih cijena svih dobara, na jednostavan način, derivirajući indirektnu funkciju korisnosti, uzgredno izvesti na putu od indirektne do direktne funkcije korisnosti. Tako ćemo, rješavajući model ograničene maksimizacije korisnosti, uzgredno jednostavnije izvesti rješenje modela ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti nego izravnim rješavanjem modela ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti i, rješavajući model ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti, uzgredno jednostavnije izvesti rješenje modela ograničene maksimizacije funkcije korisnosti nego izravnim rješavanjem modela ograničene maksimizacije funkcije korisnosti.

2. KVAZIKONVEKSNOST INDIREKTNE FUNKCIJE KORISNOSTI

Indirektnu funkciju korisnosti možemo promatrati kao funkciju cijena dobara i dohotka potrošača i, zbog toga što ona u cijenama i dohotku ima stupanj homogenosti jednak nuli, kao funkciju normaliziranih cijena dobara. Pritom je normalizirana cijena nekog dobra jednaka odnosu cijene tog dobra i dohotka potrošača. U nastavku ćemo prvo pokazati da je indirektna funkcija korisnosti, promatrana kao funkcija cijena i dohotka, kvazikonveksna u cijenama i dohotku i da je indirektna funkcija korisnosti, promatrana kao funkcija normaliziranih cijena, kvazikonveksna u normaliziranim cijenama dobara. Kvazikonveksnost ćemo u prvom slučaju ilustrirati grafički i dokazati algebarski, a u drugom slučaju dokazati i grafički i algebarski. Napokon, da bismo od čitatelja odagnali svaki strah od pojma kvazikonveksnosti, koji na prvi pogled zvuči pomalo nedokučivo, podsjećamo ga da je neka funkcija kvazikonveksna na domeni kada je njezina vrijednost u točki čije su koordinate ponderirane srednje vrijednosti odgovarajućih koordinata bilo kojih dviju točaka iz domene, jednaka ili manja od veće vrijednosti koje funkcija poprima u te dvije točke.

2.1 Kvazikonveksnost u cijenama i dohotku

Grafička ilustracija kvazikonveksnosti

Pretpostavimo kako potrošač ima mogućnost da za sebe izabere jedan od dva različita skupa ostvarive potrošnje, ili skup ostvarive potrošnje S^1 kojeg određuju cijene dobara $\mathrm{p}^1 = (p_1^1, p_2^1)$ i dohodak M^1,

$$S^1 = \left\{ \mathrm{x} : p_1^1 x_1 + p_2^1 x_2 \le M^1 \right\}, \tag{1}$$

ili skup ostvarive potrošnje S^2 kojeg određuju cijene dobara $\mathrm{p}^2 = (p_1^2, p_2^2)$ i dohodak M^2,

$$S^2 = \left\{ \mathrm{x} : p_1^2 x_1 + p_2^2 x_2 \le M^2 \right\}. \tag{2}$$

Kada bi, gledano sa stajališta potrošača, razine maksimalne korisnosti na tako definiranim skupovima ostvarive potrošnje bile različite, potrošač bi zasigurno izabrao onaj skup ostvarive potrošnje na kojem može postići veću razinu maksimalne korisnosti, a kada bi na oba skupa ostvarive potrošnje razine maksimalne korisnosti bile jednake, potrošaču bi bilo svejedno koji će mu skup ostvarive potrošnje pripasti.

Što bi se zbilo kada bi potrošaču, osim dva definirana skupa ostvarive potrošnje, bio dostupan i treći skup ostvarive potrošnje kojeg, za bilo koje $t \in [0,1]$, određuju prosječne cijene

$$\mathrm{p}^t = t\mathrm{p}^1 + (1-t)\mathrm{p}^2 \tag{3}$$

i prosječni dohodak

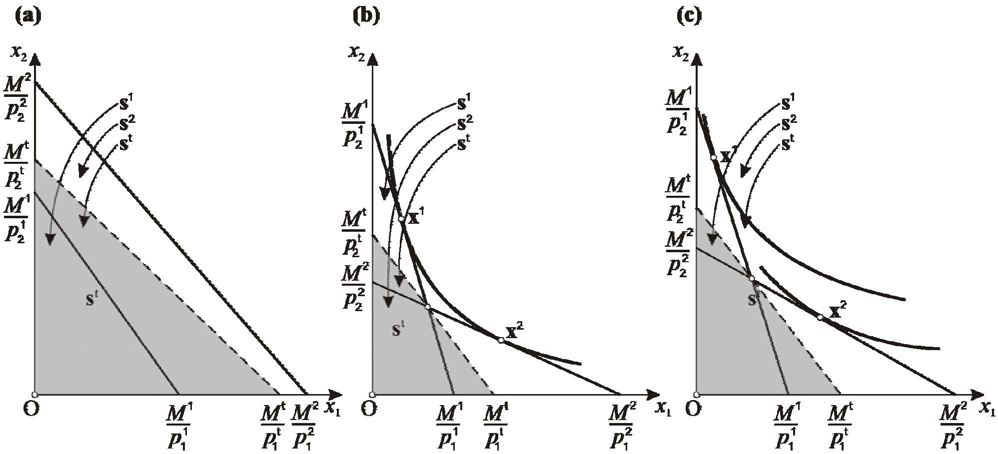
$$M^t = tM^1 + (1-t)M^2, \tag{4}$$

skup ostvarive potrošnje

$$S^t = \left\{ \mathrm{x} : p_1^t x_1 + p_2^t x_2 \le M^t \right\}. \tag{5}$$

Bi li potrošač na tako formiranom skupu ostvarive potrošnje mogao postići veću razinu maksimalne korisnosti od razine maksimalne korisnosti koju može postići na uniji dva skupa ostvarive potrošnje iz kojih je nastao? Za t=0 ne bi, jer je u tom slučaju $S^t = S^2$. Ne bi ni za t=1 jer je u tom slučaju $S^t = S^1$. Bi li takvu razinu maksimalne korisnosti mogao postići za bilo koje $t \in (0,1)$? Odgovor je ponovno negativan. Negativan zbog toga što na opisani način formirane prosječne cijene p^t i na opisani način formirani prosječni dohodak M^t određuju prosječan skup ostvarive potrošnje koji je podskup unije skupova ostvarive potrošnje S^1 i S^2, $S^t \subset S^1 \cup S^2$. Opravdanost ćemo ove tvrdnje u slučaju dvaju dobara grafički ilustrirati i potom je općenito dokazati. Ako dokažemo da je skup S^t podskup unije skupova S^1 i S^2, time ćemo dokazati da razina maksimalne korisnosti koju nezasitan potrošač može ostvariti na skupu ostvarive potrošnje S^t ne može biti veća od razine maksimalne korisnosti koju nezasitan potrošač može ostvariti na uniji skupova S^1 i S^2, odnosno od barem jedne od razina maksimalne korisnosti koje nezasitan potrošač može ostvariti ili na skupu ostvarive potrošnje S^1 ili na skupu ostvarive potrošnje S^2.

Slika 1. Razina maksimalne korisnosti na prosječnom skupu ostvarive potrošnje S^t ne može biti veća od barem jedne od razina maksimalnih korisnosti koje potrošač može ostvariti ili na skupu S^1 ili na skupu S^2



Na sva je tri crteža skup ostvarive potrošnje S^t podskup unije skupova S^1 i S^2, stoga ni u jednom slučaju razina maksimalne korisnosti na skupu ostvarive potrošnje S^t ne može biti veća od barem jedne od razina maksimalnih korisnosti koje nezasitan potrošač može ostvariti ili na skupu ostvarive potrošnje S^1 ili na skupu ostvarive potrošnje S^2.

Na crtežu (*a*) skup ostvarive potrošnje S^t pravi je podskup skupa ostvarive potrošnje S^2, stoga nezasitan potrošač može ostvariti veću razinu maksimalne korisnosti na skupu S^2 nego na skupu S^t. Na crtežu (*b*) nezasitan potrošač može ostvariti jednaku razinu maksimalne korisnosti na skupovima S^1 i S^2. Ta je razina maksimalne korisnosti veća od razine maksimalne korisnosti koju potrošač može postići na njihovom podskupu S^t. Konačno, crtež (*c*) ilustrira situaciju u kojoj je razina maksimalne korisnosti najveća na skupu ostvarive potrošnje S^1.

Ako prihvatimo da su naše tvrdnje istinite, onda u slučaju dvaju dobara možemo pisati:

$$v(p_1^t, p_2^t, \mathrm{M}^t) \leq maks \quad \left[v(p_1^1, p_2^1, \mathrm{M}^1),\, v(p_1^2, p_2^2, \mathrm{M}^2) \right] \qquad \forall t \in [0,\ 1].$$

Proširenje je na *n* dobara izravno:

$$v(p_1^t, p_2^t, ..., p_n^t,\, \mathrm{M}^t) \leq maks \quad \left[v(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1,\, \mathrm{M}^1),\, v(p_1^2, p_2^2, ..., p_n^2,\, \mathrm{M}^2) \right] \qquad \forall t \in [0,\ 1],$$

ili u vektorskom zapisu:

$$v(\mathrm{p}^t, \mathrm{M}^t) \leq maks \quad \left[v(\mathrm{p}^1, \mathrm{M}^1),\, v(\mathrm{p}^2, \mathrm{M}^2) \right] \qquad \forall t \in [0,\ 1].$$

Ako se ovdje prisjetimo da je neka funkcija *f* kvazikonveksna ako i samo ako je za svaki x^1 i x^2 iz domene

$$f(\mathrm{x}^t) \leq maks \left[f(\mathrm{x}^1), f(\mathrm{x}^2) \right] \qquad \forall t \in [0,1], \quad (9)$$

onda je očito da je zapis (8) ekvivalent tvrdnji da je indirektna funkcija korisnosti $v(\mathrm{p}, M)$ kvazikonveksna funkcija u cijenama i dohotku.

