IZVORNI ZNANSTVENI RAD
519.86(049.2)

Prof. dr. sc. Ante Puljić
Mr. sc. Ilko Vrankić

RASPRAVA S NEPOZNATIM RECENZENTOM "NA PUTU OD TOTALNOG DIFERENCIJALA DO MAKSIMALNOG EKONOMSKOG PROFITA"[1]

EXCHANGE OF OPINIONS ON "FROM TOTAL DIFFERENTIAL TO MAXIMUM ECONOMIC PROFIT"

SAŽETAK: Objavljivanju članka "Od totalnog diferencijala do maksimalnog ekonomskog profita" prethodila je zanimljiva rasprava s nepoznatim recenzentom. Iako smo smatrali da su njegove primjedbe vidljive iz dvaju komentara recenzenta koje prilažemo, bilo matematičke, ekonomske ili jezične naravi, u suštini neopravdane, gotovo smo svugdje gdje se s primjedbama i nismo slagali, nastojali poboljšati formu našega članka polazeći od jednostavnog stajališta da bi se tamo gdje se slabo razumijemo s recenzentom još slabije razumjeli s prosječnim čitateljem. Osobito je važno da smo na primjedbe recenzenta dali sustavan i poučan podulji odgovor koji u cijelosti objavljujemo u obliku članka. Uvjereni smo da će čitatelji zamijetiti oštroumna i spasonosna razmatranja o nekim osnovnim matematičkim i ekonomskim pojmovima koji ih često muče upravo kao i našeg recenzenta. Također se nadamo da će ih poučiti i zabaviti i dio rasprave o jezičnim pitanjima koja se neizostavno isprepliću s matematičkim i ekonomskim problemima.

Bez obzira na podrobnost našega odgovora recenzent je izravno ili neizravno ustrajao na svojim ranijim primjedbama pa je o objavljivanju našeg članka odlučio drugi nepoznati recenzent čiji je komentar vezan za rad potpuno oprečan komentaru recenzenta s kojim polemiziramo. Čvrsto vjerujemo da ćete nakon pomnog čitanja našeg odgovora na primjedbe recenzenta shvatiti kako put do izlaska nekog članka može biti vrlo tegoban, ali i da na dug i samoprijegoran rad neopravdano može samo privremeno pasti prokletstvo zastoja.

KLJUČNE RIJEČI: časomična stopa promjene, rast i pad funkcije u točki i u okolini točke, konkavne i konveksne funkcije, Hesseova matrica i vodeći glavni minori, ekonomski profit.

ABSTRACT: An interesting exchange of opinions with an anonymous reviewer took place before our paper "From Total Differential to Maximum Economic Profit" was published. We found his/her objections (two reviewing comments are attached to this paper) - be they of mathematical, economic or linguistic nature - basically unsubstantiated.

---

[1] Puljić, A., Vrankić, I. (2005.). "Od totalnog diferencijala do maksimalnog ekonomskog profita", *Ekonomski pregled*, (56), 1-2: 3-38.

Still, even where we didn't agree, we did our best to improve our formal argument. We believe that if our argument is misunderstood by our reviewer, it will be even more so in case of an "average reader". It is particularly important that we produced a systematic and instructive longer reply to the reviewer's objections in the form of a journal paper. We believe that our readers will surely notice how wise and helpful our considerations of some basic mathematical and economic notions are, particularly if they have similar difficulties as our reviewer. We also hope that they will find our discussion of linguistic issues, which cannot be separated from the mathematical and economic ones, both instructive and entertaining.

In spite of our very detailed reply, our reviewer has directly and indirectly persisted on his/her previous objections. For that reason the article was published in accordance with another anonymous review, with arguments directly opposed to those of the original reviewer. We strongly believe that our readers, after they read our reply to the original reviewer carefully, will realize how troublesome a process of publishing a journal article may be. The "curse of standstill" can only temporarily procrastinate the long and diligent labor of the authors.

KEY WORDS: instantaneous rate of change, increasing and decreasing functions at the point and around the point, concave and convex functions, Hessian matrix and leading principal minors, economic profit.

1. PRVI KOMENTAR RECENZENTA VEZAN ZA RAD

Optimizacija realne funkcije bez ograničenja od izuzetnog je značenja i u ekonomskoj teoriji, ali i u praksi, pa postoji opsežna literatura u kojoj se ovaj problem pokušao manje ili više uspješno riješiti (ovisno o klasi kojoj rješavani problem pripada).

Jedan od najznačajnijih problema s kojim se ekonomisti i studenti ekonomije susreću pri učenju matematike i njezinoj primjeni u ekonomiji jest upravo (kao što i autor navodi) "stroga matematička formalizacija". Zbog toga se i preporučuje da ekonomisti prvenstveno koriste teorijske spoznaje matematičara, vodeći pri tome računa o pretpostavkama na kojima se temelje te teorije, a samo u izuzetnim okolnostima daju i svoj teorijski doprinos (u primjenama matematike u ekonomiji). U 2. i 3. točki rada autor je nastojao ostvariti u uvodu deklarirani cilj: "uspostaviti jednostavan i prirodan odnos između stroge matematičke formalizacije i uobičajenog načina opisivanja ekonomskih pojava". Nastojeći izbjeći strogu matematičku formalizaciju, koristio se izrazima koji nisu jednoznačno definirani (na primjer, vrlo mala okolina točke, neposredna blizina), ali uz standardnu upotrebu tih topoloških termina mogao je izbjeći tu nedefiniranost.

Za oznaku točke ravnine, koriste se male (okrugle) zagrade. Primjerice, (a, b) je točka ravnine, a [a, b] zatvoreni interval (segment). Autor svakako u radu mora precizno razdvojiti pojam funkcije od pojma grafa (te) funkcije.

Jedna od najznačajnijih zamjerki odnosi se na olaku generalizaciju rezultata iz skupa R na analogne (ali ne i identične) pojmove u R^n – pogledati primjedbe na str. 4, 6, 7.

Svakako umjesto derivacije drugog reda (kada je riječ o funkcijama više varijabli), treba pisati o parcijalnim derivacijama drugog reda.

Tek pošto autor uskladi rad s navedenim primjedbama (uvažavajući i napomene dane na samom rukopisu), napisat ću recenziju poštujući formu koju njeguje Ekonomski pregled.

2. PRVO PISMO AUTORA UREDNIŠTVU *EKONOMSKOG PREGLEDA*

Poštovana Gospodo,

radosni smo što je napokon kucnuo čas da uredništvu časopisa možemo podastrijeti naš odgovor na vrlo korisne i poticajne primjedbe nepoznatog recenzenta na naš članak "Od totalnog diferencijala do maksimalnog ekonomskog profita" koji ste nam ljubazno poslali dvadeset i prvoga dana mjeseca rujna godine 2004. Dobivši naputke što nam je činiti, ni časak ne gubeći, svim smo svojim snagama, s najiskrenijom radošću i s neskrivenim simpatijama prema, uistinu, revnom recenzentu, prionuli na posao. Imajući stalno na umu da su nakane recenzenta plemenite i usmjerene na poboljšanje našeg članka, svestrano smo razmotrili svaku njegovu primjedbu i gotovo svugdje, gdje se s primjedbom i nismo slagali promijenili smo tekst našega članka, jer smo pošli od jednostavnog stajališta da bi se tamo gdje se slabo razumijemo s recenzentom još slabije razumjeli s prosječnim čitateljem. Uz novi tekst šaljemo Vam i naše podulje odgovore na primjedbe recenzenta s jedinom nakanom da naš profesionalni jezik sporazumijevanja u budućnosti bude još bolji.

U ovom času nemamo što više reći. Srdačno Vas pozdravljamo s nadom da ćete naš članak, u koji smo uložili mnogo truda, bezodložno objaviti.

