Jedna nejednakost trokuta i njezino poboljšanje

Dragoljub Milošević

Promatrajmo nejednakost

$$\frac{a^2}{t_a^2}+\frac{b^2}{t_b^2}+\frac{c^2}{t_c^2}\geq 4, \tag{1}$$

gdje se a, b, c duljine stranica i t_a, t_b, t_c duljine težišnica trokuta.

Na prvi pogled, izgleda da će nam u dokazivanju dane nejednakosti koristiti nejednakost (v. MFL 4/256 (2013/14), str. 238): za pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z vrijedi

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \tag{2}$$

Primjenom posljednje dobivamo

$$\frac{a^2}{t_a^2}+\frac{b^2}{t_b^2}+\frac{c^2}{t_c^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{t_a^2+t_b^2+t_c^2}=\frac{4(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)}, \tag{3}$$

jer je

$$t_a^2+t_b^2+t_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Međutim, nejednakost

$$(a+b+c)^2\geq 3(a^2+b^2+c^2)$$

ne vrijedi, pa samim time, ne možemo dokazati nejednakost (1).

Zaista,

$$(a+b+c)^2\geq 3(a^2+b^2+c^2)\iff 0\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2,$$

što vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Možda ipak možemo iskoristiti nejednakost (2).

Napišimo lijevu stranu nejednakosti kao $\dfrac{a^4}{a^2t_a^2}+\dfrac{b^4}{b^2t_b^2}+\dfrac{c^4}{c^2t_c^2}$, te sada primijenimo nejednakost (2),

$$\frac{(a^2)^2}{a^2t_a^2}+\frac{(b^2)^2}{b^2t_b^2}+\frac{(c^2)^2}{c^2t_c^2}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2t_a^2+b^2t_b^2+c^2t_c^2},$$

što je, radi

$$t_a^2=\frac{1}{4}(2\left(b^2+c^2\right)-a^2),\quad t_b^2=\frac{1}{4}(2\left(c^2+a^2\right)-b^2),\quad t_c^2=\frac{1}{4}\left(2\left(a^2+b^2\right)-c^2\right), \tag{4}$$

ekvivalentno s

$$\frac{a^2}{t_a^2}+\frac{b^2}{t_b^2}+\frac{c^2}{t_c^2}\geq\frac{4(a^2+b^2+c^2)^2}{4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}. \tag{5}$$

Sada preostaje dokazati pomoćnu nejednakost

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geq 4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right). \tag{6}$$

Ova je ekvivalentna s $2(a^4+b^4+c^4)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 0$, tj.

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 \geq 0,$$

što očito vrijedi. Konačno, iz (6) i (5) slijedi (1).

Sada dokažimo nejednakost koja je bolja od (1):

$$\frac{a^2}{t_a^2}+\frac{b^2}{t_b^2}+\frac{c^2}{t_c^2} \geq \frac{16}{27}\left(8-\frac{5r}{2R}\right), \tag{7}$$

gdje su R i r duljine polumjera opisane i upisane kružnice trokuta.

Rješenje. Ovom prilikom koristit ćemo sljedeću nejednakost koja vrijedi za proizvoljne pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z:

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}, \tag{8}$$

koja se može dokazati korištenjem A-G nejednakosti za tri pozitivna broja, ili pomoću Cauchy-Schwarzove nejednakosti (dokaz se prepušta čitatelju).

Primjenom nejednakosti (8) dobivamo

$$\frac{a^3}{at_a^2}+\frac{b^3}{bt_b^2}+\frac{c^3}{ct_c^2} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(at_a^2+bt_b^2+ct_c^2)}. \tag{9}$$

Zbog (4), imamo

$$\begin{aligned} at_a^2+bt_b^2+ct_c^2 &= \frac{a}{4}\left(2\left(b^2+c^2\right)-a^2\right)+\frac{b}{4}\left(2\left(c^2+a^2\right)-b^2\right)+\frac{c}{4}\left(2\left(a^2+b^2\right)-c^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-6abc-\left(a^3+b^3+c^3\right)\right). \end{aligned}$$

Odavde, radi (v. MFL 3/255 (2013/14), str. 174)

$$a+b+c=2s, \quad ab+bc+ca=s^2+4Rr+r^2, \quad abc=4Rrs$$

i

$$a^3+b^3+c^3=2s(s^2-6Rr-3r^2),$$

imamo

$$at_a^2+bt_b^2+ct_c^2=\frac{s}{2}\left(s^2+2Rr+5r^2\right), \tag{10}$$

pa iz (9) slijedi

$$\frac{a^2}{t_a^2}+\frac{b^2}{t_b^2}+\frac{c^2}{t_c^2} \geq \frac{16s^2}{3(s^2+2Rr+5r^2)}=\frac{16}{3}\left(1-\frac{r\left(2R+5r\right)}{s^2+2Rr+5r^2}\right). \tag{11}$$

Kako je (v. MFL 2/266 (2016/17), str. 106)

$$s^2 \geq r\left(16R-5r\right),$$

iz (11) slijedi

$$\frac{a^2}{t_a^2}+\frac{b^2}{t_b^2}+\frac{c^2}{t_c^2} \geq \frac{16}{3}\left(1-\frac{2R+5r}{18R}\right)=\frac{16}{27}\left(8-\frac{5r}{2R}\right).$$

Ovim je dokazana nejednakost (7).

Napomena. Nejednakost (7) je poboljšanje nejednakosti (1), jer je

$$\frac{16}{27}\left(8-\frac{5r}{2R}\right) \geq 4 \iff R \geq 2r \quad \text{(Eulerova nejednakost)}.$$