Algebarski dokaz kvazikonveksnosti

Kako ćemo dokazati da je naša tvrdnja istinita? Da je naša tvrdnja istinita, dokazat ćemo, kao što smo već rekli, ako dokažemo da je prosječan skup ostvarive potrošnje S^t podskup unije skupova S^1 i S^2. Pretpostavimo radi toga da neka košara dobara x ne pripada uniji skupova

S^1 i S^2, $\mathrm{x} \notin S^1 \cup S^2$. U tom slučaju možemo pisati:

$$\mathrm{p}^1\mathrm{x} > \mathrm{M}^1 \quad (10)$$

$$\mathrm{p}^2\mathrm{x} > \mathrm{M}^2. \quad (11)$$

Kada nejednakost (10) pomnožimo s *t* i nejednakost (11) s (1-*t*) i potom zbrojimo lijeve i desne strane nejednakosti, dobivamo:

$$\left[\mathrm{tp}^1 + (1-\mathrm{t})\mathrm{p}^2 \right] \ \mathrm{x} > tM^1 + (1-t)M^2, \quad (12)$$

odnosno

$$\mathrm{p}^t\mathrm{x} > \mathrm{M}^t. \quad (13)$$

Dobiveni nam rezultat kaže da košara dobara x koja ne pripada uniji skupova ostvarive potrošnje S^1 i S^2, ne pripada ni prosječnom skupu ostvarive potrošnje S^t. To znači da svaka košara dobara koja pripada prosječnom skupu ostvarive potrošnje S^t mora pripadati uniji skupova ostvarive potrošnje S^1 i S^2 i da je prosječni skup ostvarive potrošnje S^t podskup unije skupova ostvarive potrošnje S^1 i S^2.

Indirektna je funkcija korisnosti na prosječnom skupu ostvarive potrošnje

$$v(\mathrm{p}^t, M^t) = maks\left\{ u(\mathrm{x}) : \mathrm{x} \in S^t \right\}. \quad (14)$$

Budući da svaka košara dobara koja pripada prosječnom skupu ostvarive potrošnje S^t mora pripadati uniji skupova ostvarive potrošnje S^1 i S^2,

$$v(\mathrm{p}^t, \mathrm{M}^t) \leq maks \qquad \left[v(\mathrm{p}^1, \mathrm{M}^1), v(\mathrm{p}^2, \mathrm{M}^2)\right] \qquad \forall t \in [0,\ 1].$$

2.2 Kvazikonveksnost u normaliziranim cijenama

Znajući da indirektna funkcija korisnosti u cijenama i dohotku ima stupanj homogenosti jednak nuli, nju, umjesto kao funkciju apsolutnih cijena dobara i dohotka, možemo izraziti kao funkciju normaliziranih cijena dobara. Ako stavimo da je faktor proporcionalnosti $t = \dfrac{1}{M}$, tada možemo pisati:

$$v(\frac{p_1}{M}, \frac{p_2}{M}, 1) = v(P_1, P_2), \tag{16}$$

gdje je $P_1 = \dfrac{p_1}{M}$ normalizirana cijena dobra X_1 i $P_2 = \dfrac{p_2}{M}$ normalizirana cijena dobra X_2. Na jednak način, zbog toga što u cijenama dobara i dohotku imaju stupanj homogenosti jednak nuli, i Marshallove funkcije potražnje, umjesto kao funkcije apsolutnih cijena i dohotka, možemo izraziti kao funkcije normaliziranih cijena dobara.

Do indirektne funkcije korisnosti kao funkcije normaliziranih cijena dobara i Marshallovih funkcija potražnje kao funkcija normaliziranih cijena dobara možemo doći kada u problemu ograničene maksimizacije korisnosti u budžetsko ograničenje uvedemo normalizirane cijena dobara. Nakon što budžetsko ograničenje podijelimo dohotkom *M*, skup se ostvarive potrošnje ne mijenja. Ograničenje tada poprima oblik:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = 1, \tag{17}$$

a indirektna je funkcija korisnosti po definiciji

$$v(P_1, P_2) = \underset{x_1, x_2 \geq 0}{maks} \quad u(x_1, x_2) \tag{18}$$

$$uz\ uvjet\ P_1 x_1 + P_2 x_2 = 1. \tag{19}$$

Rješenja su ovako definiranog problema ograničene maksimizacije korisnosti Marshallove funkcije potražnje u kojima su egzogene varijable normalizirane cijene dobara.

Grafički dokaz kvazikonveksnosti

Kao što iz direktne funkcije korisnosti možemo izvesti krivulju indiferencije koja u prostoru dobara predočuje sve moguće kombinacije dobara koje potrošaču daju jednaku razinu korisnosti, na jednak način iz indirektne funkcije korisnosti možemo izvesti indirektnu krivulju indiferencije koja u prostoru normaliziranih cijena dobara predočuje sve moguće kombinacije normaliziranih cijena dobara pri kojima potrošač može ostvariti jednaku razinu korisnosti. Pretpostavimo da je potrošač pri normaliziranim cijenama dobara $\mathrm{P}^1 = (P_1^1, P_2^1)$ izabrao košaru dobara $\mathrm{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ koja mu daje maksimalnu razinu korisnosti v^1. Koji su to sve parovi normaliziranih cijena dobara pri kojima bi potrošač mogao ostvariti maksimalnu razinu korisnosti v^1? Pogledajmo prije svega što bi se dogodilo kada bi se potrošač suočio sa svim mogućim kombinacijama normaliziranih cijena dobara pri kojima može pribaviti točno košaru dobara x^1. Njih možemo predočiti pravcem kojeg je jednadžba

$$x_1^1 P_1 + x_2^1 P_2 = 1, \tag{20}$$

nagib $-\frac{x_1^1}{x_2^1}$, odsječak na vodoravnoj osi $\frac{1}{x_1^1}$ i odsječak na okomitoj osi $\frac{1}{x_2^1}$. Ako između dobara postoji određeni stupanj supstitucije, potrošač nijednom kombinacijom normaliziranih cijena dobara koja pripada pravcu, osim kombinacijom (P_1^1, P_2^1), ne bi kupio košaru dobara x^1 nego neku drugu košaru dobara koja mu daje veću razinu korisnosti od razine korisnosti v^1. Čitatelj ovdje mora imati na umu da različitim kombinacijama normaliziranih cijena dobara moramo pripisivati različite košare dobara. Kada tako ne bismo činili, onda bi to značilo da cijene dobara i dohodak potrošača ne određuju potrošačev izbor. I pri svakoj kombinaciji normaliziranih cijena dobara unutar trokuta $0\frac{1}{x_2^1}\frac{1}{x_1^1}$ na slici 2 potrošač može kupiti košaru dobara koja mu daje veću razinu korisnosti od razine korisnosti v^1. Izaberimo proizvoljno kombinaciju normaliziranih cijena dobara P^3 unutar trokuta $0\frac{1}{x_2^1}\frac{1}{x_1^1}$ i povucimo segment iz ishodišta kroz točku P^3 kojeg je kraj kombinacija normaliziranih cijena dobara P^2 na pravcu koji predočuje normalizirane cijene dobara pri kojima potrošač može pribaviti točno košaru dobara x^1. Budući da su obje normalizirane cijene u točki P^3 manje od odgovarajućih normaliziranih cijena dobara u točki P^2, potrošač pri kombinaciji cijena P^3 može pribaviti košaru dobara koja mu daje veću razinu korisnosti od košare dobara koju može pribaviti pri kombinaciji cijena P^2. Otuda proizlazi da potrošač pri normaliziranim cijenama dobara u točki P^3 može pribaviti košaru dobara koja mu daje i veću razinu korisnosti od razine korisnosti v^1 koju mu daje košara dobara x^1 pri kombinaciji normaliziranih cijena P^1. Budući da smo točku P^3 proizvoljno izabrali, zaključujemo da pri bilo kojoj kombinaciji normaliziranih cijena dobara iz trokuta $0\frac{1}{x_2^1}\frac{1}{x_1^1}$ potrošač može pribaviti košaru dobara koja mu daje veću razinu korisnosti od razine korisnosti v^1 koju mu daje košara dobara x^1 pri kombinaciji cijena P^1. Sada znamo da se sve kombinacije normaliziranih cijena kojima potrošač može ostvariti maksimalnu razinu korisnosti v^1, izuzev kombinacije cijena P^1, moraju nalaziti iznad pravca koji predočuje skup normaliziranih cijena dobara pri kojima potrošač može pribaviti točno košaru dobara x^1.

Kao što smo nedvojbeno utvrdili pri kojim kombinacijama normaliziranih cijena dobara potrošač može ostvariti veće razine korisnosti od razine korisnosti v^1 koju ostvaruje kombinacijom cijena u točki P^1, jednako tako možemo nedvojbeno utvrditi pri kojim kombinacijama normaliziranih cijena dobara on ostvaruje manje razine korisnosti od razine korisnosti v^1. To su sve one kombinacije normaliziranih cijena dobara u kojima je jedna cijena veća od odgovarajuće cijene u točki P^1 i druga cijena ne manja od odgovarajuće cijene u točki P^1. One se nalaze u osjenčanom dijelu slike 2. Logika je jednostavna. Ako potrošač kombinacijom cijena u točki P^1 ostvaruje maksimalnu razinu korisnosti v^1, onda bilo kojom kombinacijom cijena u kojoj je jedna cijena veća od odgovarajuće cijene u točki

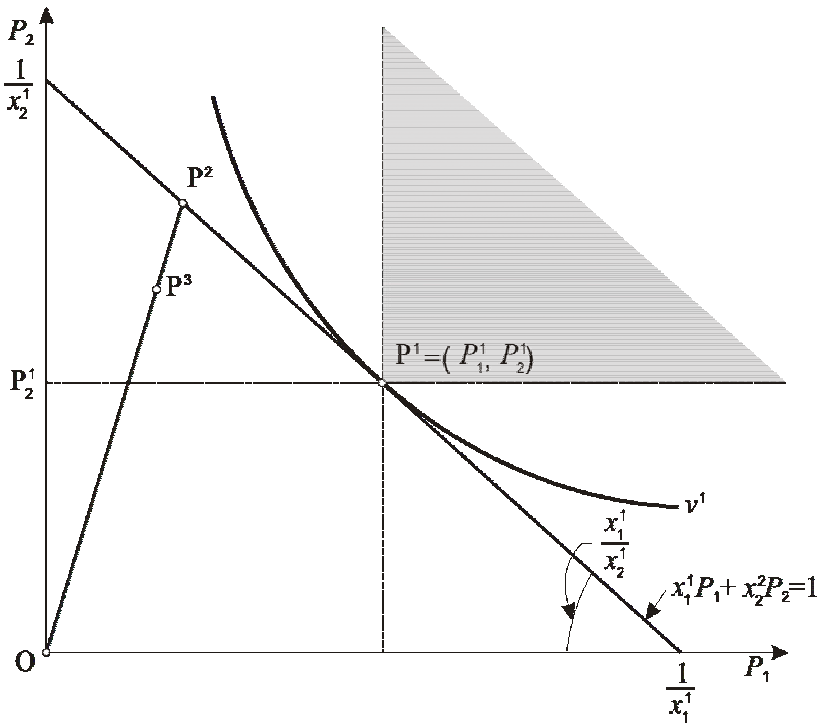
P^1 i druga ne manja od odgovarajuće cijene u točki P^1, mora ostvariti razinu korisnosti manju od razine korisnosti v^1. Ovaj nam zaključak omogućuje da još određenije utvrdimo prostor u kojem se mora nalaziti indirektna krivulja indiferencije. To je prostor između pravca koji predočuje sve moguće kombinacije normaliziranih cijena dobara kojima potrošač može pribaviti košaru dobara x^1 i osjenčanog dijela kojem pripadaju kombinacije normaliziranih cijena pri kojima potrošač ostvaruje manje razine korisnosti od razine korisnosti v^1.