3. ODGOVOR NA PRIMJEDBE RECENZENTA

3.1. Standardni način definiranja rasta i pada funkcije

Neka je f definirana na nekom intervalu i neka su x_1 i x_2 brojevi iz tog intervala. Da bismo utvrdili jasnu terminologiju o rastu i padu funkcije, navodimo sljedeće dobro poznate definicije:

Ako je $f(x_1) \leq f(x_2)$ kad god je $x_1 < x_2$, tada f raste.

Ako je $f(x_1) < f(x_2)$ kad god je $x_1 < x_2$, tada f striktno raste.

Ako je $f(x_1) \geq f(x_2)$ kad god je $x_1 < x_2$, tada f opada.

Ako je $f(x_1) > f(x_2)$ kad god je $x_1 < x_2$, tada f striktno opada.

Definicije rasta i pada funkcije dopuštaju da graf funkcije ima vodoravne dijelove. To nije u skladu s uobičajenim shvaćanjem. Teško je očekivati da će netko reći da mu plaća raste kada se ne mijenja. Neki autori stoga rezerviraju pojam rastuća za funkciju koja uistinu raste u smislu striktnog rasta, dok za funkciju za koju vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$ kad god je $x_1 < x_2$ kažu da je to neopadajuća funkcija. Slično tome, pojam opadajuća rezerviraju za funkciju koja uistinu opada u smislu striktnog opadanja, dok za funkciju za koju vrijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$ kad god je $x_1 < x_2$ kažu da je to nerastuća funkcija. Većina matematičara ostaje pri definicijama koje smo ovdje naveli. Da bismo pomoću navedenih definicija našli na kojim intervalima funkcija raste ili opada, moramo naći predznak od $f(x_1) - f(x_2)$ kad god je $x_1 < x_2$. Obično je to prilično teško izravno činiti provjeravajući vrijednosti $f(x)$ u različitim točkama, stoga je iznimno pogodno što nam teorem o srednjoj vrijednosti omogućuje da provjerimo da li funkcija striktno raste ili striktno opada. S tim u vezi imamo sljedeći teorem:

Teorem: Neka je f neprekidna funkcija na intervalu I i diferencijabilna u nutrini intervala (to jest u svim točkama, osim u krajnjim točkama).

(a) Ako je $f'(x) > 0$ za svako x unutar I, tada f striktno raste na I.

(b) Ako je $f'(x) < 0$ za svako x unutar I, tada f striktno opada na I.

Dokaz ovog teorema možete vidjeti u Kunt Sydsaeter i Peter J. Hammond (1995), *Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall International, Inc., na stranici 225. Definicije i popratni komentar također su preuzeti iz ovoga djela (str. 224. i 225.).

Implikacije u (a) i (b) daju dovoljne uvjete za rast i pad funkcije. Obrat ne vrijedi. Ako funkcija striktno raste, to ne znači da je tada u svakoj točki intervala $f'(x) > 0$. Slično tome, ako funkcija striktno opada, to ne znači da je u svakoj točki intervala $f'(x) < 0$. Funkcija $f(x) = x^3$ jeste striktno rastuća funkcija. Međutim $f'(0) = 0$.

Iako obrati implikacija (a) i (b) ne vrijede, korisno je znati da za bilo koji interval I vrijede sljedeće logičke ekvivalencije:

$f'(x) \geq 0$ za svako x unutar $I \Leftrightarrow f$ raste na I.

$f'(x) \leq 0$ za svako x unutar $I \Leftrightarrow f$ opada na I.

3.2. O rastu i padu funkcije u točki i o okolini točke

a) Radi nastavka rasprave o rastu i padu diferencijabilne funkcije korisno je podsjetiti da je, kao što sugeriraju Sydsaeter i Hammond (str. 225.), moguće govoriti o diferencijabilnom rastu ili o diferencijabilnom padu funkcije bilo na nekom intervalu iz domene ili na čitavoj domeni. Na primjer, ako je u svakoj točki domene $f'(x) > 0$, tada možemo reći da je to "diferencijabilno rastuća" funkcija. Međutim kada je funkcija diferencijabilna, onda možemo govoriti i o diferencijabilnom rastu ili padu funkcije u točki. To je za nas neobično važno jer nas recenzent već na prvoj stranici našega rada upozorava da "u bilo kojoj točki funkcija niti raste niti pada! Pitanje je što se događa u njezinoj okolini". Čudi ga kad pišemo "da u kritičnoj točki funkcija časomično niti raste niti pada" i zaokružuje riječ časomično kao neku čudnu riječ.

b) Raspravu o rastu i padu funkcije u točki započet ćemo jednim teoremom iz knjige Morrisa Klinea (1998), *Calculus, An Intuitive and Physical Approach*, Dover Publications, Inc. Na stranici 204. nalazimo: "**Teorem 1:** Ako je derivacija y' pozitivna u $x = x_1$, funkcija raste u $x = x_1$. Ako je derivacija y' negativna u $x = x_2$, funkcija opada u $x = x_2$." U nastavku slijedi jednostavan dokaz teorema (str. 204. i 205.), ali ga ovdje nećemo navoditi.

Knjiga R. G. D. Allena (1967), *Mathematical Analysis for Economists*, Macmillan, od njezina prvog izdanja 1938. godine do 1967. godine, pretiskana je 14 puta. Zaustavljamo se na godini 1967. jer imamo pretisak iz te godine. Naravno, nakon toga je pretiskana još mnogo puta. To je svakako najcitiranija knjiga iz matematičke ekonomije. U knjizi na 179. stranici piše: "Prema tome,

(1) $f'(a) > 0$ implicira da $f(x)$ raste kada x raste i da krivulja $y = f(x)$ raste s lijeva na desno u točki $x = a$.

(2) $f'(a) < 0$ implicira da $f(x)$ opada kada x raste i da krivulja $y = f(x)$ opada s lijeva na desno u točki $x = a$.

Brojčana veličina derivacije $f'(a)$ osim toga mjeri koliko brzo funkcija $f(x)$ raste ili opada, i koliko strmo krivulja $y = f(x)$ raste ili opada, u točki $x = a$."

c) Isusovac Edward T. Dowling (1992) u *Introduction to Mathematical Economics*, Second Edition, McGraw-Hill na 65. stranici piše: "Kaže se da funkcija $f(x)$ *raste* (*opada*) u $x = a$ ako u neposrednoj okolini točke $[a, f(a)]$ graf funkcije raste (opada) kada se ide s lijeva na desno. Budući da prva derivacija mjeri stopu promjene i nagib funkcije, pozitivna prva derivacija u $x = a$ pokazuje da funkcija raste u a, a negativna prva derivacija pokazuje da ona opada. Ukratko, kao što se vidi na Sl. 4-1,

$f'(a) > 0$: funkcija raste u $x = a$

$f'(a) < 0$: funkcija opada u $x = a$."

