IZVORNI ZNANSTVENI RAD
UDK 517,1

Prof. dr. sc. Hugo Birolla

PRILOG O SPECIJALNIM MULTINOMNIM KOEFICIJENTIMA

AN ARTICLE ON THE SPECIAL MULTINOMIAL COEFFICIENTS

SAŽETAK: U članku 'Prilog o specijalnim multinomnim koeficijentima' obrađeno je jedno od mogućih proširenja Pascalovog trokuta, odnosno prikazane su tablice koeficijenata koji se javljaju pri potenciranju polinoma oblika $1 + x + x^2 + \ldots + x^m$.

Pri tom je dana i formula za izračunavanje trinomnih koeficijenata kao i neke zanimljive relacije između koeficijenata.

KLJUČNE RIJEČI: Binomni koeficijenti, trinomni koeficijenti, multinomni koeficijenti, Pascalov trokut.

ABSTRACT: In the Article on the Special Multinomial Coefficients we have dealt with one of the possible extensions of Pascal's triangle, that is, we have shown coefficient tables of those coefficients which occur when raising to a power the polynomials of the following form: $1 + x + x^2 + \ldots + x^m$.

The formula for calculating the trinomial coefficients has also been provided as well as some interesting relations between the coefficients.

KEY WORDS: Binomial coefficients, trinomial coefficients, multinomial coefficients, Pascal's triangle.

1. UVOD

Pri potenciranju binoma **(*a*+*b*)*ⁿ*** služimo se binomnim koeficijentima. Općenito:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n \tag{1}$$

Oni se mogu izračunati prema definiciji, a mogu se generirati s pomoću tablice koeficijenata, tzv. Pascalovog trokuta. Shemu toga trokuta možemo prikazati ovako:

Tablica 1. Binomni koeficijenti

n=	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**
r=0	1	1	1	1	1	1	1	…
r=1		1	2	3	4	5	6	…
r=2			1	3	+**6**	10	15	…
r=3				1	+**4**	Σ=**10**	20	…
r=4					1	5	15	…
r=5						1	6	…
r=6							1	…
…								

Očito je da je broj koeficijenata u pojedinom stupcu jednak ***n*+1**, da je zbroj koeficijenata u pojedinim stupcu potencija broja **2** (**= 2*ⁿ***), kao i to da se binom **(*a*+*b*)** može pisati kao ***a*(1+*x*)**, što daje ideju za proširenje na višečlani izraz.

2. PROŠIRENJE

Izraz **1+*x*** možemo proširiti na više načina, a ovdje će to biti učinjeno članovima koji čine geometrijski red, tj. kao

$$\mathbf{1 + x + x^2 + \ldots + x^m}.$$

Pri potenciranju takvoga specijalnog polinoma (multinoma s **p=m+1** članova)

$$(1+x+\cdots+x^m)^n = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_p \cdot x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_p \cdot x^2 + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ mn \end{bmatrix}_p \cdot x^{mn} \tag{2}$$

mogu se (analogno kao i pri potenciranju binoma) koristiti tablice specijalnih multinomnih koeficijenata, a može se koristiti i definicijska formula. Ti koeficijenti će u okviru ovoga rada biti napisani (za razliku od binomnih koeficijenata) u uglatoj zagradi uz indeks koji označuje broj članova u geometrijskom redu. Binarni koeficijenti tako imaju dvojaku oznaku:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_2 \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}.$$

Tablice ovih koeficijenata za pojedine vrijednosti veličine ***p*** mogu se pisati na odgovarajući način kao i kod binomnih koeficijenata. Pojedini se koeficijenti u ***r***-tom retku dobivaju kao zbroj od ***p*** koeficijenata iz prethodnog stupca tablice - u redcima s oznakom ***r-m***, **r-*m*+1**, …, ***r***. Naravno, broj koeficijenata u takvom zbroju je u prvih ***m*-1** redaka manji, jer ne postoji prethodnih **m** redaka!

Broj koeficijenata (**≠0**) je u svakom stupcu jednak ***mn*+1**, a zbroj ***n***-tog stupca je $\mathbf{p^n=(m+1)^n}$. U binomnom koeficijentu, s oznakama **n** i **r**, **r** može poprimiti vrijednosti od **0** do ***n***, tj. ***n*+1** vrijednost (***n,r*** ∈ □). U odgovarajućem multinomnom koeficijentu ***r*** može poprimiti vrijednosti od **0** do ***mn***, dakle ***mn*+1** vrijednost (***n,r*** ∈ □).

Također je:

$$\sum_{r=0}^{m\times n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p = p^n \tag{3}$$

Dva primjera tablica multinomnih koeficijenata navedena su u točkama **3** i **4**.

Svakako da je izazov pronaći jednostavne izraze koji bi vrijedili za koeficijente oblika

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_3, \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_4, \ldots$$

Isto tako traži se i koeficijent koji bi obuhvatio sve te koeficijente, tj. za bilo koje vrijednosti za $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{r}$ – uključivo onu kad $\boldsymbol{p} \to \infty$. Dakle za:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_\infty$$

Izraz za prvi od ova četiriju koeficijenata se nalazi u sljedećoj točki (o trinomnim koeficijentima) kao formula (5), a posljednji je naveden u dodatku kao formula (6).