U kombinaciji normaliziranih cijena dobara lijevo od kombinacije (P_1^1, P_2^1) koja potrošaču daje maksimalnu razinu korisnosti v^1, ma kako ona bila blizu kombinaciji cijena (P_1^1, P_2^1), normalizirana cijena dobra X_1 mora biti manja od normalizirane cijene P_1^1 a normalizirana cijena dobra X_2 veća od normalizirane cijene P_2^1. Kada bismo nastavili putovanje lijevo po kombinacijama normaliziranih cijena dobara koje potrošaču daju maksimalnu razinu korisnosti v^1, u svakoj bi idućoj kombinaciji normalizirana cijena dobra X_1 bila manja, a normalizirana cijena dobra X_2 veća od odgovarajuće cijene u kombinaciji cijena koju smo upravo napustili. Na jednak bismo način mogli doći do zaključka da bi, kada bismo putovali desno od kombinacije cijena (P_1^1, P_2^1) po kombinacijama normaliziranih cijena dobara koje potrošaču daju maksimalnu razinu korisnosti v^1, u svakoj idućoj kombinaciji normaliziranih cijena normalizirana cijena dobra X_1 bila veća, a normalizirana cijena dobra X_2 manja od odgovarajuće cijene u kombinaciji normaliziranih cijena koju smo upravo napustili. Nadamo se da smo na opisani način uvjerljivo dokazali da je indirektna krivulja inidferencije negativno nagnuta u odnosu na koordinatni početak.

Dokažimo sada da je indirektna krivulja indiferencije i konveksna u odnosu na koordinatni početak. U proizvoljno je izabranoj točki P^1 pravac koji predočuje sve moguće kombinacije normaliziranih cijena tangenta na indirektnu krivulju indiferencije. To znači kako bismo imali jednak slučaj da smo izabrali bilo koju drugu kombinaciju normaliziranih cijena kojom potrošač kupuje neku drugu košaru dobara i ostvaruje maksimalnu razinu korisnosti v^1. I tada bi pravac koji predočuje sve moguće kombinacije normaliziranih cijena kojima potrošač može kupiti točno tu drugu košaru dobara bio tangenta na indirektnu krivulju indiferencije u toj drugoj točki, stoga je indirektna krivulja indiferencije ovojnica svih mogućih pravaca od kojih svaki predočuje sve moguće kombinacije cijena kojima potrošač može kupiti optimalnu košaru dobara koja u proizvoljno izabranoj cjenovnoj točki daje maksimalnu razinu korisnosti v^1. Jednostavno rečeno, indirektna krivulja indiferencije leži iznad tangente koja krivulju dodiruje u bilo kojoj točki. Zbog toga je indirektna krivulja indiferencije konveksna u odnosu na koordinatni početak, odnosno zbog toga je skup inferiornih kombinacija normaliziranih cijena, kombinacija pri kojima je razina korisnosti jednaka ili manja od razine korisnosti v^1, striktno konveksan. Naravno, to također znači da je indirektna funkcija korisnosti kvazikonveksna.

Postoji opća suglasnost da je konveksnost indirektne krivulje indiferencije ekonomski teško jednostavno interpretirati. Smatra se da je tomu razlog dokazivanje svojstva konveksnosti opovrgavanjem pretpostavke da ono ne postoji, odnosno dokazivanje kontradikcijom. Ipak, valja upozoriti da ono odražava činjenicu kako se pri relativno visokim razinama normalizirane cijene dobra, zahtijevaju relativno male promjene cijene dobra X_1, P_1, da bi se nadoknadile velike promjene cijene P_2 i, obrnuto, kako se pri relativno visokim vrijednostima normalizirane cijene dobra X_1, P_1, zahtijevaju relativno male promjene cijene dobra X_{21}, P_2, da bi se nadoknadile velike promjene cijene P_1. Mapa indirektnih krivulja indiferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara izgleda potpuno jednako kao i mapa krivulja indiferencije u prostoru dobara. Ipak, između tih dviju vrsta krivulja indiferencije postoje dvije bitne razlike. Prva se očituje u tome da indirektne krivulje indiferencije koje su udaljenije od koordinatnog početka, za razliku od krivulja indiferencije u prostoru dobara, predočuju manje razine korisnosti, i druga u tome da se za konveksnost uobičajenih krivulja indiferencije zahtijeva, a za konveksnost indirektnih krivulja indiferencije ne zahtijeva da potrošačeve preferencije budu konveksne.

Slika 2. Negativno nagnuta i konveksna indirektna krivulja indiferencije



Kada su normalizirane cijene dobara (P_1^1, P_2^1), košara dobara $x^1=(x_1^1, x_2^1)$ potrošaču daje maksimalnu razinu korisnosti v^1. Uz pretpostavku da postoji određeni stupanj supstitucije između dobara, svaka druga kombinacija normaliziranih cijena koja pripada pravcu daje mu veću razinu maksimalne korisnosti jer njome kupuje košaru dobara različitu od košare dobara x^1 koja mu je dostupna. Proizvoljno izabrana kombinacija cijena P^3 iz trokuta $0\frac{1}{x_2^1}\frac{1}{x_1^1}$ potrošaču donosi veću razinu maksimalne korisnosti od kombinacije cijena u točki P^2 koja pripada pravcu jer su cijene u točki P^3manje od odgovarajućih cijena u točki

P^2 stoga pri kombinaciji cijena u točki P^3 potrošač ostvaruje veću razinu maksimalne korisnosti od razine v^1. Budući da je točka P^3 proizvoljno izabrana, svaka kombinacija cijena koja pripada trokutu, izuzev kombinacije P^1 potrošaču donosi veću razinu maksimalne korisnosti od razine v^1. Kombinacija cijena u kojima je jedna cijena veća, a druga ne manja od odgovarajuće cijena u točki P^1, predočene osjenčanim prostorom, potrošaču daju manje razine maksimalne korisnosti od razine v^1. U skladu s navedenim, indirektna se krivulja indiferencije mora nalaziti između pravca koji predočuje sve moguće kombinacije normaliziranih cijena kojima potrošač može pribaviti točno košaru dobara x^1 i osjenčane površine koja predočuje kombinacije cijena u kojima je jedna cijena veća, a druga ne manja od odgovarajuće cijene u točki P^1. Pri prijelazu iz točke P^1 u neku drugu točku koja potrošaču donosi maksimalnu razinu korisnosti v^1, cijena se jednog dobra mora povećati, a drugog smanjiti. Zbog toga je krivulja indiferencije negativno nagnuta. Indirektna krivulja indiferencije leži iznad pravca koji je dodiruje u proizvoljno izabranoj točki P^1. Budući da je točka P^1 proizvoljno izabrana, zaključujemo da indirektna krivulja indiferencije leži iznad bilo kojeg pravca koji dodiruje njezinu bilo koju drugu točku i predočuje sve moguće kombinacije normaliziranih cijena kojima potrošač može kupiti točno optimalnu košaru dobara koju bi izabrao kad bi se našao u toj novoj točki. Zbog toga zaključujemo da je indirektna krivulja indiferencije konveksna u odnosu na koordinatni početak, odnosno da je indirektna funkcija korisnosti kvazikonveksna u normaliziranim cijenama dobara.

Algebarski dokaz kvazikonveksnosti

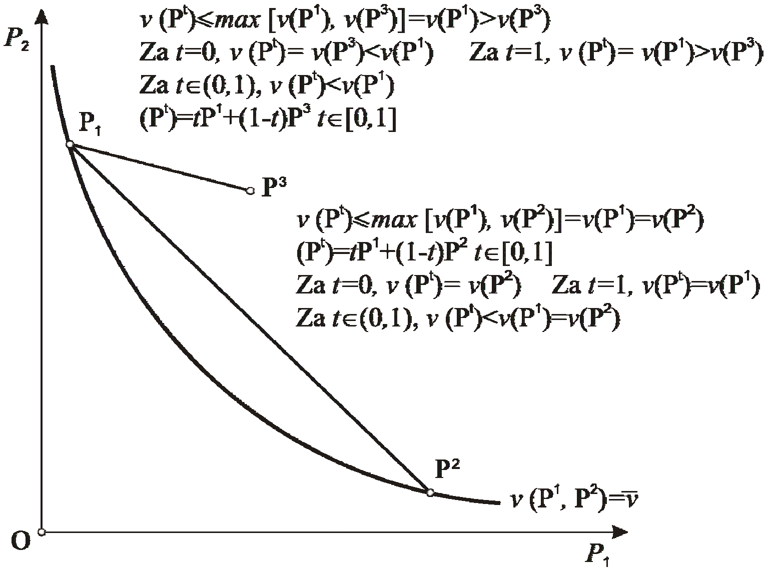
Pozabavimo se još malo kvazikonveksnošću indirektne funkcije korisnosti. Dokaz da je indirektna funkcija korisnosti kvazikonveksna u normaliziranim cijenama P, dokaz je da je skup kombinacija normaliziranih cijena pri kojima razine korisnosti nisu veće od neke zadane razine korisnosti $\overline{v}$ konveksan, odnosno tvrdnji da je krivulja indiferencije, $v(P_1, P_2) = \overline{v}$, konveksna u odnosu na koordinatni početak.

Ili drugačije, tvrdnja da je indirektna funkcija korisnosti kvazikonveksna u P ekvivalentna je tvrdnji da se maksimalna korisnost ostvaruje u jednoj između krajnjih točaka bilo kojeg pravocrtnog segmenta ako su vrijednosti indirektne funkcije korisnosti u tim točkama jednake. Slika 3 jasno ilustrira navedene tvrdnje.