Ovaj citat daje i odgovor na uputu recenzenta da za označavanje točke u ravnini upotrijebimo malu (okruglu) zagradu. Kao što se iz citata vidi, autor za označavanje točke u ravnini upotrebljava uglatu zagradu, što očito pokazuje da se za tu svrhu ne mora isključivo upotrebljavati mala zagrada.

d) U citatu se također upotrebljava pojam neposredne okoline koji Dowling u navedenom dijelu uopće nije definirao. Isto tako, ni u jednom od do sada navedenih djela u našem odgovoru na primjedbe recenzentu nije definirana okolina na način na koji to recenzent preporučuje na petoj stranici. Umjesto toga susrećemo fraze kao što su "in some small region close to the point $[a, f(a)]$", "in the area very close to $[a, f(a)]$", "in the immediate neighborhood of the point", "in a small interval about the point" i tako dalje. Iz navedenog proizlazi da mnogi autori koji ne žele biti strogo formalni, radije upotrebljavaju riječi nego simbole ako to nije nužno. U našem slučaju, na petoj stranici, govorimo o konkavnosti i konveksnosti funkcije u točki, stoga je osobito važno reći kako je dovoljno da graf funkcije u vrlo maloj okolini točke $[a, f(a)]$ leži ispod ili iznad tangente u toj točki. Čini nam se da je to mnogo bolje nego reći u "razmatranoj okolini" bez obzira na to kojim se zapisom ta misao izražava. Ovdje nam pada na pamet misao Morrisa Klinea (str. 389.): "Matematičari vole upotrebu grčkih slova, kao što je ovdje epsilon, jer grčka slova nematematičarima izgledaju tajanstvenije i dojmljivije i podsjećaju da su matematičari duboki mislioci". Ne vidimo po čemu je bolje upotrijebiti simbole, primjerice ε, umjesto riječi. I simbolima i riječima značenje pridaju oni koji ih upotrebljavaju. Recenzentov prijedlog nikako nije uobičajeni način definiranja okoline već samo specijalan slučaj. Seymour Lipschultz (1965) u *General Topology*, McGraw-Hill, na 70. stranici piše: "Neka je p točka u topološkom prostoru X. Podskup N od X *okolina* je točke p ako je i samo ako je N nadskup otvorenog skupa G koji sadrži p:

$$p \in G \subset N \text{ gdje je } G \text{ otvoren skup.}$$

Drugim riječima, relacija 'N je okolina točke p' inverz je relacije 'p je unutrašnja točka od N'." Navodi i primjer zatvorenog intervala $[a\text{-}\delta,\ a+\ \delta]$, δ>0, sa središtem a, koji, naravno, sadrži otvoreni interval $\langle a-\delta,\ a+\delta\rangle$, kojem pripada središte. Tom Apostol (1973) u *Mathematical Analysis*, Second Edition, Addison Wesley Longman, na 49. stranici piše: "Svaki skup koji sadrži kuglu sa središtem **a** katkada nazivamo *okolinom* od **a**." Na 15. stranici, gdje piše o proširenju skupa realnih brojeva dvjema "idealnim točkama", koje označuje simbolima +∞ i -∞ ("plus beskonačno" i "minus beskonačno"), navodi, svakako bez upotrebe slova ε : "*Svaki otvoreni interval* $\langle \mathrm{a}, +\infty\rangle$ *nazivamo okolinom od* +∞ *ili kuglom sa središtem* +∞." Sada je sasvim jasno da je pitanje veličine okoline prirodnije od pitanja veličine "mističnoga" ε . Pojam "vrlo mala okolina točke *a*" svakako je određen. Zanimljivo je što o pojmovima koji se odnose na veličinu govore čuveni matematičar Richard Courant, učenik legendarnog Hilberta i utemeljitelj *Courantovog instituta za matematičke znanosti* u New Yorku, i poznati matematičar Fritz John u jednom od najpoznatijih udžbenika diferencijalnog i integralnog računa u dvadesetom stoljeću *Introduction to Calculus and Analysis I*, Springer, pretisak iz 1999. godine. Na stranici 35. oni pišu: "Za početnika bi ponovno trebalo naglasiti da "malešnost" nije apsolutno određenje broja; zapravo pojam "proizvoljno malen" odnosi se na broj koji se u početku ne određuje nego na broj za koji se tada može izabrati bilo koja pozitivna vrijednost, i koji je izvrgnut slijedećem manjem izboru radi profinjene aproksimacije $f(x_0)$. "Dovoljno malen" odnosi se na broj δ koji se mora prilagoditi granici dopuštenog odstupanja koju je prethodno odredio drugi broj ε ."

Evo kako R. Shone (1976) u *Microeconomics: A Modern treatment*, Academic Press, na stranici 49. definira ε – okolinu: "Kada je zadan metrički prostor **X** i udaljenost $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definirana na $\mathbf{X}^2$, ε - okolina (ili ε - kugla) točke $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ dana je s: $\mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{X} \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon\}$

gdje je ε realan konačan pozitivan broj (obično malen)."

Autor vrlo dobro znade da će vrlo često uz broj ε morati upotrijebiti pridjev malen da bi upozorio o kolikoj je okolini riječ.

e) Konačno navedimo još jedan primjer iz novije literature. Martin Anthony i Norman Biggs (1998) s odjela za matematiku na London School of Economics u njihovu udžbeniku *Mathematics for Economics and Finance, Methods and Modelling*, Cambridge Universitiy Press, na 82. stranici pišu: "Derivaciju $f'(x)$ definiramo kao mjeru gradijenta od f u x. Iz toga proizlazi da možemo reći raste li ili opada funkcija u zadanoj točki, jednostavno izračunavajući njezinu derivaciju u toj točki.

- *Ako je $f'(x) > 0$ tada f raste u x.*
- *Ako je $f'(x) < 0$ tada f opada u x.*

Jasno je također da u nekoj točki c za koju je $f'(c) = 0$ funkcija f niti raste niti opada. U ovom slučaju kažemo da je *c kritična točka* (ili *stacionarna točka*) funkcije f."

Ovaj smo citat naveli radi toga da pokažemo kako je za ove autore posve normalno da o rastu ili padu funkcije u nekoj točki zaključuju na temelju predznaka vrijednosti njezine derivacije u toj točki i kako je očito da oni smatraju da je navođenje opširnijih objašnjenja kao što su ona u prethodnim citatima nepotrebno.

f) Svi ovi autori dakle pišu o rastu i padu funkcije u točki, a ne samo na intervalu. Nerijetko su ključni matematički pojmovi, primjerice neprekidnost, granična vrijednost i diferencijabilnost svojstva u točki. Naravno, pri tome je važno ponašanje funkcije u okolini te točke, u kojoj, u slučaju granične vrijednosti, funkcija čak ne mora biti ni definirana. Zbog toga je osobito važno pitanje koje nam recenzent postavlja već na prvoj stranici. Nadamo se da navedeni citati i komentari otklanjaju tri nesporazuma: nesporazum o tome može li funkcija rasti ili padati u nekoj točki, nesporazum o tome kako možemo označavati točku u ravnini i nesporazum oko toga mora li se uvijek formalno definirati okolina.

3.3. O brzini iščezavanja razlike između promjene vrijednosti funkcije i diferencijala

Na 3. stranici ispod slike 1. piše:

"Diferencijal prvog reda, *dy*, jeste promjena ordinate tangente nakon što se vrijednost neovisne varijable povećala za *dx*. Stvarna je promjena vrijednosti funkcije Δy. Kada *dx* teži nuli, tada razlika između stvarne promjene, Δy, i njezine aproksimacije, diferencijala, *dy*, teži nuli brže nego *dx*."

Kao suvišnu recenzent je prekrižio frazu "brže nego *dx*", čime je narušio osnovnu misao teksta. Temeljna je ideja diferencijalnog računa zadanu funkciju što bolje aproksimirati linearnom. Eugene Silberberg (1990.) u *The Structure of Economics*, *A Mathematical Analysis*, McGraw Hill, na 35. stranici navodi: "Razlika $dy - \Delta y = \varepsilon\Delta x$ teži 0 mnogo brže nego Δx, jer kada Δx teži 0, ε teži 0."

