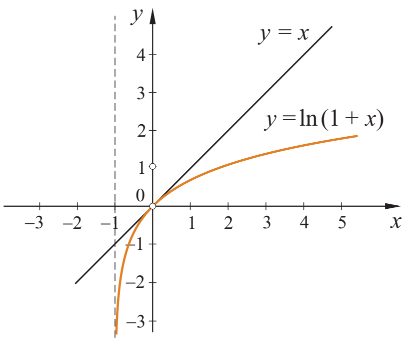
Jedan niz racionalnih brojeva koji konvergira prema $\sqrt{2}$

Alija Muminagić



U literaturi su poznati neki nizovi racionalnih brojeva koji konvergiraju prema $\sqrt{2}$. Naravno, članovi ovog niza su racionalne aproksimacije iracionalnog broja $\sqrt{2}$. Ovdje ćemo promatrati jedan takav niz racionalnih brojeva. Primijetimo da za svaki relan broj $x > -1$ vrijedi nejednakost

$$\ln(1+x) \le x, \tag{1}$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi samo ako je $x = 0$. Ova nejednakost se lako dokaže, a što možemo ilustrirati na slici gdje su prikazani pravac $y = x$ i krivulja $y = \ln(1+x)$, $x > -1$.

Konstruirajmo članove niza racionalnih brojeva koji imaju traženo svojstvo.

Zadatak 1. Dokažite da vrijedi

$$a_n = \frac{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{n+5}{n+4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2}}{\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{n+3} \cdot \frac{n+6}{n+5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}} \to 1 \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Rješenje. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{k(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{k(k+2)} = 1 + \frac{1}{k(k+2)},$$

odakle je

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{n+5}{n+4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2}}{\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{n+3} \cdot \frac{n+6}{n+5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}} \\
&= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot \frac{(n+3)^2}{(n+2)(n+4)} \cdot \frac{(n+5)^2}{(n+4)(n+6)} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{2n(2n-2)} \\
&= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{(n+2)(n+4)}\right) \left(1+\frac{1}{(n+4)(n+6)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{2n(2n-2)}\right).
\end{aligned}$$

Logaritmirajmo ovu jednakost i iskoristimo nejednakost (1). Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\ln a_n &= \ln\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{(n+2)(n+4)}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{(n+4)(n+6)}\right) \\
&\quad + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2n(2n-2)}\right) \\
&< \frac{1}{n(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+4)} + \frac{1}{(n+4)(n+6)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n-2)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+6}\right)$$
$$+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{4n}.$$

Prema tome $a_n > 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i iz posljednje nejednakosti i svojstva (1) logaritamske funkcije imamo

$$0 < \ln a_n < \frac{1}{4n}; \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

No, kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = 0$ iz (2) slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = 0$, što znači $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 2. Dokaži da $\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1} \to \sqrt{2}$, kada $n \to \infty$.

Rješenje. Neka je $b_n = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$2 = \frac{2n}{n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+5}{n+4}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{2n}{2n-1}$$
$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+5}{n+4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\right)$$
$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\right)^2 \frac{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+5}{n+4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}}{\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{n+6}{n+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}}$$
$$= b_n^2 \cdot a_n,$$

$$\text{tj.} \qquad b_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}} \tag{3}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz (3) za $n \to \infty$ iz zadatka 1 dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},$$

što je i trebalo dokazati.

Ako iskoristimo niz b_n, možemo naći racionalne brojeve koji se približavaju broju $\sqrt{2}$. Međutim, konvergencija ovog niza je spora. Tako za $n = 10$ imamo

$$\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19} \approx 1.369696183073892$$

a za $n = 20$ je $\frac{22}{21}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{26}{25}\cdot\frac{28}{27}\cdot\frac{30}{29}\cdot\frac{32}{31}\cdot\frac{34}{33}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{38}{37}\cdot\frac{40}{39} \approx 1.405408675244725$, dok je točna vrijednost na 15 decimala jednaka $\sqrt{2} \approx 1.414213562373095$.

Literatura

[1] SAM VANDERVELDE, *Fun Wirth FWANADS*, Math Horizons, February 2013, Mathematical Association of America.