Maksimalna razina korisnosti na pravocrtnom segmentu u prostoru normaliziranih cijena ostvaruje se u jednoj između dvije krajnje točke segmenta. Ako je, na primjer, vrijednost funkcije korisnosti u točki P^1 jednaka $v(P^1) = \overline{v}$ i u točki P^2 također jednaka $v(P^2) = \overline{v}$, tada ni u jednoj drugoj točki koja pripada pravocrtnom segmentu, ni u jednoj drugoj točki $P^t = tP^1 + (1-t)P^2$ za $t \in [0,1]$, vrijednost funkcije korisnosti nije veća od $\overline{v}$. Za $t =$, $v(P^t) = v(P^2) = \overline{v}$. Za $t = 1$, $v(P^t) = v(P^1) = \overline{v}$. Za $0 < t < 1$, $v(P^t) < \overline{v}$. Možemo stoga pisati:

$$v(P^t) \leq maks\left[\left[v(P^1), v(P^2)\right]\right]. \tag{21}$$

Slika 3. Kvazikonveksnost u P: skup $\mathrm{P} : v(\mathrm{P}) \leq \bar{v}$ je konveksan za svako $\bar{v}$



Slično tome, ako je vrijednost funkcije korisnosti u P^1 jednaka $v(\mathrm{P}^1) = v$ i u točki P^3 jednaka $v(\mathrm{P}^3) = \bar{v}$, tada ni u jednoj drugoj točki pravocrtnog segmenta između P^1 i P^3 vrijednost funkcije korisnosti nije veća od $\bar{v}$. Za $t = 0$, $v(\mathrm{P}^t) = v(\mathrm{P}^3) = \bar{\bar{v}} < \bar{v}$, a za $t = 1$, $v(\mathrm{P}^t) = \bar{v}$. Za $0 < t < 1$, $v(\mathrm{P}^t) < \bar{v}$. I u ovom slučaju možemo pisati $v(\mathrm{P}^t) \leq maks\left[v(\mathrm{P}^1), v(\mathrm{P}^3) \right]$.

Sliku 3 nacrtali smo pošto smo grafički dokazali tvrdnju da je u slučaju dvaju dobara indirektna funkcija korisnosti kvazikonveksna, stoga nam preostaje dokazati da tvrdnja vrijedi sasvim općenito. Pretpostavimo da su P^1 i P^2 dva različita vektora normaliziranih cijena i da odgovarajuće vrijednosti indirektne funkcije korisnosti nisu veće od razine korisnosti $\bar{v} : v(\mathrm{P}^1) \leq \bar{v}$ i $v(\mathrm{P}^2) \leq \bar{v}$. Nadalje, neka je $v(\mathrm{P}^t)$ vrijednost indirektne funkcije korisnosti u točki $\mathrm{P}^t = t\mathrm{P}^1 + (1-t)\mathrm{P}^2$ za $t \in [0,1]$. Tvrdimo da je u tom slučaju:

$$v(\mathrm{P}^t) \leq maks\left[v(\mathrm{P}^1), v(\mathrm{P}^2) \right], \tag{22}$$

odnosno da je indirektna funkcija korisnosti kvazikonveksna. Ova je tvrdnja ekvivalentna tvrdnji da svaka košara dobara iz skupa ostvarive potrošnje

$$S^t = \left\{ \mathrm{x} : \mathrm{p}^t \mathrm{x} \leq 1 \right\} \tag{23}$$

mora pripadati uniji skupa ostvarive potrošnje

$$S^1 = \left\{ \mathrm{x} : \mathrm{p}^1 \mathrm{x} \leq 1 \right\} \tag{24}$$

i skupu ostvarive potrošnje

$$S^2 = \left\{ \mathrm{x} : \mathrm{p}^2 \mathrm{x} \leq 1 \right\}. \tag{25}$$

Sažeto, ova je tvrdnja ekvivalentna tvrdnji da je skup ostvarive potrošnje S^t podskup skupa ostvarive potrošnje S^1 i skupa ostvarive potrošnje S^2: $S^t \subset S^1 \cup S^2$.

Tvrdnju ćemo dokazati polazeći od činjenice da u skupu zamislive potrošnje postoji mnogo košara dobara koje ne pripadaju ni skupu ostvarive potrošnje S^1 ni skupu ostvarive potrošnje S^2. Činjenicu da neka košara dobara x iz skupa zamislive potrošnje X ne pripada ni skupu ostvarive potrošnje S^1 ni skupu ostvarive potrošnje S^2 izražavamo zapisima:

$$\mathrm{p}^1 \mathrm{x} > 1 \tag{26}$$

$$\mathrm{p}^2 \mathrm{x} > 1. \tag{27}$$

Sada se pitamo može li neka košara dobara x, koja ne pripada ni skupu ostvarive potrošnje S^1 ni skupu ostvarive potrošnje S^2, koja ne pripada uniji skupova S^1 i S^2, pripadati skupu ostvarive potrošnje S^t ? Do odgovora na to pitanje dolazimo ako, nakon što pomnožimo nejednakost ( ) s *t* i nejednakost ( ) s (1-*t*), lijeve i desne strane novodobivenih nejednakosti zbrojimo. U skladu s izrečenim, dobivamo nejednakost:

$$t\ \mathrm{p}^1 \mathrm{x} + (1-t)\ \mathrm{p}^2 \mathrm{x} > t + 1 - t, \tag{28}$$

odnosno nejednakost

$$\mathrm{p}^t \mathrm{x} > 1, \tag{29}$$

koja nam kaže da nijedna košara dobara koja ne pripada uniji skupova S^1 i S^2 ne pripada ni skupu ostvarive potrošnje S^t, stoga zaključujemo da svaka košara dobara koja pripada skupu ostvarive potrošnje S^t pripada i uniji skupova ostvarive potrošnje S^1 i S^2, odnosno da je skup ostvarive potrošnje S^t podskup unije skupova ostvarive potrošnje S^1 i S^2.

Indirektna je funkcija korisnosti na skupu ostvarive potrošnje S^t

$$v(\mathrm{P}^t) = maks\left\{ u(\mathrm{x}) : \mathrm{x} \in S^t \right\}. \tag{30}$$

Budući da svaka košara dobara koja pripada skupu ostvarive potrošnje S^t, pripada i uniji skupova ostvarive potrošnje S^1 i S^2, maksimalna razina korisnosti na skupu S^t ne može biti veća od maksimalne razine korisnosti koju potrošač može ostvariti barem na jednom od skupova S^1 i S^2. U skladu s navedenim pišemo:

$$v(\mathrm{P}^t) \leq maks\left[v(\mathrm{P}^1), v(\mathrm{P}^2) \right]. \tag{31}$$

3. DUALNOSTI IZMEĐU OGRANIČENE MAKSIMIZACIJE I OGRANIČENE MINIMIZACIJE KORISNOSTI

Da bi se bez poteškoća shvatio ekonomski i matematički smisao dualnosti između direktne i indirektne funkcije korisnosti, mora se, prije svega, nedvojbeno razumjeti ekonomski i matematički smisao modela ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti. Radi toga ćemo prvo u prostoru dobara grafički pokazati da bi potrošač, pri svim kombinacijama normaliziranih cijena koje se razlikuju od kombinacije normaliziranih cijena P^1 i pri kojima može pribaviti točno košaru dobara x^1, ostvario veću razinu maksimalne korisnosti od razine maksimalne korisnosti v^1. Potom ćemo algebarski formulirati model ograničene minimizacije maksimalne razine korisnosti i pokazati kako se budžetske crte i košare dobara koje maksimiziraju korisnost preslikavaju iz prostora dobara u prostor normaliziranih cijena dobara i obrnuto. Preslikavanja iz jednog u drugi prostor teku po načelu recipročnosti koje se najbolje odražava u razlici između zakrivljenosti krivulja indiferencije u prostoru dobara i zakrivljenosti krivulja indiferencije u prostoru normaliziranih cijena. Nakon objašnjenja preslikavanja i razlike između zakrivljenosti krivulja indiferencije slijedi i grafički opis putovanja od direktne do indirektne funkcije korisnosti. Teorem o dualnosti direktne i indirektne funkcije korisnosti i njegov dokaz izražavaju sve naše napore na najsažetiji način. Konačno smo posebno izdvojili Hotelling – Woldov identitet i Royov identitet kao najvažnije rezultate koji proizlaze iz analize dualnih modela i s teoretskog i s empirijskog stajališta.

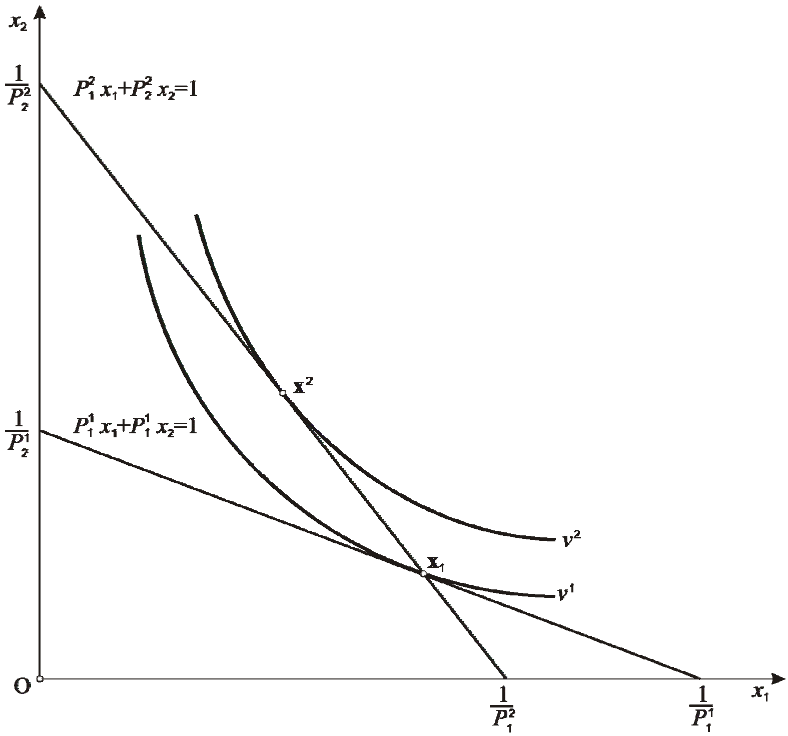
3.1. Ilustracija minimizacije maksimalne korisnosti u prostoru dobara