Bit će možda još uvjerljivije ako navedemo što o tome pišu matematičari Courant i John, na stranici 179. svog udžbenika: "Budući da se veličina

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

pojavljuje kao zbroj dvaju dijelova, naime, dijela $f'(x)\Delta x$ koji je proporcionalan promjeni Δx i dijela $\varepsilon\,\Delta x$ koji se može učiniti malenim u odnosu na Δx koliko god želimo birajući dovoljno malenu promjenu Δx. Dominantni, linearni dio u izrazu za Δy zvati ćemo *diferencijalom dy* od *y* i umjesto njega pisati

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x."$$

Autori nakon toga objašnjavaju zašto se diferencijal može pisati i u obliku

$$dy = f'(x)dx$$

i stoga Δy u obliku

$$\Delta y = f'(x)\mathrm{d}x + \varepsilon\,\Delta x.$$

Nadalje, za nas je zanimljivo i ono što autori pišu na 180. stranici. "Kada se odnos prirasta i diferencijala od *f* napiše u obliku

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \varepsilon\,h$$

vidimo da se izraz $f(x+h)$ promatran kao funkcija od *h* izražava linearnom funkcijom $f(x) + hf'(x)$ i pogreškom $\varepsilon\,h$ koja je proizvoljno malena u odnosu na *h* kada je *h* dovoljno maleno. Ovaj aproksimacijski prikaz funkcije $f(x+h)$ linearnom funkcijom $f(x) + hf'(x)$ geometrijski znači da krivulju zamjenjujemo njezinom tangentom u točki *x* (vidite Sl. 2.31)."

Iako dva navedena citata jasno ukazuju kako je legitimno reći da razlika $\Delta y - dy = \varepsilon\,\Delta x$, odnosno razliku $dy - \Delta y = \varepsilon\,\Delta x$, teži nuli mnogo brže od promjene Δx, korisno je navesti kako autori daju precizniju ocjenu "pogreške" koristeći teorem o srednjoj vrijednosti. Za neko se prikladno ξ između x i $x + h$ može pisati

$$f(x+h) - f(x) = hf'(\xi)$$

tako da je

$$\varepsilon = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = f'(\xi) - f'(x)\ .$$

Ako pretpostavimo da postoji $f''(x)$ i ako još jednom primijenimo teorem o srednjoj vrijednosti, dobit ćemo da je

$$f'(\xi) - f'(x) = (\xi - x)f''(\eta)$$

gdje je η vrijednost posredini između x i ζ i stoga između x i $x + h$. Sada proizlazi da je

$$|\varepsilon| = |(\xi - x)f''(\eta)| = |\xi - x||f''(\eta)| \le hM$$

gdje je M bilo koja gornja granica za apsolutnu vrijednost druge derivacije od f u intervalu $[x, x+h]$. Prema tome, $|\varepsilon h|$ koja mjeri odstupanje $f(x+h)$ od linearne funkcije $f(x) + hf'(x)$ najviše iznosi Mh^2. Navedimo sada doslovno što Richard i Fritz zaključuju na 181. i 182. stranici: "Za dovoljno malenu promjenu h izraz Mh^2 je, naravno, mnogo manji nego $f'(x)h$, sve dok $f'(x)$ ne postane jednaka nuli. Ova *aproksimacija funkcije u malenom intervalu linearnom funkcijom* ima najveću važnost i za praktične primjene i za suvremenu matematičku analizu. Vratit ćemo se na ovu temu u kasnijim poglavljima i tada uzgredno izvesti bolju ocjenu $|\varepsilon h| \le \frac{1}{2}Mh^2$."

Razlika između stvarne promjene vrijednosti funkcije i promjene ordinate bilo kojeg pravca, koji nije okomit na apscisu, teži nuli kada promjena neovisne varijable teži nuli. Kako bismo našli lokalno najbolju linearnu aproksimaciju promatramo, ne apsolutnu, već relativnu grešku i tražimo onaj pravac koji prolazi razmatranom točkom grafa, za kojega se ta relativna greška može učiniti po volji malom za dovoljno malu promjenu neovisne varijable. Taj se pravac u neposrednoj okolini razmatrane točke najbolje priljubljuje uz graf funkcije, pa ga osim tangentom nazivamo i priljubnicom.

3.4. O poopćavanju

a) Na 4. stranici našega teksta recenzent je zaokružio našu rečenicu: "Ono što vrijedi za funkciju jedne varijable, vrijedi i za funkciju koja ima više neovisnih varijabli," tvrdeći pri tom da "Na žalost ovo općenito ne vrijedi!". Naša rečenica slijedi nakon toga što smo utvrdili da nuždan uvjet prvog reda za lokalnu maksimalnu ili lokalnu minimalnu vrijednost funkcije možemo izraziti pomoću $dy = 0$. Na primjedbu recenzenta odgovorit ćemo citatima iz dvaju poznatih djela matematičke ekonomije.

b) Prvo djelo je autora Alpha C. Chianga (1984), *Fundamental Methods of Mathematical Economics,* Third Edition, McGraw-Hill. Na stranici 310. tog često citiranog udžbenika piše: "Sada kada smo pokazali mogućnost izražavanja derivacijskog prikaza uvjeta prvog i drugog reda pomoću dz i d^2z, mogli biste doista s razlogom pitati zašto smo se mučili da izvedemo novi skup diferencijalnih uvjeta kada već postoje derivacijski uvjeti. Odgovor je da se diferencijalni uvjeti – ali ne i derivacijski uvjeti - izražavaju u oblicima koji se mogu izravno poopćiti sa slučaja s jednom varijablom na slučajeve s dvije ili više varijabli izbora. Da budemo određeniji, uvjet prvog reda (vrijednost nula za dz) i uvjet drugog reda (negativnost ili pozitivnost za d^2z) jednako su valjano primjenjivi na sve slučajeve pod uvjetom da se fraza "za proizvoljne vrijednosti različite od nule za dx"valjano preinači tako da se izrazi promjena u broju varijabli izbora."

c) O poopćenju uvjeta prvog reda s jedne na više varijabli govore i Carl P. Simon i Lowrence Blume (1994) u *Mathematics for Economists*, Norton & Company. U tom vrlo poznatom i vrlo hvaljenom udžbeniku na str. 397. piše: "Uvjet je prvog reda da u točki x^* bude maksimum ili minimum funkcije f jedne varijable $f\,'(x^*) = 0$, to jest, da x^* bude **kritična točka**. Ovaj uvjet zahtjeva da x^* ne bude krajnja točka promatranog intervala, drugim riječima, da x^* leži u unutrašnjosti domene od f. Isti uvjet prvog reda vrijedi za funkciju F koja ima n varijabli. Međutim, funkcija od n varijabli ima n prvih derivacija: parcijalne derivacije $\partial F / \partial x_i$. N-dimenzionalni analog za $f\,'(x^*) = 0$ jeste da svaka $\partial F / \partial x_i = 0$ u $\mathbf{x}^*$. U ovom slučaju, $\mathbf{x}^*$ je **unutrašnja točka** domene od F ako postoji čitava kugla $B_r(\mathbf{x}^*)$ oko $\mathbf{x}^*$ u domeni od F."

d) Navedeni citati ukazuju da izrečena primjedba recenzenta na naš tekst nije opravdana. Usprkos tomu, smatramo da se naš tekst može poboljšati tako da čitateljima bude još razumljiviji, stoga smo sporni tekst u članku zamijenili tekstom: "Ono što vrijedi za funkciju jedne neovisne varijable, vrijedi i za funkciju koja ima više neovisnih varijabli. Uvjet prvog reda da u točki $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ bude lokalni maksimum ili lokalni minimum funkcije $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, to jest da $\mathbf{x}^*$ bude kritična točka te funkcije, jeste da u točki $\mathbf{x}^*$ totalni diferencijal prvog reda te funkcije

$$dy = f_1(\mathbf{x}^*)dx_1 + f_2(\mathbf{x}^*)dx_2 + \ldots + f_n(\mathbf{x}^*)dx_n$$

bude jednak nuli ($dy = 0$), za svaku kombinaciju diferencijala (dx_1, dx_2, … dx_n). Očito da se to može dogoditi samo onda kada je $f_1(\mathbf{x}^*) = f_2(\mathbf{x}^*) = \ldots = f_n(\mathbf{x}^*) = 0$. Do ovog zaključka dolazimo tako da za bilo koji dx_i uvrstimo jedinicu i za preostale dx_j nulu. Uz prethodno objašnjenje, uvjet prvog reda za lokalnu maksimalnu ili lokalnu minimalnu vrijednost funkcije $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kao i u slučaju funkcije jedne varijable, izražavamo zapisom

$$dy = 0 \qquad (9)$$

Naravno, kada je ovaj uvjet ispunjen, kritična je točka vektor $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, stacionarna vrijednost funkcije $f(\mathbf{x}^*)$ i stacionarna točka $[\mathbf{x}^*, f(\mathbf{x}^*)]$."

