Generalizacija jedne geometrijske nejednakosti

Šefket Arslanagić[1], *Daniela Zubović*

Na VI. Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi (IMO) koja je održana 1964. godine u Moskvi, na kojoj je sudjelovalo devet država: SSSR, DDR, Čehoslovačka, Poljska, Mađarska, Rumunjska, Bugarska, Jugoslavija i Mongolija, natjecateljima je bio postavljen zadatak:

Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, dokazati da je

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc, \tag{1}$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$, tj. ako i samo ako je trokut jednakostranični.

Nije teško provjeriti da se nejednakost (1) može napisati i u ekvivalentnom obliku

$$abc \geqslant (a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c). \tag{2}$$

U [2] je dan dokaz nejednakosti (2), tj. nejednakosti (1) u kome se koristi supstitucija:

$$a=y+z, \quad b=z+x, \quad c=x+y, \quad x,\ y,\ z>0,$$

a odavde

$$x=\frac{b+c-a}{2}>0, \quad y=\frac{c+a-b}{2}>0, \quad z=\frac{a+b-c}{2}>0.$$

Nakon ovih zamjena iz nejednakosti (2) nakon nekoliko transformacija dobivamo nejednakost

$$x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2 \geqslant 0,$$

koja vrijedi s jednakošću ako i samo ako je $x=y=z \iff a=b=c$.

Dat ćemo još jedan dokaz nejednakosti (1).

Dokaz. S obzirom da je nejednakost koju treba dokazati simetrična, možemo, ne smanjujući općenitost, pretpostaviti da je $a \geqslant b \geqslant c$. Tada redom vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
&a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc\\
&\iff abc-a^2b-a^2c+a^3+abc-b^2c-b^2a+b^3+abc-c^2a-c^2b+c^3 \geqslant 0\\
&\iff a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geqslant 0\\
&\iff a(a-b)(a-c)+(b-c)(b^2-ab-c^2+ac) \geqslant 0\\
&\iff a(a-b)(a-c)+(b-c)[(b-c)(b+c)-a(b-c)] \geqslant 0\\
&\iff a(a-b)(a-c)+(b-c)^2(b+c-a) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

a ova nejednakost, zbog $a \geqslant b \geqslant c$ i $b+c-a>0$, vrijedi. Ovime je nejednakost (1) dokazana.

Sada ćemo dati jedno poopćenje nejednakosti (2), tj. (1) za n-terokut kod kojeg je zbroj svih $(n-1)$ stranica veći od produkta preostalih stranica i broja $(n-2)$, gdje je

[1] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.insa.sa`

$n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 3$, tj. dokazat ćemo da vrijedi ova nejednakost:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1)a_1\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1)a_2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1)a_n\right), \quad (3)$$

gdje su a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ pozitivni realni brojevi takvi da je zbroj svih tih brojeva veći od produkta tog broja i broja $(n-1)$.

Pri tome jednakost u (3) vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Npr. za $n = 3$, nejednakost (3) glasi

$$a_1a_2a_3 \geqslant (a_1 + a_2 + a_3 - 2a_1)(a_1 + a_2 + a_3 - 2a_2)(a_1 + a_2 + a_3 - 2a_3),$$

a za $n = 4$, nejednakost (3) glasi

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3a_4 \geqslant\ & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3a_1)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3a_2) \\ & \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3a_4). \end{aligned}$$

Za dokaz ovih nejednakosti koristit ćemo poznatu nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine n pozitivnih brojeva. Evo tih dokaza:

1° Za $n = 3$ neka je:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2 + a_3 - 2a_1 > 0, \\ y &= a_1 + a_2 + a_3 - 2a_2 > 0, \\ z &= a_1 + a_2 + a_3 - 2a_3 > 0. \end{aligned}$$

Imamo

$$a_1 = \frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz}, \quad a_2 = \frac{x+z}{2} \geqslant \sqrt{xz}, \quad a_3 = \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

Sada je

$$a_1a_2a_3 \geqslant xyz,$$

tj.

$$a_1a_2a_3 \geqslant (a_1 + a_2 + a_3 - 2a_1)(a_1 + a_2 + a_3 - 2a_2)(a_1 + a_2 + a_3 - 2a_3).$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$, tj. $a_1 = a_2 = a_3$.

Ovim su nejednakosti (2) i (1) dokazane.

2° Za $n = 4$ neka je:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3a_1 > 0, \\ y &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3a_2 > 0, \\ z &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3a_3 > 0, \\ u &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3a_4 > 0. \end{aligned}$$

Imamo

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{y+z+u}{3} \geqslant \sqrt[3]{yzu}, \quad a_2 = \frac{x+z+u}{3} \geqslant \sqrt[3]{xzu}, \\ a_3 &= \frac{x+y+u}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyu}, \quad a_4 = \frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}, \end{aligned}$$

a odavde dobivamo

$$a_1a_2a_3a_4 \geqslant xyzu,$$

tj.

$$a_1a_2a_3a_4 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{4} a_i - 3a_1\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_i - 3a_2\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_i - 3a_3\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_i - 3a_4\right).$$

Shodno ovim dokazima za $n = 3$ i $n = 4$, dat ćemo dokaz za opći slučaj, tj. za bilo koji $n \in \mathbb{N}$.

Stavimo:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1)a_1 > 0,$$
$$x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1)a_2 > 0,$$
$$\vdots$$
$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1)a_n > 0.$$

Sada je

$$a_1 = \frac{x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n},$$
$$a_2 = \frac{x_1 + x_3 + \ldots + x_n}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n},$$
$$a_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_n}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_n},$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}}.$$

Nakon množenja gornjih nejednakosti, dobivamo:

$$a_1a_2\cdots a_n \geqslant x_1x_2\cdots x_n,$$

tj.

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1)a_1\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1)a_2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1)a_n\right).$$

Ovime je nejednakost (3) dokazana. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, tj. ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, odnosno kada je n-terokut pravilni.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Željko Hanjš, *Međunarodne matematičke olimpijade* (četvrto dopunjeno izdanje), Element, Zagreb, 2017.