Objasnili smo zašto bi potrošač koji je pri normaliziranim cijenama (P_1^1, P_2^1) izabrao košaru dobara $\mathrm{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ koja mu daje maksimalnu razinu korisnosti v^1 pri svim drugim kombinacijama normaliziranih cijena pri kojima može pribaviti točno košaru dobara x^1 ostvarivao veće razine maksimalne korisnosti od razine maksimalne korisnosti v^1. Ovaj nalaz lako možemo dokazati i u prostoru dobara s uobičajenim budžetskim crtama i krivuljama indiferencije. Ako su normalizirane cijene dobara (P_1^1, P_2^1) i ako košara dobara x^1 pri tim cijenama potrošaču daje maksimalnu razinu korisnosti v^1, onda normalizirana budžetska crta

$$P_1^1 x_1 + P_2^1 x_2 = 1, \tag{32}$$

dodiruje krivulju indiferencije u točki x^1. Pretpostavimo da su se normalizirane cijene dobara promijenile tako da budžetskoj crti koju formiraju nove cijene P_1^2 i P_2^2 pripada košara dobara x^1. Pri novoj kombinaciji normaliziranih cijena P^2, kao što predočuje slika 4, potrošač ne bi ponovno izabrao dostupnu košaru dobara x^1, košaru presjecišta dviju budžetskih crta i krivulje indiferencije, nego, zbog toga što pri različitim kombinacijama normaliziranih cijena bira različite košare dobara, košaru dobara x^2 koja mu daje veću razinu maksimalne korisnosti, razinu v^2, od razine maksimalne korisnosti v^1. Ono što vrijedi za proizvoljno izabranu kombinaciju normaliziranih cijena P^2, vrijedi za sve kombinacije normaliziranih cijena koje se razlikuju od kombinacije normaliziranih cijena P^1 i formiraju budžetske crte kojima pripada košara dobara x^1. Pri svakoj bi takvoj kombinaciji normaliziranih cijena, kojih je beskonačno mnogo, potrošač ostvario veću razinu maksimalne korisnosti od razine maksimalne korisnosti v^1. Prema tome, razina maksimalne korisnosti v^1 koju potrošaču daje košara dobara x^1 pri kombinaciji normaliziranih cijena P^1 manja je razina maksimalne korisnosti od bilo koje razine maksimalne korisnosti koju potrošač može ostvariti pri nekoj drugoj kombinaciji normaliziranih cijena koja tvori budžetsku crtu kojoj pripada košara dobara x^1.

Slika 4. Minimalna razina maksimalnih korisnosti



Pri kombinaciji normaliziranih cijena dobara (P_1^1, P_2^1) krivulja indiferencije dodiruje normaliziranu budžetsku crtu u točki x^1 koja potrošaču daje razinu maksimalne korisnosti v^1. Kada se normalizirana cijena dobra X_1 poveća s P_2^1 na P_1^2 i normalizirana cijena dobra X_2 smanji s P_2^1 na P_2^2 tako da novoj budžetskoj crti pripada košara dobara x^1, košara dobara x^2 potrošaču daje maksimalnu razinu korisnosti v^2 koja je veća od maksimalne razine korisnosti v^1. Budući da je kombinacija normaliziranih cijena P^2 proizvoljno izabrana, i pri svakoj bi drugoj kombinaciji normaliziranih cijena koja je različita od kombinacije P^1 i koja formira budžetsku crtu kojoj pripada košara dobara x^1 potrošač ostvario maksimalnu razinu korisnosti koja je veća od maksimalne razine korisnosti v^1, stoga zaključujemo da od svih mogućih kombinacija normaliziranih cijena koje formiraju normalizirane budžetske crte koje se sijeku u jednoj točki (košari), potrošač ostvaruje minimalnu razinu maksimalne korisnosti pri onoj kombinaciji normaliziranih cijena pri kojoj krivulja indiferencije dodiruje odgovarajuću budžetsku crtu u košari (točki) presjecišta

3.2. Preslikavanje iz prostora dobara u prostor normaliziranih cijena i obrnuto

Kako bismo sada formulirali općenit model koji nam daje odgovor na pitanje: Pri kojoj između svih mogućih kombinacija normaliziranih cijena dobara koje formiraju budžetske crte kojima pripada košara dobara x^1 potrošač ostvaruje minimalnu razinu maksimalne korisnosti? Odmah nam pada na um da bismo na to pitanje lako našli odgovor minimizirajući indirektnu funkciju korisnosti uz ograničenje da se za svaku moguću kombinaciju normaliziranih cijena mogu kupiti točno količine dobara x_1^1 i x_2^1. Formalni je zapis ovog modela :

$$\min_{P_1, P_2} v(P_1, P_2) \tag{33}$$

$$\text{uz uvjet } x_1^1 P_1 + x_2^1 P_2 = 1. \tag{34}$$

U modelu su endogene varijable normalizirane cijene dobara P_1 i P_2, a egzogene varijable zadane količine dobara x_1^1 i x_2^1. Primijetite da je koeficijent smjera pravca

$$P_2 = \frac{1}{x_2^1} - \frac{x_1^1}{x_2^1} P_1 \tag{35}$$

koji predočuje sve moguće kombinacije normaliziranih cijena za koje potrošač može pribaviti zadanu košaru dobara $\mathrm{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ jednak negativnom odnosu količina dobara, $-\frac{x_1^1}{x_2^1}$, i da se on razlikuje od negativnog odnosa normaliziranih cijena dobara, $-\frac{P_1^1}{P_2^1}$, koji je koeficijent smjera pravca koji predočava sve moguće kombinacije dobara koje potrošač može pribaviti pri normaliziranim cijenama dobara P_1^1 i P_2^1 za normalizirani dohodak koji je jednak jedinici.

Da bismo što bolje shvatili smisao zapisanog modela i njegovu vezu s modelom maksimizacije korisnosti uz zadano budžetsko ograničenje, ovdje ćemo pokazati kako se budžetske crte i košare dobara koje maksimiziraju korisnost, točke dodira različitih budžetskih crta i krivulje indiferencije, preslikavaju iz prostora dobara u indirektne budžetske crte i kombinacije cijena koje minimiziraju maksimalne razine korisnosti, točke dodira indirektnih budžetskih crta i indirektnih krivulja indiferencije, u prostoru normaliziranih cijena dobara i obrnuto, kako se normalizirana budžetska crta

$$P_1^1 x_1 + P_2^1 x_2 = 1 \tag{36}$$

i košara dobara x^1 koja maksimizira korisnost uz to ograničenje iz prostora dobara preslikavaju u prostor normaliziranih cijena dobara. Segmentni je oblik normaliziranog budžetskog pravca

$$\frac{x_1}{\frac{1}{P_1^1}} + \frac{x_2}{\frac{1}{P_2^1}} = 1\,. \tag{37}$$

Iz zapisa se u segmentnom obliku jasno vidi da potrošač za cjelokupni normalizirani dohodak koji je jednak jedinici može kupiti $\frac{1}{P_1^1}$ jedinica dobra X_1 ili $\frac{1}{P_2^1}$ jedinica dobra X_2. Dobivene količine s osiju količina u prostoru količina dobara preslikavamo na odgovarajuće osi normaliziranih cijena u prostoru normaliziranih cijena. Naravno, vrijednosti su normaliziranih cijena recipročne vrijednosti količina $\frac{1}{P_1^1}$ i $\frac{1}{P_2^1}$: $P_1^1 \ = 1 : \frac{1}{P_1^1}$ i $P_2^1 = 1 : \frac{1}{P_2^1}$. Sada je posve jasno kako se polazeći od normalizirane budžetske crte iz prostora dobara dolazi do kombinacije normaliziranih cijena dobara (P_1^1, P_2^1) u prostoru normaliziranih cijena koja minimizira maksimalnu razinu korisnosti kada su zadane količine dobara x_1^1 i x_2^1. Kombinacija normaliziranih cijena dobara (P_1^1, P_2^1) točka je indirektne krivulje indiferencije u kojoj je dodiruje indirektna budžetska crta čiji je nagib $-\frac{x_1^1}{x_2^1}$ i odsječci na osima cijene $\frac{1}{x_1^1}$ i $\frac{1}{x_2^1}$. Indiriktna je budžetska crta u segmentnom obliku

$$\frac{P_1}{\frac{1}{x_1^1}} + \frac{P_2}{\frac{1}{x_2^1}} = 1, \tag{38}$$

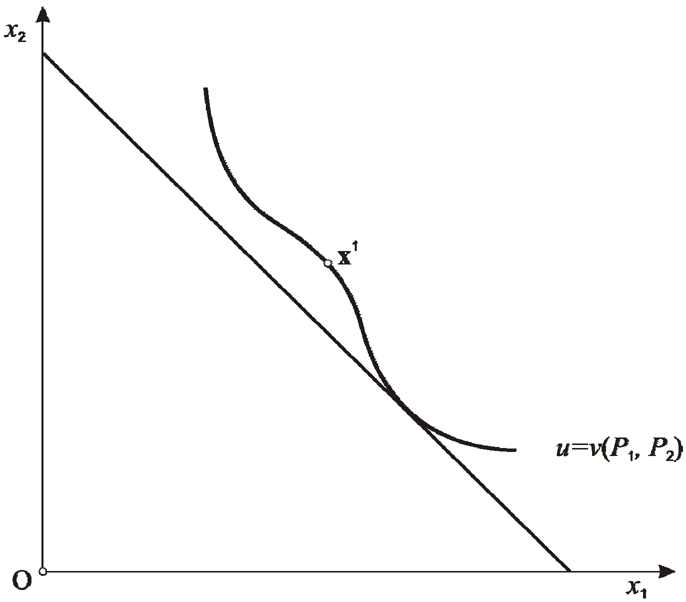
preslika budžetske crte iz prostora dobara u prostor normaliziranih cijena dobara.

Kako putujemo unatrag iz prostora normaliziranih cijena u prostor dobara? Sada normalizirane cijene $\frac{1}{x_1^1}$ i $\frac{1}{x_2^1}$ s osiju normaliziranih cijena preslikavamo na odgovarajuće osi količina u prostor količina. Vrijednosti su odgovarajućih količina recipročne vrijednosti normaliziranih cijena $\frac{1}{x_1^1}$ i $\frac{1}{x_2^1}$: $x_1^1 \ = 1 : \frac{1}{x_1^1}$ i $x_2^1 = 1 : \frac{1}{x_2^1}$. Tako se, polazeći od normalizirane indirektne budžetske crte, iz prostora normaliziranih cijena dobara, dolazi do kombinacije dobara $\mathrm{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ u prostoru dobara koje potrošaču maksimizira korisnost kada su zadane cijene dobara P_1^1 i P_2^1. Kombinacija količina dobara (x_1^1, x_2^1) točka je krivulje indiferencije u kojoj je dodiruje budžetska crta čiji je nagib $-\frac{P_1^1}{P_2^1}$ i odsječci na osima količina $\frac{1}{P_1^1}$ i $\frac{1}{P_2^1}$. Na taj smo se način vratili u mjesto odakle smo započeli naše putovanje. Kružni je tok mogao započeti i iz prostora normaliziranih cijena. U tom bi slučaju tu i završilo naše putovanje.