e) Na 6. i 7. stranici recenzent je označio dio teksta: "Odluka o tome je li funkcija konkavna ili konveksna u vrlo maloj okolini točke a na temelju vrijednosti druge derivacije u $x = a$, ekvivalentna je odluci koja bi bila donesena na temelju predznaka vrijednosti totalnog diferencijala drugog reda u $x = a$. Diferencijal drugog reda neke funkcije $y = f(x)$ jeste diferencijal prvog reda diferencijala prvog reda te funkcije ili simbolički

$$d^2y = d(dy)$$

$$d^2y = d(f_x dx)$$

$$d^2y = d(f_x)dx$$

$$d^2y = f_{xx}dx^2 \qquad (10)$$

gdje je $f_{xx} = \dfrac{df_x}{dx} = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$."

Pri tom tvrdi: "Ova generalizacija ne vrijedi!" U ovom dijelu teksta nije riječ ni o kakvoj generalizaciji već o istovjetnosti derivacijskog i diferencijalnog opisa konkavnosti. O tome pišemo zbog toga što se diferencijalni opis konkavnosti doista može lako poopćiti za funkciju više varijabli. Geoffrey A. Jehle i Philip J. Reny (2001) u *Advanced Microeconomic Theory*, Second Edition, Addison Wesley Longman na 466. stranici pišu: "Jednostavan način da to uvidimo jeste da prije svega shvatimo sljedeći rezultat.

TEOREM A2.3 Konkavnost funkcije jedne varijable i funkcije više varijabli

Neka je f realna funkcija definirana na konveksnom podskupu D skupa R^n. Tada je f (striktno) konkavna ako je i samo ako je za svaki $\mathbf{x} \in D$ i svaki nenul vektor $\mathbf{z} \in R^n$, funkcija $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{z})$ (striktno) konkavna na $\{ t \in R | \mathbf{x} + t\mathbf{z} \in D\}$."

Na istoj stranici dodaju: "Zbog toga što teorem A2.1 karakterizira konkavne funkcije jedne varijable, teorem A2.1 možemo spojiti s teoremom A2.3 da bismo okarakterizirali konkavne funkcije više varijabli." Imajući u vidu Hesseovu matricu kao matricu koeficijenata kvadratne forme, kako promatramo totalni diferencijal drugog reda, rezultat koji ovi autori na 467. stranici navode potvrđuje i sadržajnu neopravdanost recenzentove primjedbe:

"**TEOREM A2.4 Nagib, zakrivljenost i konkavnost funkcije više varijabli**

Neka je D konveksan podskup skupa R^n s nepraznom nutrinom na kojoj je f dva puta neprekidno diferencijabilna. Sljedeće su tvrdnje 1 do 3 ekvivalentne:

1. f je konkavna.
2. $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ je negativno semidefinitna za sve $\mathbf{x}$ u D.
3. Za sve $\mathbf{x}^0 \in D : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\ \ \forall\ \mathbf{x} \in D$.
4. Ako je $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ negativno definitna za sve $\mathbf{x} \in D$, onda je f striktno konkavna."

Mogući nesporazum o određenosti predznaka vrijednosti totalnog diferencijala drugog reda u vrlo maloj okolini točke a na temelju određenosti predznaka vrijednosti totalnog diferencijala drugog reda u točki a razrješava, nadamo se, neprekidnost.

Na 13. stranici recenzent nas nizom upitnika upozorava: "Očito je da je nužno najprije precizno definirati neke pojmove kao što to čine matematičari (vidjeti bilo koji udžbenik iz matematičke analize)!" O tim je pojmovima u našem tekstu bilo govora puno prije recenzentova upozorenja. Nadamo se kako naše htijenje da izbjegnemo suhoparne definicije neće biti uzrok budućih nesporazuma.

3.5. O spornim riječima

a) Engleska riječ *instant* na hrvatskom jeziku znači čas, trenutak, mah, tren, a engleska riječ *instantaneous* znači trenutačan, časovit, istovremen (Vidjeti u *Engleskohrvatski* *rječnik* u redakciji Rudolfa Filipovića, Školska knjiga Zagreb, 1999. str. 576.). U istom rječniku, na str. 699. navodi se da engleski pridjev *momentary* znači časomičan, trenut(ač)an, momentan; svaki čas, svaki tren. Otuda proizlazi da engleski prilog *momentarily* znači časomično, trenutačno, momentano. U *Hrvatskom enciklopedijskom rječniku*, NOVI LIBER, Zagreb, 2002. na str. 194. piše da je *čas* imenica muškog roda i da ona izražava vrlo kratak odsječak vremena, trenutak, tren. Na istoj stranici piše da je pridjev *časomičan* po značenju jednak pridjevu časovit i da znači koji traje čas, koji je samo na tren; trenutačan, trenutan.

U *Rječniku hrvatskog jezika*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, Školska knjiga Zagreb, 2000. na stranici 135. piše da je *čas* imenica muškog roda i da znači trenutak. Na istoj stranici nalazimo da je riječ *časomice* prilog koji znači na kratko vrijeme; načas te za kratko vrijeme; začas. Nadalje nalazimo da pridjev *časomičan* znači koji traje samo čas, samo tren; časovit, trenutan. Konačno, na istoj se stranici navodi da je prilog *časomično* po značenju jednak prilogu časomice.

U *Rječniku hrvatskosrpskog književnog jezika*, Knjiga prva, Zagreb-Novi Sad, 1967. na str. 373. piše da prilog *časomice* znači s vremena na vrijeme, povremeno, na trenutak, trenutno. Navodi se i jedan čulan citat iz jednog djela Augusta Šenoe u kojem se taj prilog nalazi: "Lice joj se žarilo, usne drhtale, oči časomice sijevale." Lijep je i citat iz jednog djela Branka Ćopića: "Njena kosa … ga je doticala časomice po vratu i ušima." Međutim za ovu je raspravu neobično zanimljiv citat iz jednog djela Osmana Aziza: "Jest, koji radi, može navući na se časomično ljutnju." Naravno, i u ovom je rječniku prilog *časomično* po značenju jednak prilogu časomice. U rječniku se na istoj stranici navodi da prilog časovito znači na trenutak, za kratko vrijeme, dok pridjevi *časomičan* i *časovit* imaju jednako značenje – koji traje čas, tren, kratkotrajan, trenutan.

b) Razmotrimo sada upotrebu riječi čas i izvedenicu te riječi u matematici. Na 17. stranici već navedenog djela Morris Kline piše: "Riječ čas upotrebljavamo, međutim, da bismo izrazili činjenicu da se nešto događa tako brzo da vrijeme ne protiče. Događaj je časomičan. Kad kažemo, na primjer, da je 3 sata, upozoravamo na čas, točan trenutak. Kada protok vremena prikazujemo duljinom uzduž pravca, tada interval prikazujemo pravocrtnim odsječkom, dok čas odgovara točki. Pojam časa, iako se upotrebljava u svakodnevnom životu, jeste stroga matematička idealizacija… Udaljenost koju automobil prijeđe u jednom času jednaka je nuli i vrijeme koje proteče tijekom jednog časa također je jednako nuli. Iz toga proizlazi da je udaljenost podijeljena s vremenom 0/0, što je besmisleno. Prema tome, premda je časovita brzina fizička stvarnost, čini se da postoji poteškoća u njezinom izračunavanju, a dok god je ne možemo izračunati s njom ne možemo matematički raditi."