3. TRINOMNI KOEFICIJENTI

Za **trinom** $$(1+x+x^2)^n = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_3 + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_3 \cdot x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_3 \cdot x^2 + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ 2n \end{bmatrix}_3 \cdot x^{2n} \qquad (4)$$

odgovarajući "trokut" trinomnih koeficijenata izgleda ovako:

Tablica 2. Trinomni koeficijenti

$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_3 =$

n=	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
r=0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
r=1		1	2	3	4	5	6	7	8 →	9
r=2		1	3	6	10	15	21	28	36	45
r=3			2	7	16	30	50	77	112	…
r=4			1 →	6	19	45	90	161	…	
r=5				3	16	51 →	126	…		
r=6				1	10	45	141	…		
					…	…	…			

Prva su dva retka tablice identična redcima u tablici binomnih koeficijenata, a pojedini koeficijent u $\boldsymbol{r}$-tom retku jednak je sumi triju koeficijenata iz prethodnoga stupca u redcima $\boldsymbol{r}$**-2**, $\boldsymbol{r}$**-1** i $\boldsymbol{r}$.

Koeficijenti potrebni pri potenciranju trinoma $\mathbf{(1 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2)^{\boldsymbol{n}}}$, njih $\mathbf{2\boldsymbol{n}+1}$, nalaze se u odgovarajućem $\boldsymbol{n}$-tom stupcu tablice. Zbrojevi pojedinih stupaca su nužno potencije broja **3** (= $\mathbf{3^{\boldsymbol{n}}}$), $\boldsymbol{m}$=2, a $\boldsymbol{p}$=3.

Svaki takav koeficijent može se izračunati i iz sljedeće relacije kao zbroj produkata u njoj navedenih binomnih koeficijenata. Donja granica cjelobrojnih vrijednosti za $\boldsymbol{t}$ je nula, a gornja $\boldsymbol{r}$**/2** odnosno **INT(**$\boldsymbol{r}$**/2)**.

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_3 = \sum_{t=0}^{\mathrm{INT}(r/2)} \binom{\mathrm{r - t}}{\mathrm{t}} \binom{\mathrm{n}}{r-t} \qquad (5)$$

4. KOEFICIJENTI ZA P = 4, 5, …

Za **četveročlani** izraz $\mathbf{(1+x+x^2+x^3)^n}$ odgovarajući 'trokut' specijalnih multinomnih koeficijenata izgleda ovako:

Tablica 3. Koeficijenti za *p*= 4

	n= 0	1	2	3	4	5	6 …
r=0	1	1	1	1	1	1	1 …
r=1	0	1	+**2**	3	4	5	6 …
r=2	0	1	+**3**	6	10	+**15**	21 …
r=3	0	1	+**4**	10	20	+**35**	56 …
r=4	0	0	+**3**	Σ= **12**	31	+**65**	120 …
r=5	0	0	2	12	40	+**101**	Σ=**216** …
r=6	0	0	1	10	44	135	336 …
r=7	0	0	0	6	40	155	456 …
r=8	0	0	0	3	31	155	546 …

Ovdje je pojedini koeficijent u **r**-tom retku jednak zbroju četiriju koeficijenata iz prethodnog stupca u redcima ***r*-3**, ***r*-2**, ***r*-1** i ***r***. Broj koeficijenata različitih od nule u pojedinom stupcu je **3*n*+1**, a zbrojevi pojedinih stupaca iznose $\mathbf{4^n}$.

U ostalim trokutima polinomnih koeficijenata (za ***p*** = 5, 6, 7, …) izračunali bi se koeficijenti na analogan način, a isto tako i za multinom u kojem $\boldsymbol{p} \to \infty$. Ova posljednja tablica koeficijenata imala bi svoje značenje u potenciranju beskonačnih konvergentnih redova.

5. DODATAK

Istražujući zakonitosti dolazi se do mnogih zanimljivih relacija, stoga se neke od njih navode ovdje.

Za koeficijente iz prvih dvaju redaka svih tablica (***r*=0** i ***r*=1**) očito je

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_p = 1 \qquad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_p = n$$

Za treći redak u svima tablicama (***r*=2**) u kojima je ***p*>2** vrijedi:

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_{p>2} = \binom{n+1}{2}$$

Za četvrti redak u svima tablicama u kojima je ***p*>3** vrijedi:

$$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_{p>3} = \binom{n+2}{3}$$

Općenito za r-ti redak u tablicama uz uvjet da je ***p*>*r***

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p>r} = \binom{n+r-1}{r}$$

Ove se formule mogu primijeniti za izračunavanje prvih ***r*+1** koeficijenata. Ako je ***p*** vrlo velik (***p*→∞**), tada prethodna formula vrijedi u svakom slučaju (za svaki ***r***).

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p\to\infty} = \binom{n+r-1}{r} \qquad (6)$$

Zanimljive su i relacije:

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_2 = \binom{n}{2}$$
$$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_3 = \binom{n+1}{3} + \binom{n}{2}$$
$$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}_4 = \binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{3} + \binom{n}{2}$$

koje se mogu prikazati i u obliku kao i mnoge druge, no to može biti predmetom daljnjeg istraživanja.

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_2 = \binom{n}{2}$$
$$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_3 = \binom{n+1}{3} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_2$$
$$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}_4 = \binom{n+2}{4} + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_3$$

6. ZAKLJUČAK

Ovaj rad pokazuje da su i na jednostavnim i dosta prorađenim područjima moguća daljnja istraživanja i zanimljivi rezultati kao što su to tablice 1 i 2, te formule (5) i (6). Autor je do ovih tablica multinomnih koeficijenata došao kao student u šk. g. 1957./58. na poticaj prof. dr. Vladimira Vranića (tada profesora Tehničkog i Prirodoslovno-matematičkog fakulteta), ali je pričekao mirovinu da ih dopuni ponekom formulom za izračunavanje i da ih objavi u času kad mu publiciranje članka ne čini obvezu već zadovoljstvo.