Na opisani bismo način, beskonačnim brojem ponavljanja, polazeći od pretpostavke da stalno nove budžetske crte u prostoru dobara u stalno novim točkama dodiruju krivulju indiferencije, mogli generirati indirektnu krivulju indiferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara. Jednako bismo tako, beskonačnim brojem ponavljanja, polazeći od novodobivenih indirektnih budžetskih crta i od točaka njihova dodira s indirektnom krivuljom indiferencije, mogli izvesti polaznu krivulju indiferencije u prostoru dobara.

Ovdje moramo eksplicitno navesti da se naše preslikavanje krivulje indiferencije iz prostora dobara u indirektnu krivulju indiferencije i obrnuto, temelji na pretpostavci da je krivulja indiferencije u prostoru dobara striktno konveksna u odnosu na koordinatni početak. Kada to ne bi bilo slučaj, onda bi se moglo dogoditi da neke košare dobara ni pri jednom odnosu normaliziranih cijena dobara ne bi potrošaču maksimizirale korisnost, stoga ih na opisani način ne bismo mogli preslikati iz prostora dobara u prostor normaliziranih cijena dobara. Indirektna bi krivulja indiferencije u tom slučaju sadržavala samo informacije o konveksnim dijelovima krivulje indiferencije iz prostora dobara. Naravno, ono što nije preslikano u indirektnu krivulju indiferencije, ne može se ni preslikati u krivulju indiferencije u prostoru dobara. Iduća slika ilustrira naše razmišljanje.

Slika 5. Krivulja indiferencije koja nije posvuda konveksna



Košara dobara x^1 pripada konkavnom dijelu krivulje indiferencije. Ona ni pri jednom odnosu cijena dobara potrošaču ne bi maksimizirala korisnost, stoga ona ne bi bila ni preslikana u indirektnu krivulju indiferencije. U indirektnu bi krivulju indiferencije bili preslikani samo konveksni dijelovi krivulje indiferencije. Budući da indirektna krivulja indiferencije ne sadrži sve informacije sadržane u krivulji indiferencije, ona ih ni ne može sve vratiti krivulji indiferencije.

Nadamo se da je čitatelju posve jasno kako čitavo vrijeme govorimo o načinu na koji iz direktne funkcije korisnosti izvodimo indirektnu funkciju korisnosti i o simetričnom načinu na koji iz indirektne funkcije korisnosti izvodimo direktnu funkciju korisnosti, odnosno da čitavo vrijeme pokazujemo kako pod određenim uvjetima postoji savršena dualnost između analize potrošačevih preferencija i potrošačeva izbora pomoću količina dobara i analize potrošačevih preferencija i potrošačeva izbora pomoću cijena dobara. Općenito se može reći da dualnost izražava odnos između količina dobara i cijena dobara. U našem je slučaju direktna funkcija korisnosti prvotni pojam jer opisuje potrošačeve preferencije u prostoru dobara, a indirektna funkcija korisnosti dualni pojam jer opisuje potrošačeve preferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara. Naravno, uloge bi se funkcija mogle zamijeniti. Količine su dobara u našem slučaju prvotne varijable, a cijene dobara dualne varijable. Proces maksimizacije korisnosti uz zadane normalizirane cijene daje Marshallove funkcije potražnje, tražene količine kao funkcije cijena, a proces minimizacije indirektne funkcije korisnosti uz zadane količine dobara inverzne funkcije potražnje, cijene dobara kao funkcije količina. To znači da je vezu između normaliziranih cijena dobara i optimalnih količina dobara moguće dobiti rješavajući bilo koji između dva modela. Model maksimizacije direktne funkcije korisnosti transformira se u model minimizacije indirektne funkcije korisnosti zamjenjujući u s v, količine dobara cijenama dobara i proces maksimizacije procesom minimizacije korisnosti, dok se model minimizacije indirektne funkcije korisnosti transformira u model maksimizacije direktne funkcije korisnosti zamjenjujući v s u, normalizirane cijene količinama dobara i proces minimizacije procesom maksimizacije. Dva su problema optimizacije dualni problemi u navedenom smislu.

3.3. Zakrivljenost krivulja indiferencije

Prije nego što prijeđemo na sveobuhvatan grafički prikaz dualnosti između direktne i indirektne funkcije korisnosti, na grafički prikaz putovanja od krivulje indiferencije u prostoru dobara do indirektnih krivulja indiferencije u prostoru normaliziranih cijena, još ćemo nešto reći o odnosu zakrivljenosti krivulja indiferencije u prostoru dobara i krivulja indiferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara. Dokazat ćemo da je zakrivljenost krivulja indiferencije u prostoru dobara inverzno povezana sa zakrivljenošću indirektnih krivulja indiferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara. Radi toga se ovdje moramo prisjetiti da veličina elastičnosti supstitucije između dobara u nekoj točki krivulje indiferencije, veličina proporcionalne promjene omjera dobara po jedinici apsolutne proporcionalne promjene nagiba krivulje indiferencije u toj točki, mjeri lakoću kojom je potrošač spreman supstituirati jedno dobro drugim dobrom. Ako je zakrivljenost krivulje indiferencije u nekoj točki velika, onda je elastičnost supstitucije između dobara mala, a ako je zakrivljenost krivulje indiferencije u nekoj točki mala, onda je elastičnost supstitucije između dobara velika. Kada su dobra komplementi, odnosno kada krivulja indiferencije ima pravokutan oblik, elastičnost je supstitucije između dobara jednaka nuli, a kada su dobra savršeni supstituti, odnosno kada je krivulja indiferencije pravac, elastičnost je supstitucije beskonačno velika. Elastičnost supstitucije između dobara simbolički izražavamo zapisom:

$$\sigma_{12} = \frac{d \ \ln \ (\frac{x_2}{x_1})}{d \ \ln \ (\frac{dx_2}{dx_1})}. \tag{39}$$

U savršenoj konkurenciji, u ravnoteži, apsolutni je nagib krivulje indiferencije jednak odnosu cijena dobara, stoga u tom slučaju možemo pisati

$$\sigma_{12}^{x} = \frac{d \ \ln \ (\frac{x_2}{x_1})}{d \ \ln \ (\frac{P_1}{P_2})}. \tag{40}$$

Kada provedemo naznačene operacije, dobivamo

$$\sigma_{12}^{x} = \frac{d\ (\ln\ x_2 - \ \ln\ x_1)}{d\ (\ln\ P_1 - \ \ln\ P_2)}\ , \tag{41}$$

odnosno

$$\sigma_{12}^{x} = \frac{\frac{dx_2}{x_2} - \frac{dx_1}{x_1}}{\frac{dP_1}{P_1} - \frac{dP_2}{P_2}}\,. \tag{42}$$

Prijeđimo sada u prostor normaliziranih cijena dobara i pogledajmo kako se u tom slučaju definira elastičnost supstitucije između normaliziranih cijena dobara. Elastičnost je supstitucije između cijena dobara u nekoj točki krivulje indiferencije u prostoru cijena dobara odnos proporcionalne promjene relativne cijene dobra i proporcionalne promjene relativne upotrebe dobra, odnosno apsolutne proporcionalne promjene nagiba krivulje indiferencije u toj točki. Simbolički je izražavamo zapisom

$$\sigma_{12}^{P} = \frac{d\ \ln\ (\frac{P_2}{P_1})}{d\ \ln\ (\frac{x_1}{x_2})}\,. \tag{43}$$

Kada provedemo naznačene operacije, dobivamo kvocijent

$$\sigma_{12}^{P} = \frac{\frac{dP_2}{P_2} - \frac{dP_1}{P_1}}{\frac{dx_1}{x_1} - \frac{dx_2}{x_2}}\,, \tag{44}$$

koji se nakon množenja brojnika i nazivnika s (-1) preobražava u recipročnu vrijednost elastičnosti supstitucije između dobara

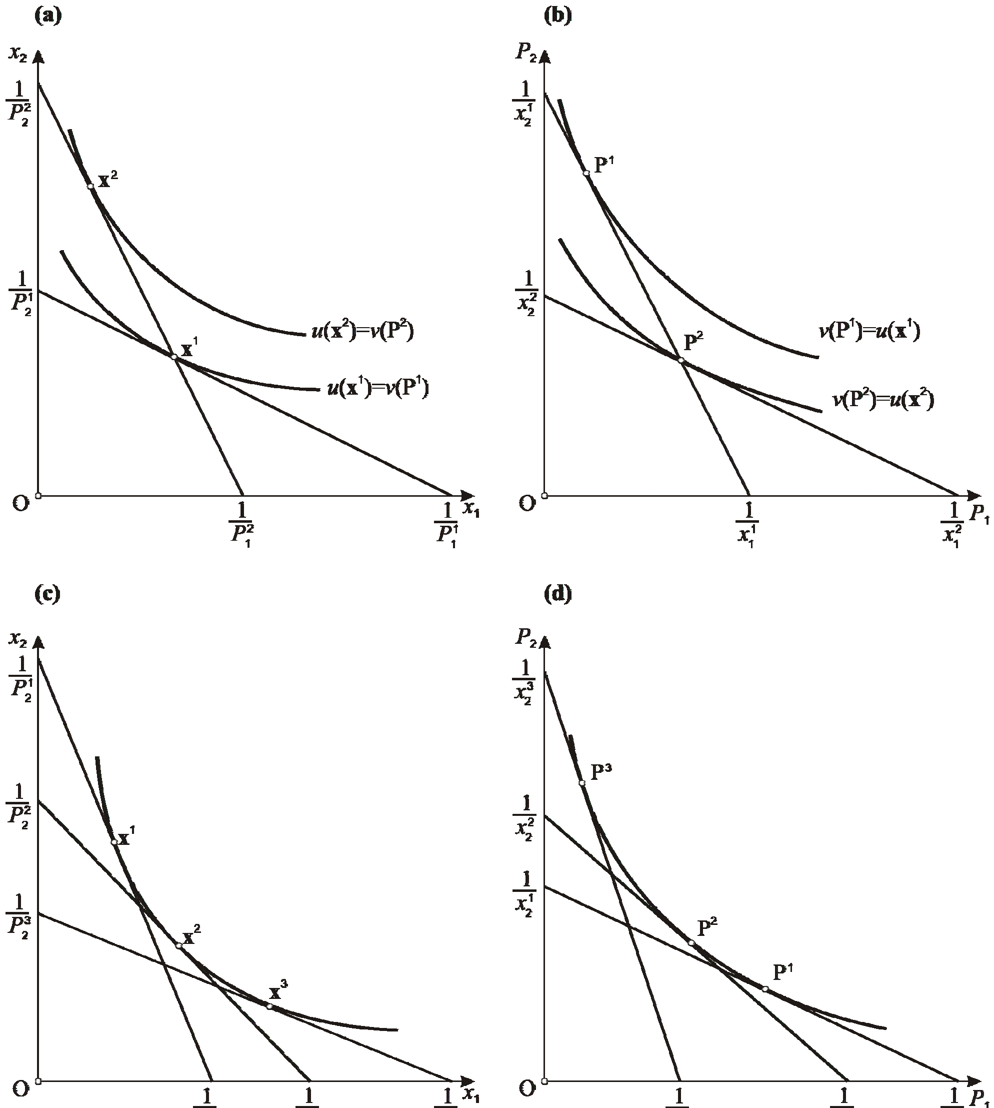
$$\sigma_{12}^{P} = \frac{\frac{dP_1}{P_1} - \frac{dP_2}{P_2}}{\frac{dx_2}{x_2} - \frac{dx_1}{x_1}}\,. \tag{45}$$