Morris Kline u svom djelu objašnjava kako se riješio taj problem. Ovdje to nećemo podrobno opisivati. Navest ćemo samo jedan važan citat. Na str. 27. njegova djela piše: "Za matematiku je karakteristično da nastoji poopćiti proces koji se pokazao korisnim u mnoštvu posebnih okolnosti i tako ga učiniti primjenjivim na čitavu klasu problema. Znanost se bavi tisućama stopa promjene; stopa promjene pritiska zraka s obzirom na nadmorsku visinu, stopa promjene nadmorske visine zrakoplova s obzirom na brzinu i stopa promjene temperature s obzirom na nadmorsku visinu nekoliko je poznatih primjera… Izračunati časovitu stopu promjene (the instantaneous rate of change) y s obzirom na x znači, moramo, izračunati stopu promjene za neku vrijednost x za razliku od prosječne stope promjene na nekom intervalu vrijednosti za x."

Morris Kline svoje razmatranje o časovitoj stopi promjene završava na 29. stranici svog djela gdje kaže: "Govoriti o časovitoj stopi promjene varijable y s obzirom na x u vrijednosti x_1 za x je dugo. Stoga ovu stopu zovemo *derivacija y* s obzirom na x i, kada je potrebno, pobliže označavamo "u x_1". Proces primjene metode porasta da bi se dobila derivacija zove se *diferenciranje*."

c) Sada je zgodno nastaviti nekim navodima iz matematičke ekonomike. U njihovom spomenutom djelu Sydsaeter i Hammond na str. 114. i 115. pišu: "Do sada smo derivaciju funkcije tumačili kao nagib tangente na njezin graf u određenoj točki. U ekonomici, druga su tumačenja važnija. Pogledajmo prvo kako se derivacija općenito može protumačiti kao stopa promjene.

Pretpostavite da je količina y povezana s količinom x preko $y = f(x)$. Ako x ima zadanu vrijednost a, tada je vrijednost funkcije $f(a)$. Pretpostavite da se a promijeni u $a + h$. Nova vrijednost y je $f(a + h)$, a promjena vrijednosti funkcije kada se x promjeni s a u $a + h$ jeste $f(a + h) - f(a)$. Promjena y-a po jedinici promjene x-a ima posebno ime, *prosječna stopa promjene f-a na intervalu s a u a + h*. Ona je jednaka

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad [4.9]$$

Imajte na umu da je ovaj razlomak upravo Newton-ov kvocijent f-a. Iznalaženje granične vrijednosti kada h teži 0 daje derivaciju funkcije f u a. Prema tome:

Časovita stopa promjene funkcije f u a jeste $f'(a)$

Ovaj važni pojam javlja se kad god proučavamo količine koje se mijenjaju." Odmah valja primijetiti da smo umjesto časovita stopa promjene mogli upotrijebiti časomična stopa promjene, jer su pridjevi časovita i časomična po značenju jednaki. Isti autori na str. 115. i 116. usput govore o tome kako ekonomisti upotrebljavaju riječi granični i granična: "$C'(x)$ zovemo **granični trošak** (u x), $R'(x)$ **granični prihod**, i $\Pi'(x)$ **granični profit**. Ekonomisti često upotrebljavaju riječ **granični** na ovaj način da bi označili derivaciju.

Drugi primjeri derivacije uključuju sljedeće. **Granična sklonost potrošnji** jeste derivacija funkcije potrošnje s obzirom na dohodak; slično, **granični proizvod** (ili **proizvodnost**) rada jeste derivacija proizvodne funkcije s obzirom na utrošak rada."

Recimo sada nešto o tome kako sporne riječi upotrebljava R. G. D. Allen kojeg su zasluge na području matematičke ekonomike neprolazne. On o derivacijama i njihovom tumačenju govori u šestom poglavlju njegove knjige. Bez zazora, na samom početku poglavlja ilustrira pojam derivacije upotrebljavajući funkciju $y = x^3$. Na stranici 135. kaže: "Razmotrimo, sada, samo one priraste koji započinju od određene vrijednosti za x …, neka x bude fiksna originalna vrijednost varijable x i h veličina odgovarajućeg prirasta. Kada se x poveća s x na $(x + h)$ funkcija poraste za iznos $\{(x + h)^3 - x^3\}$ i prosječna stopa povećanja jeste

$$\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 ,$$

za koju se uzimlje da ovisi o promjenjivom povećanju h u x.

Kada vrijednost h postaje manja, čini se da prosječna stopa povećanja teži graničnoj vrijednosti $3x^2$ koju zovemo časovita (instantaneous) stopa povećanja funkcije u točki x. Prema tome, po definiciji, *stopa povećanja* funkcije u točki x je

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2\,.$$

Prosječna stopa povećanja funkcije savršeno je određen pojam za bilo koji ma kako mali porast h u x. S druge strane, časovita stopa porasta (the instantaneous rate of increase) jeste graničan i apstraktan pojam, granična vrijednost kojoj teži prosječna stopa porasta kada su povećanja u x manja i manja."

Čitavo osmo poglavlje autor posvećuje primjenama derivacija. Ovdje ćemo citirati samo mali dio koji na najbolji način iskazuje značenje priloga časomično. Na str. 180. piše: "Ako je $f'(a) = 0$, tada x niti raste niti opada, i krivulja $y = f(x)$ niti raste niti opada, u točki $x = a$. Vrijednost funkcije je časomično stacionarna (The value of the function is momentarily stationary) i krivulja ima tangentu paralelnu s osi x. Vrijednost funkcije u takvoj točki zove se stacionarna vrijednost i pretežan dio izlaganja koje slijedi bavi se tim vrijednostima."

Iz ovog je citata posve jasno kako možemo govoriti da funkcija u točki $x = a$ časomično niti raste niti pada, pogotovo kada znamo da engleska riječ stationary znači nepokretan, nepomičan, stalan, stacionaran (str. 1075. već navedenog englesko hrvatskog rječnika). Jer kada je vrijednost funkcije u jedinici vrlo kratkog odsječka vremena da se čini kako vrijeme ne prolazi, ne mijenja, onda doista možemo reći da funkcija časomično niti raste niti pada.

Recimo ovdje još jednu važnu pojedinost o stacionarnoj vrijednosti. Na str. 181. R. G. D. Allen analizira funkciju $y = 6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$. On kaže: "Funkcija monotono raste ali ima stacionarnu vrijednost $y = 4$ u $x = 2$. Graf funkcije prikazan je na slici 49, iz koje se vidi da krivulja uvijek raste, osim u jednoj točki gdje je tangenta paralelna s osi x. Stacionarna vrijednost, u ovom slučaju, niti je "maksimum" niti je "minimum". Razmatrana točka je primjer onoga što se zove "točka infleksije", ime izvedeno iz činjenice da krivulja prelazi preko (vodoravne) tangente kada prolazimo točku."

Ovaj primjer jasno pokazuje da u skladu sa standardnom definicijom rasta i pada funkcije, funkcija monotono raste na čitavoj domeni, iako, gledano sa stajališta rasta i pada funkcije u točki, u kritičnoj točki $x = 2$ funkcija časomično niti raste niti pada. Stacionarna vrijednost funkcije $y = 4$ časomično niti raste niti pada!

d) Prijeđimo sada na pridjev *nuždan*. Kada mi ispravno pišemo, na primjer, nuždan uvjet prvoga reda, recenzent uporno, ali neopravdano križa slovo *d* u riječi nuždan. To je vjerojatno plod uvriježenog pogrešnog uvjerenja recenzenta. Recenzent se u to može lako uvjeriti ako zaviri u Hrvatski enciklopedijski rječnik na stranicu 839. ili u Rječnik hrvatskog jezika, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, na stranicu 709. Recenzent se na više mjesta upušta u lektoriranje teksta. To nam je uistinu od srca drago. Međutim tamo gdje se s njim ne slažemo, neka taj nesporazum izgladi lektor časopisa.

3.6. O vodećim glavnim minorima

Na 12. stranici našega teksta opravdano pišemo "da vrijednosti vodećih glavnih minora Hesseove matrice odgovaraju brojnicima kvadratne forme". Recenzent je prekrižio riječ *vodećih*. Pogledajmo jednu definiciju iz Carl P. Simon-Lawrence Blume, *Mathematics for Econimists* str. 382.:

"**Definicija** Neka je A matrica n x m. Submatrica matrice A reda k koja se dobije precrtavanjem zadnjih $n - k$ redaka i zadnjih $n - k$ stupaca matrice A zove se **vodeća glavna submatrica** matrice A reda k. Njezina determinanta zove se **vodeći glavni minor** matrice A reda k. Mi ćemo označiti vodeću glavnu submatricu matrice A reda k s A_k i odgovarajući vodeći glavni minor s $|A_k|$."

Kao što je poznato, na temelju predznaka samo vodećih glavnih minora utvrđujemo definitnost zadane matrice, dok je za utvrđivanje semidefinitnosti potrebno utvrditi predznake svih glavnih minora. Vidjeti Teorem 16.1 na str. 382. i Teorem 16.2 na str. 383.

3.7. O negativnom, nenegativnom i pozitivnom profitu

a) Na 24. stranici našega teksta recenzent nas upozorava da bi pojam profita "dobro bilo upotrebljavati samo ako je riječ o pozitivnoj veličini", a na 25. stranici da je ljepše reći ekonomski gubitak nego negativan ekonomski profit. Tomu na 27. nadodaje što ide u prilog zamjeni negativnog ekonomskog profita s gubitkom.

b) Pojam ekonomskog profita definirali smo kao razliku između ukupnog prihoda od prodaje proizvoda i ukupnih ekonomskih troškova proizvodnje:

$$\Pi(y) = py - C(y)$$

gdje y označuje količinu proizvodnje, $\Pi(y)$ ekonomski profit, p cijenu proizvodnje i $C(y)$ ekonomske troškove. Pitamo se što reći ako je za neku količinu proizvodnje $\Pi(y) < 0$ ili $\Pi(y) = 0$ ili $\Pi(y) > 0$? U prvom je slučaju prirodno reći da je ekonomski profit negativan. Naravno, također je dobro reći da je to ekonomski gubitak. Međutim ipak valja primijetiti da to ne bi bilo u skladu s uvedenim oznakama. U drugom ćemo slučaju reći da je ekonomski profit jednak nuli i u trećem, nespornom, da je profit veći od nule. Srećom, naše se izražavanje podudara s izražavanjem ponajboljih pisaca udžbenika mikroekonomike. Navest ćemo nekoliko primjera.

c) P. R. G. Layard i A. A. Walters (1978), *Microeconomics Theory*, McGraw Hill, na 210. stranici pišu: "Ali uz to imamo važniji uvjet (3) da profit bude nenegativan." Na 211. stranici iste knjige nalazimo: "Koristeći ovu informaciju plus uvjet nenegativnosti profita, možemo definirati krivulju ponude proizvoda i krivulju potražnje za faktorom na slijedeći način…"

Kod Walter Nichloson (1988), *Microeconomic Theory, Basic Principles and Extension*, Seventh Edition, The Dryden Press, na 366. stranici nalazimo: "Za niže razine proizvodnje, troškovi su veći od prihoda pa su ekonomski profiti negativni."

Hall R. Varian (2000), *Intermediate Microeconomics*, *A Modern Approach*, Sixth Edition, na stranici 332. jasno objašnjava pojam ekonomskog profita i nakon toga zaključuje: "Ima mnogo varijacija upotrebe pojma "profit", ali mi ćemo se uvijek držati ekonomske definicije." Nešto kasnije, na 335. stranici, autor jednog od, po općem priznanju, najboljih udžbenika mikroekonomike piše: "Budući da su svi faktori varijabilni u dugom roku, poduzeće uvijek može neometano odlučiti da ne upotrebljava faktore i da ne proizvodi - to jest da prestane poslovati. Stoga su najmanji profiti koje poduzeće može ostvariti u dugom roku jednaki nuli.

U kratkom roku, poduzeće mora upotrebljavati neke faktore, čak kada odluči da ne proizvodi. Stoga je savršeno moguće da bi poduzeće moglo ostvarivati *negativne* profite u kratkom roku."

Na stranici 392. pisac se izražava vrlo precizno: "Budući da poduzeće u dugom roku uvijek može ostvarivati profite jednake nuli prestajući poslovati, profiti koje poduzeće ostvaruje u dugoročnoj ravnoteži moraju biti barem nula:

$$py - C(y) \geq 0$$

što znači

$$p \geq \frac{C(y)}{y}."$$

d) Sasvim je sigurno da bismo mogli navesti mnogo primjera u kojima se upotrebljava pojam gubitak. Međutim držimo da rasprava o tome treba li upotrijebiti ekonomski gubitak umjesto negativni ekonomski profit nema osobitu važnost za naš članak.

4. DRUGI KOMENTAR RECENZENTA VEZAN ZA RAD

U komentaru koji sam Redakciji poslao 6. rujna 2004. zajedno s napomenama danim na samom rukopisu, ukazao sam na nekoliko iskaza koji nisu točni. U ovom komentaru navest ću samo ono što bi po mom mišljenju Autor svakako trebao izmijeniti.

(1) Autor u popratnom pismu detaljno upoznaje recenzenta, između ostalog, i s pojmom rasta i pada funkcije. U cijelosti se slažem s obrazloženjem to više što sam i sam na taj način u svojim knjigama definirao te pojmove. Problem je što autor u radu postupa drugačije. Naime, i Autor u svom pojašnjenju nedvosmisleno te pojmove, a i pojam kritične točke, veže uz ponašanje funkcije u okolini točke (riječ je o lokalnim svojstvima funkcije!). Nemam namjeru pisati traktat o osnovnim pojmovima iz matematičke analize (siguran sam da Autor članka dobro poznaje te pojmove i da bi se uskoro pokazalo da recenzent vjerojatno zbog svog matematičkog obrazovanja inzistira na strogoj matematičkoj formulaciji koju Autor ciljano izbjegava), pa predlažem da u Uvodu Autor "…i pokazati da u kritičnoj točki funkcija časomično niti raste niti pada, odnosno da je vrijednost totalnog diferencijala u toj točki jednaka nuli." zamijeni sa "…i pokazati da je u kritičnoj točki vrijednost totalnog diferencijala funkcije jednaka nuli." Inače, vremenski prilog *časomično* i za recenzenta je veoma lijepa riječ, ali je nipošto ne bih upotrijebio u kontekstu u kojem je to učinio Autor, jer se time (namjerno ili ne, svejedno) sugerira *vremenska dimenzija* kritične točke što ne mora biti (i najčešće nije) točno. Ova napomena je važna upravo zbog činjenice da je rad namijenjen ekonomistima kod kojih "stroga matematička formalizacija … nerijetko …

stvara … osjećaj intelektualne inferiornosti." Očekujem da će Autor uvažiti ovu sugestiju i u ostatku rada.