Time smo dokazali da je zakrivljenost krivulje indiferencije u prostoru dobara inverzno povezana sa zakrivljenošću krivulje indiferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara. Sada nam je posve jasno zašto je zakrivljenost krivulje indiferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara mala kada je zakrivljenost krivulje indiferencije u prostoru dobara velika i zašto je zakrivljenost krivulje indiferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara velika kada je zakrivljenost krivulje indiferencije u prostoru dobara mala. Kad su dobra komplementi, odnosno kada je krivulja indiferencije u prostoru normaliziranih cijena dobara pravac, elastičnost je supstitucije između cijena dobara beskonačno velika, a kad su dobra savršeni supstituti, odnosno kada krivulja indiferencije u prostoru normaliziranih cijena ima pravokutni oblik, elastičnost je supstitucije između cijena dobara jednaka nuli.

3.4 Sveobuhvatni grafički prikaz dualnosti

Sveobuhvatni grafički prikaz dualnosti između direktne i indirektne funkcije korisnosti rezultat je podrobnije analize svih njezinih aspekata koju smo do sada izveli, stoga držimo kako je sadržaj teksta ispod iduće slike koji opisuje crteže na slici dostatan da čitatelje podsjeti na ključne elemente dualnosti između dva modela ograničene optimizacije.

Slika 6. Putovanje od direktne do indirektne krivulje indiferencije i natrag



Crtež (a) jasno ilustrira da košara dobara x^1 potrošaču minimizira maksimalnu razinu korisnosti kada se on suoči s normaliziranim cijenama P_1^1 i P_2^1 zbog toga što između svih budžetskih crta kojima pripada košara dobara x^1 jedino budžetska crta koju formiraju normalizirane cijene P_1^1 i P_2^1 dodiruje krivulju indiferencije u točki x^1.

Crtež (b) predočuje preslike krivulja indiferencije iz prostora dobara u prostor normaliziranih cijena dobara i preslike budžetskih crta iz prostora dobara u prostor normaliziranih cijena dobara. Odsječci su indirektnih budžetskih crta na osima normaliziranih cijena recipročne vrijednosti odsječaka odgovarajućih budžetskih crta na osima količina u prostoru dobara. Zbog recipročnosti, većim odsječcima u prostoru dobara odgovaraju manji odsječci u prostoru normaliziranih cijena. Preslika je krivulje indiferencije koja je udaljenija od koordinatnog početka u prostoru dobara bliže koordinatnom početku u prostoru normaliziranih cijena jer su recipročne vrijednosti količina u košari dobara koja pripada bilo kojoj zraci iz ishodišta i od koordinatnog početka udaljenijoj krivulji indiferencije u prostoru dobara manje od recipročnih vrijednosti količina u košari dobara koja pripada bilo kojoj zraci iz ishodišta i od koordinatnog početka udaljenijoj krivulji indiferencije u prostoru dobara manje od recipročnih vrijednosti količina u košari dobara koja pripada istoj zraci iz ishodišta i krivulji indiferencije koja je bliže koordinatnom početku. Zbog recipročnosti vrijedi i obrnuto, preslika indirektne krivulje indiferencije koja je u prostoru normaliziranih cijena udaljenija od koordinatnog početka u prostoru je dobara bliže koordinatnom početku. Konačno, zbog recipročnosti, zakrivljenijim krivuljama indiferencije u prostoru dobara odgovaraju manje zakrivljene krivulje indiferencije u prostoru normaliziranih cijena. Vrijedi i obrnuto.

Na crtežu (c) krivulja indiferencije u prostoru dobara predočuje maksimalnu razinu korisnosti koju potrošač ostvaruje pri kombinaciji normaliziranih cijena P^1, P^2 i P^3, i koju daju košare dobara x^1, x^2 i x^3. Indirektna je krivulja indiferencije njezina preslika na crtežu (d). Putovanje iz jednog u drugi prostor i zakrivljenost krivulja u jednom i drugom prostoru temelje se na načelu recipročnosti.

3.5. Teorem o dualnosti direktne i indirektne funkcije korisnosti

Napokon je kucnuo i prikladan čas da očevidnu geometriju prevedemo na jednako bjelodanu algebru, da izreknemo i dokažemo teorem o dualnosti direktne i indirektne funkcije korisnosti. Taj teorem tvrdi da neprekidna, diferencijabilno strogo rastuća i kvazikonkavna funkcija korisnosti implicira egzistenciju neprekidne, diferencijabilno strogo opadajuće i kvazikonveksne indirektne funkcije korisnosti i obrnuto, da indirektna funkcija korisnosti s navedenim svojstvima implicira direktnu funkciju korisnosti s navednim svojstvima.

TEOREM 1. Teorem o dualnosti direktne i indirektne funkcije korisnosti

Ako je direktna funkcija korisnosti $u(\mathrm{x})$ kvazikonkavna i diferencijabilno strogo rastuća na R_{++}^n, onda je, za P»0, indirektna funkcija korisnosti koju ona implicira

$$v(\mathrm{P}) = \underset{\mathrm{x}}{maks}\ u(\mathrm{x}) \qquad uz\ uvjet\ \mathrm{Px} = 1 \tag{P.1}$$

i, za x»0, direktna funkcija korisnosti koju tako dobivena indirektna funkcija korisnosti implicira

$$u(\mathrm{x}) = \min_{\mathrm{P}} \ v(\mathrm{P}) \qquad \textit{uz uvjet } \mathrm{Px}=1. \tag{P.2}$$

Dokaz: Budući da se indirektna funkcija korisnosti definira kao maksimalna vrijednost direktne funkcije korisnosti uz ograničenje, dolazak od direktne do indirektne funkcije korisnosti nije potrebno dokazivati. Preostaje nam dokazati kako se iz indirektne funkcije korisnosti izvodi direktna funkcija korisnosti, odnosno dokazati da je

$$u(\mathrm{x}) = \min_{\mathrm{P}} \ v(\mathrm{P}) \qquad \textit{uz uvjet } \mathrm{Px}=1. \tag{P.3}$$

Pođimo od pretpostavke da košara dobara x^1 potrošaču maksimizira korisnosti kada se on suoči s normaliziranim cijenama dobara P^1. U tom je slučaju vrijednost indirektne funkcije korisnosti

$$v(\mathrm{P}^1) = u(\mathrm{x}^1). \tag{P.4}$$

Pretpostavimo sada da je potrošač suočen s nekom drugom kombinacijom normaliziranih cijena dobara pri kojima može pribaviti točno košaru dobara x^1, takvim da on zadovoljava jednakost

$$\mathrm{P}^1\mathrm{x}^1 = \mathrm{P}^2\mathrm{x}^1 = 1. \tag{P.5}$$

Potonja jednakost pokazuje da košara dobara x^1 zadovoljava budžetsko ograničenje i pri normaliziranim cijenama P^2. Na temelju toga možemo zaključiti da je razina korisnosti pri normaliziranim cijenama P^2 barem toliko velika koliko i maksimalna razina korisnosti pri normaliziranim cijenama P^1, ili simbolički da vrijedi nejednakost

$$v(\mathrm{P}^2) \geq u(\mathrm{x}^1) = v(\mathrm{P}^1). \tag{P.6}$$

Budući da je između svih vektora cijena koji zadovoljavaju navedenu jednakost vektor cijena P^2 proizvoljno izabran, nejednakost

$$v(\mathrm{P}^2) \geq v(\mathrm{P}^1) \tag{P.7}$$

vrijedi za svaki vektor cijena P^2 koji zadovoljava ograničenje

$$\mathrm{P}^1\mathrm{x}^1 = \mathrm{P}^2\mathrm{x}^1 = 1. \tag{P.8}$$

Time je teorem dokazan.

3.6. Hotelling - Woldov identitet i Royov identitet

Na kraju moramo skrenuti pozornost na još dva neobično važna simetrična rezultata koja proizlaze iz dva modela ograničene optimizacije, na Hotelling – Woldov identitet i na Royov identitet. Hotelling – Woldov identitet generira inverzne Marshallove ili nekompenzirane funkcije potražnje iz nužnih uvjeta prvoga reda u modelu ograničene maksimizacije funkcije korisnosti, dok Royov identitet generira Marshallove ili nekompenzirane funkcije potražnje iz nužnih uvjeta prvoga reda u modelu ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti. Simetrije procesa izvođenja i simetrije rezultata, koje leže u samom žarištu dualnosti, najbolje će se raspoznati ako ih paralelno izvedemo iz oba modela.

Tablica 1. Simetrije procesa izvođenja i rezultata dvaju modela

Model ograničene maksimizacije funkcije korisnosti	Model ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti
Osnovni problem →	→ Dualni problem
Dualni problem ←	← Osnovni problem
Lagrangeova funkcija: $L(\mathrm{x}, \lambda) = u(\mathrm{x}) + \lambda(1\text{-Px})$	Lagrangeova funkcija: $L(\mathrm{P}, \mu) = v(\mathrm{P}) + \mu(1\text{-Px})$
Nužni uvjeti prvoga reda: $\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda)}{\partial x_i} = u_i(\mathrm{x}) - \lambda P_i = 0$ $\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = 1 - \mathrm{Px} = 0.$	Nužni uvjeti prvoga reda: $\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda)}{\partial P_i} = v_i(\mathrm{P}) - \mu x_i = 0$ $\frac{\partial L(\mathrm{P}, \mu)}{\partial \mu} = 1 - \mathrm{Px} = 0.$
Eliminirajući multiplikator λ, prvih *n* uvjeta možemo izraziti zapisom $\frac{P_j}{P_i} = \frac{u_j(\mathrm{x})}{u_i(\mathrm{x})}$, odnosno zapisom $P_j = \frac{u_j(\mathrm{x})}{u_i(\mathrm{x})} P_i.$	Eliminirajući multiplikator μ, prvih *n* uvjeta možemo izraziti zapisom $\frac{x_j}{x_i} = \frac{v_j(\mathrm{P})}{v_i(\mathrm{P})}$, odnosno zapisom $x_j = \frac{v_j(\mathrm{P})}{v_i(\mathrm{P})} x_i.$
Kada potonji rezultat uvrstimo u budžetsko ograničenje dobivamo $\frac{u_1}{u_i} P_i x_1 + \frac{u_2}{u_i} P_i x_2 + \ldots + P_i x_i + \ldots + \frac{u_n}{u_i} P_i x_n = 1,$	Kada potonji rezultat uvrstimo u budžetsko ograničenje dobivamo $\frac{v_1}{v_i} x_i P_1 + \frac{v_2}{v_i} x_i P_2 + \ldots + P_i x_i + \ldots + \frac{v_n}{v_i} x_i P_n = 1,$
odakle proizlazi da je Hotelling-Woldov identitet $P_i = u_i / \sum_{j=1}^{n} u_j x_j,$ odnosno $P_i = p_i(\mathrm{x}).$	odakle proizlazi da je Royov identitet $x_i = v_i / \sum_{j=1}^{n} v_j P_j,$ odnosno $x_i = x_i^M(\mathrm{P}).$
Hotelling – Woldov identitet generira inverzne Marshallove ili nekompenzirane funkcije potražnje. Rješenja su sustava jednadžbi koje tvore nužne uvjete prvoga reda Marshallove ili nekompenzirane funkcije potražnje $x_i = x_i^M(\mathrm{P}).$	Royov identitet generira Marshallove ili nekompenzirane funkcije potražnje. Rješenja su sustava jednadžbi koje tvore nužne uvjete prvoga reda inverzne Marshallove ili nekompenzirane funkcije potražnje $P_i = p_i(\mathrm{x}).$
Kada funkcije potražnje uvrstimo u funkciju korisnosti, dobivamo indirektnu funkciju korisnosti $v(\mathrm{P}) = u(x_1(\mathrm{P}), x_2(\mathrm{P}), \ldots, x_n(\mathrm{P})).$	Kada inverzne funkcije potražnje uvrstimo u indirektnu funkciju korisnosti, dobivamo funkciju korisnosti $u(\mathrm{x}) = v(P_1(\mathrm{x}), P_2(\mathrm{x}), \ldots, P_n(\mathrm{x})).$

Nadamo se da i letimičan pogled čitatelju daje do znanja da se u procesu ograničene maksimizacije funkcije korisnosti do Hotelling – Woldova identiteta, do inverznih Marshallovih ili nekompenziranih funkcija potražnje, uzgredno dolazi na vrlo jednostavan način, na način koji je znatno lakši od onog kojim se iste funkcije izvode kao rješenja modela ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti. Jednako se tako u procesu ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti na vrlo jednostavan način dolazi do Royovog identiteta, do Marshallovih ili nekompenziranih funkcija potražnje. Taj je način dolaska znatno jednostavniji od onoga kojim se do istih funkcija dolazi rješavanjem problema ograničene maksimizacije funkcije korisnosti. Jednaku ulogu, kakvu Hotelling – Woldov identitet igra u modelu ograničene maksimizacije funkcije korisnosti u izvođenju inverznih Marshallovih ili nekompenziranih funkcija potražnje, igra Royov identitet u modelu ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti u izvođenju Marshallovih ili nekompenziranih funkcija potražnje. U oba se slučaja deriviranjem Lagrangeove funkcije prvo izvode nužni uvjeti prvoga reda. Potom se iz n prvih uvjeta eliminiraju Lagrangeovi multiplikatori. U modelu se ograničene maksimizacije funkcije korisnosti u trećem koraku normalizirane cijene uvrštavaju u budžetsko ograničenje i nakon toga se jednostavnim algebarskim manipulacijama dobivaju Hotelling – Woldovi identiteti, dok se u modelu ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti u trećem koraku u budžetsko ograničenje uvrštavaju fiksne količine dobara da bi se nakon toga jednostavnim algebarskim manipulacijama izveli Royovi identiteti. Svaki od dva procesa rješavanja u sebi uzgredno utjelovljuje znatno lakši način dobivanja rješenja dualnog problema od načina na koji se ta rješenja dobivaju rješavajući dualni problem.

Royov identitet u tablici 1 ima oblik

$$x_i(\mathrm{P}) = v_i(\mathrm{P}) / \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} P_j v_j(\mathrm{P}) \,, \tag{46}$$

oblik u kojem se on obično ne zapisuje, stoga ćemo još pokazati kako se on iz ovdje zapisanog oblika prevodi u oblik u kojem se obično zapisuje. Pritom polazimo od toga da indirektna funkcija korisnosti $v(\mathrm{P})$ u cijenama i dohotku ima stupanj homogenosti jednak nuli, jer množenje brojnika i nazivnika normaliziranih cijena jednakim brojem ne mijenja normalizirane cijene. Prethodni zapis u originalnim varijablama poprima oblik

$$x_i(\mathrm{p},M) = v_i(\mathrm{p},M) / \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \frac{p_j}{M} v_j(\mathrm{p},M) \,. \tag{47}$$

Znajući da $v(\mathrm{p},M)$ u cijenama i dohotku ima stupanj homogenosti jednak nuli i koristeći Eulerov teorem, dobivamo

$$p_j v_j(\mathrm{p},M) + M v_M(\mathrm{p},M) = 0, \text{ odnosno} \tag{48}$$

$$p_j v_j(\mathrm{p},M) = -M v_M(\mathrm{p},M) \,. \tag{49}$$

Nakon uvrštavanja dobivenog rezultata u prethodni oblik Royovog identiteta, dobivamo oblik Royovog identiteta u kojem se on obično zapisuje, oblik

$$x_i(\mathrm{p},M) = -\frac{v_i(\mathrm{p},M)}{v_M(\mathrm{p},M)} \,. \tag{50}$$

4. ZAKLJUČAK

U ovom smo članku svestrano rasvijetlili dualnost između direktne i indirektne funkcije korisnosti. Novine u članku očituje grafički dokaz kvazikonveksnosti indirektne funkcije korisnosti i grafički prikaz dualnosti između direktne i indirektne funkcije korisnosti. Predmet su naše analize bila dva modela ograničene optimizacije, model ograničene maksimizacije funkcije korisnosti i model ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti. U članku smo pokazali da su dva modela ograničene optimizacije duali jedan drugome i da oba modela u različitim oblicima generiraju jednaki sustav Marshallovih ili nekompenziranih funkcija potražnje. Kada se sustav jednadžbi koji je rješenje jednog problema invertira, dobije se dualni sustav jednadžbi koji je rješenje drugog problema. Dokazali smo i teorem koji kaže da su funkcije cilja u dva modela ograničene optimizacije, funkcija korisnosti u modelu ograničene maksimizacije funkcije korisnosti i indirektna funkcija korisnosti u modelu ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti, duali jedna drugoj. Maksimum je dual minimumu, indirektne su krivulje indiferencije duali direktnim krivuljama indiferencije i cijene su duali količinama. Kada varijable iz jednog modela preuzmu ulogu parametara u drugom modelu i parametri ulogu varijabli u drugom modelu i kada se proces maksimizacije zamijeni procesom minimizacije i obrnuto, model se ograničene maksimizacije preobražava u model ograničene minimizacije i obrnuto.

Pokazali smo kako se u procesu ograničene maksimizacije funkcije korisnosti uzgredno izvodi Hotelling – Woldov identitet koji na znatno jednostavniji način generira inverzne Marshallove funkcije potražnje od procesa ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti i kako se u procesu ograničene minimizacije indirektne funkcije korisnosti izvodi Royov identitet koji na znatno jednostavniji način generira Marshallove funkcije potražnje od procesa ograničene maksimizacije funkcije korisnosti. Hotelling – Woldov identitet je dual Royovog identiteta. Proces ograničene maksimizacije uzgredno generira inverzne Marshallove funkcije potražnje i rješenje mu je sustav Marshallovih funkcija potražnje. Proces ograničene minimizacije uzgredno generira Marshallove funkcije potražnje i rješenje mu je sustav inverznih Marshallovih funkcija potražnje. Oba procesa obrnutim redom daju jednake rezultate. Ovi su rezultati doveli do velikog napretka na području empirijskih istraživanja.

LITERATURA

1. Barten A., i V. Böhn (1982.), "Consumer Theory", u K. Arrow i M. Intriligator (eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, Amsterdam: North Holland.
2. Blackorby, C., Primont, i R. R. Russell (1978.). *Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications*, New York: American Elsévier.
3. Blundell, R. (1988.)., Consumer behavior: theory and empirical evidence- a survay", *Economic Journal*, 98: 16-65.
4. Carter, M. (2001.). *Fundations of Mathematical Economics*, Cambridge, MA: The MIT press.
5. Chambers, R. G. (1988.). *Applied production analiysis*: *A Dual Approach*, Cambridge: Cambridge University Press.

6. Cornes, R. C. (1992.). *Duality and Modern Economics*, Cambridge: Cambridge University Press.
7. Darrough, M. N., i Southey, C. (1977.). "Duality in Consumer Theory Made Simple: The Revealing of Roy's Identity", *Canadian Journal of Economics*, 10: 307-14.
8. Deaton, A. i J. Muelbauer (1980.). *Economics and Consumer Behavior*, Cambridge: Cambridge University Press.
9. Diewert, W. E. (1974.). "Applications of Duality Theory", u M. D. Intriligator i D. A. Kendrick (eds.), *Frontiers of Quantitative Economics*, Amsterdam: North Holland, pp. 2: 106-199.
10. Geoffrey A. Jehle i Philip J. Reny (2001.). *Advanced Microeconomic Theory*, Second Edition, Addison Wesley Longman.
11. Hotelling, H. (1932.). "Edgeworth' s Taxation Paradox and the Nature of Supply and Demand Functions", *Journal of Political Economy*, 40: 557-616.
12. Luenberger, D. G. (1995.). *Microecomic Theory*, New York: Mc Graw-Hill, Inc.
13. Mas – Colell, a., M. D. Whinston, i J. Green. (1995.), *Microeconomic Theory*, New York: Oxford University Press.
14. Shepard, R. W. (1970.). *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton: Princeton University Press.
15. Weymark, J. A. (1980.). "Duality Results in Demand Theory", *European Economic Review*, 14: 377-395.