I u novoj verziji rada (stranica 4) piše: "Ono što vrijedi za funkcije jedne neovisne varijable vrijedi i za funkciju koja ima više neovisnih varijabli." To nije točno, a iz popratnog pisma proizlazi da je toga svjestan i Autor. On je, naime želio iskazati sljedeću istinu: Analogno relaciji (8) vrijedi i za funkcije više varijabli, to jest uvjet prvog reda da je $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ kritična točka te funkcije, jeste da u točki x^* totalni diferencijal prvog reda te funkcije $dy = \ldots$ bude jednak nuli za proizvoljne diferencijale neovisnih varijabli $dx_1, \ldots, dx_n$. Ne uvaži li se ova primjedba, (matematički nedovoljno obrazovan) čitatelj bi s pravom mogao zaključiti da sve što vrijedi za funkcije jedne neovisne varijable vrijedi i za funkciju više varijabli!

Autor svakako treba u tekstu uz sliku 1 umjesto "promjena ordinate tangente" pisati "promjena ordinate točke tangente", jer tangenta je pravac a ne točka!

(2) Neobjašnjivo mi je zašto se Autor izbjegava koristiti standardnom matematičkom simbolikom. Primjerice, krajem prošlog stoljeća na kongresu matematičara predloženo je (i istovremeno usvojeno) da se umjesto os *x* piše *x*-os, pa sam stoga pri prethodnoj recenziji sugerirao Autoru da se koristi ovim posljednjim. Istina je da neki autori (njih je ipak, govoreći jezikom matematike, zanemarivo mnogo!) koriste $[x, f(x)]$ kao oznaku za točku, ali je ipak uobičajeno da se koristi oznaka $(x, f(x))$. Budući da navedena primjedba nije suštinska, a previše bih prostora trebao potrošiti navodeći razloge zašto sam za ovu posljednju oznaku, prepuštam Autoru da odluči kojom će se oznakom u radu koristiti. Slično se odnosi i na negativni ekonomski profit. Kao što sam u prethodnom osvrtu na marginama rada napisao, meni je *ljepše* reći ekonomski gubitak (pogotovo kada se dovodi u vezu s mjernim brojem površine lika!), ali to je bila (i ostala) samo sugestija Autoru. Važno je da je tekst uz sliku 3 promijenjen, pa se u novoj verziji rada mjerni broj površine lika dovodi u vezu s *apsolutnim* iznosom negativnog profita.

U hrvatskom književnom jeziku nalazimo i pridjev *nužan* i *nuždan*, pa se Autor legitimno koristi izrazom nuždan. No, budući da je u oba slučaja određeni oblik *nužni* (a vjerojatno i zbog nekih asocijacija), i dalje preferiram (Autor očito ne, što je njegovo pravo) izraz *nužan*.

Nadam se da će prethodno navedene nedostatke Autor bez većih problema otkloniti i uložiti još malo truda kako bi jedan u suštini natprosječno dobar znanstveni rad bio još bolji.

Mnoga pitanja koja je Autor naznačio u pojašnjenjima, a koja mi je Redakcija dostavila, zavrjeđuju širu eksplikaciju. Na žalost, za to nemam vremena, a mislim da se time i ne treba opterećivati prije tiskanja rada. A tada Autor i recenzent mogu u neposrednom kontaktu sučeliti argumente. To prije jer je očito riječ o znanstveniku koji zna ulogu i važnost matematike u ekonomiji.

Tek nakon što Autor uskladi rad s navedenim primjedbama, napisat ću recenziju poštujući formu koju njeguje Ekonomski pregled.

5. DRUGO PISMO AUTORA UREDNIŠTVU *EKONOMSKOG PREGLEDA*

Poštovana Gospodo,

nestrpljivo smo čekali časak kada ćemo dobiti preporuke i primjedbe na preinačenu verziju našega članka. Dobivši napokon željene obavijesti iscrpno smo proučili i najsavjesnije istražili svaku pojedinost na koju nas recenzent upućuje i zaključili da je između svih preporuka i primjedaba nedvojbeno opravdana primjedba da uz sliku 1 umjesto "promjena ordinate tangente" napišemo "promjena ordinate točke tangente". Zahvalni smo recenzentu na uočenoj nepreciznosti koju smo u novoj verziji članka otklonili.

Na žalost, stekli smo dojam da se recenzent u dovoljnoj mjeri nije uživio ni obazirao na odgovore i upute na znanstvene izvore u našem odgovoru na njegove ranije primjedbe. Da je to učinio, onda nam zacijelo ne bi predlagao da iz teksta isključimo "…i pokazati da u kritičnoj točki funkcija časomično niti raste niti pada …". Za razliku od recenzenta, uvjereni smo da bi tim isključivanjem izostavili bit poruke. Na način kao i mi, izražavaju se, na primjer, R. G. D. Allen (str. 180) te Martin Antony i Norman Biggs (str. 82). Svi navedeni autori su sa *The London School of Economics*. Recenzent također predlaže da, bez obzira na ljepotu, riječ *časomično* izostavimo iz našeg teksta kako bismo time izbjegli pomisao na *vremensku dimenziju*. O upotrebi te riječi dovoljno smo govorili u našem prvom odgovoru. Ipak, upozoravamo da tu riječ upotrebljavaju i matematičari i ekonomisti. Navodimo da tu riječ upotrebljavaju čuveni matematičari Richard Courant i Fritz John (str. 160), pisci matematike za ekonomsku analizu Knut Sydsaeter i Peter J. Hammond (str. 114), čuveni pisac R. G. D. Allen u svojoj knjizi *Mathematical Analysis for Economists* (str. 137 i mnoge druge stranice), Alpha C. Chiang (str. 180), Martin Antony i Normann Biggs (str. 56) i mnogi drugi. Nema razloga da mi budemo drugačiji od sviju!

Konačno, recenzent nas upozorava da smo na četvrtoj stranici novoga teksta pogrešno napisali: "Ono što vrijedi za funkcije jedne neovisne varijable vrijedi i za funkciju koja ima više neovisnih varijabli." Odgovor smo na tu primjedbu dali u odgovoru na primjedbe na prvu verziju članka. Uputili smo recenzenta na Alpha C. Chiang (str. 310) te na Carl P. Simon i Lawrence Blume (str. 397).

Ostale se sugestije odnose na legitimnu upotrebu zagrada, riječi i padeža. Smatramo stoga da o tome ne trebamo raspravljati. Ono što se nama katkada čini didaktički dobro, recenzentu izgleda slabo i obrnuto. Uostalom, zašto bismo baš mi trebali biti pisci članka koji odgovara idealu recenzentove mašte?

Poštovana Gospodo, osjećamo kako je prikladan časak da završimo odgovor i da vas srdačno pozdravimo s nadom da ćete naš članak konačno bezodložno objaviti.

LITERATURA

1. Apostol M. Tom (1974.). *Mathematical Analysis*. Second Edition, Addison Wesley.
2. Berge, Claude (1963.). *Topological Spaces*. Preveo E. M. Patterson, Edinburgh: Oliver and Boyd.
3. Blume, Lawrence i Simon, Carl (1994.). *Mathematics for Economists*, New York-London: W. W. Norton & Company.

4. Courant Richard i John Fritz (1999.). *Introduction to Calculus and Analysis*. Springer-Verlag.
5. Dixit, A. K. (1990.). *Optimization in Economic Theory*. Second Edition. New York: Oxford University Press.
6. Fuente, Angel de la (2000.). *Mathematical Methods and Models for Economists*. Cambridge: Cambridge University Press.
7. Geoffrey A. Jehle i Philip J. Reny (2001.). *Advanced Microeconomic Theory*. Second Edition. Addison Wesley Longman.
8. Madden, Paul (1986.). *Concavity and Optimization in Microeconomics*. London: Basil Blackwell.
9. Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston i Jerry R. Green (1995.). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.
10. Silberberg, Eugene (1990.). *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*. Second Edition. New York: McGraw-Hill Book Company.
11. Sydsaeter Knut i Hammond J. Peter (1995.). *Mathematics for Economic Analysis*. Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall.
12. Widder V. David (1989.). *Advanced Calculus*. Second Edition. Reprint. Prvo objavljen: Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall.