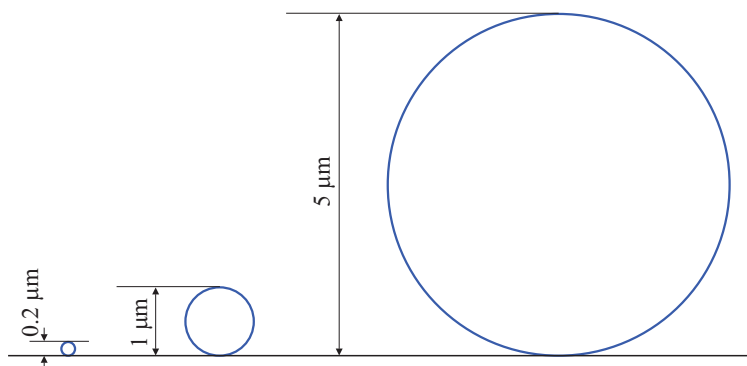


U proteklom pandemijskom razdoblju glavni je cilj bio suzbijanje širenja koronavirusa, nositelja bolesti COVID-19. Jedna od važnih zadaća na tom putu upravo je bila proučiti širenje virusa i njegovo zadržavanje u prostoru što je rezultiralo stvaranjem raznih znanstvenih, a prije svega matematičkih i fizikalnih modela.

Uz važne parametre, brzinu širenja i koncentraciju virusa, uz zahvaćeni prostor valja istaći i vrijeme ekspanzije kako bi se raspolagalo potpunim informacijama. Kako se virusi prenose putem kapljica i aerosola, očito je kako se do ozbiljnijih podataka ne može doći bez osnova fizike fluida.

Zadatak. Odrediti vrijeme zadržavanja kapljica i aerosola (kao nositelja virusa) u zraku.

Rješenje. Aerosoli i kapljice su suspenzije čestica krutih tvari ili kapljica u plinu određenih svojim promjerom.



Slika 1.

Red veličine² i njihove mase prikazani su slijedom i uz sliku 1:

veličina virusa, promjer: $50 - 200 \text{ nm} = (5 - 20) \cdot 10^{-8} \text{ m}$

masa³ virusa: $10^3 \text{ MDa} = 10^3 \cdot 10^6 \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1.661 \cdot 10^{-18} \text{ kg}$

veličina bioaerosola, promjer: $< 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$

$$d_{AS} = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}; \quad \rho_{AS} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad m_{AS} = 5.236 \cdot 10^{-16} \text{ kg}$$

veličina kapljica, promjer: $> 5 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

$$d_{KAP} = 20 \mu\text{m} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}; \quad \rho_{KAP} = 1.1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1.1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad m_{KAP} = 3.686 \cdot 10^{-14} \text{ kg}$$

¹ Autor je profesor matematike u Tehničkoj školi Nikole Tesle u Vukovaru; e-pošta predrag.novakovic1507@gmail.com.

² <https://myweb.uiowa.edu/tpeters/IH1/Aerosols/AerosolFormulae.pdf>

³ 1 Da (Dalton) mjerna jedinica mase definirana kao $\frac{1}{12}$ nevezanog neutralnog atoma ugljika ¹²C u svom osnovnom stanju i stanju mirovanja.

gustoća zraka pri 20 °C: $\rho_Z = 1.2041 \text{ kg/m}^3$

brzina slobodnog pada aerosol/kapljica: $v_{AK} \sim 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

U temeljna razmatranja navedenoga zadatka ugrađene su sljedeće fizikalne pojavnosti:

1) uzgon: $F_U = \rho V g$,

2) aerodinamička sila otpora: $F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A$,

3) Stokesova sila: $F_S = 6\pi\eta r v$.

Polazna pretpostavka je da se aerosol/kapljica sfernog oblika nalazi na visini 1.75 m od razine zemlje (približno prosječna visina čovjeka) i bez početne brzine.

Slobodni pad

Najjednostavniji je slučaj slobodni pad čestice aerosola/kapljice u početnom stanju mirovanja. Za dane podatke je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.75}{9.81}} = 0.597 \text{ s}.$$

Uzgon

Kada se promatrano tijelo nalazi u sredini gustoće ρ , na njega djeluje sila uzgona proporcionalna gustoći sredine i svome obujmu. Smjer sile uzgona je suprotan smjeru sile teže pa je uvjet ravnoteže sila:

$$-\vec{G} + \vec{U} = 0, \quad -mg + \rho_Z V g = 0.$$

Može li i pod kojim uvjetima aerosol/kapljica uravnoteženo lebdjeti? Za naše uvjete s početka zadatka je:

aerosol

$$\begin{aligned} -m_{AS} \cdot g + \rho \cdot \frac{4}{3} r_{AS}^3 \cdot \pi \cdot g &= 0 \\ -5.236 \cdot 10^{-16} \cdot 9.81 + 1.2041 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} 10^{-6}\right)^3 \cdot \pi \cdot 9.81 &= 0 \\ -5.1303 \cdot 10^{-15} &\neq 0 \end{aligned}$$

kapljica

$$\begin{aligned} -m_{KAP} \cdot g + \rho \cdot \frac{4}{3} r_{KAP}^3 \cdot \pi \cdot g &= 0 \\ -3.686 \cdot 10^{-14} \cdot 9.81 + 1.2041 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-5}}{2}\right)^3 \cdot \pi \cdot 9.81 &= 0 \\ -3.121 \cdot 10^{-13} &\neq 0 \end{aligned}$$

Oba rezultata pokazuju kako i aerosoli i kapljice, nisu u ravnoteži, dakle ne lebde. Čak uzimajući u obzir negativan predznak (isti kao i predznak sile teže), zaključak je kako je dokazano gibanje aerosoli/kapljice smjera djelovanja sile teže što mi doživljavamo prema dolje.

Sada valja istražiti koja tijela i pod kakvim uvjetima lebde. Iz jednakosti ravnoteže sila slijedi

$$\frac{m}{V} = \rho_Z.$$

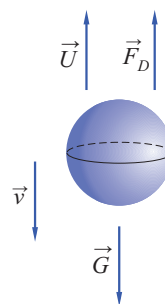
Ako je promjer veličina koja određuje aerosol, odnosno kapljicu, tada treba potražiti masu koja zadovoljava uvjet lebdenja:

$$m_{AS_0} = \rho_Z V = 1.2041 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}\right)^3 \cdot \pi = 6.305 \cdot 10^{-19} \text{ kg} < 5.236 \cdot 10^{-16} \text{ kg} \\ = m_{AS},$$

$$m_{KAP_0} = \rho_Z V = 1.2041 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-5}}{2}\right)^3 \cdot \pi = 5.044 \cdot 10^{-15} \text{ kg} < 3.686 \cdot 10^{-14} \text{ kg} \\ = m_{KAP}.$$

Očito je kako je potrebna manja masa aerosol/kapljica da bi došlo do njihovog lebdenja. Uključi li se u ovo razmatranje i virus (njegovi su nositelji aerosol/kapljica), čija je gustoća nešto manja od 400 kg/m^3 , ali znatno veća od gustoće zraka, zaključak je kako se sustav aerosol/kapljica-virus sigurno giba, kako je navedeno, u smjeru djelovanja sile teže. Primijeni li se 1. Newtonov zakon na gornji rezultat ravnoteže sila, zaključak je kako brzina gibanja ovog sustava nije stalna već je promjenjiva, što uvodi i pojam akceleracije u ovo razmatranje.

Prema 2. Newtonovom zakonu, djelovanje sile mijenja količinu gibanja, odnosno brzinu uz uvjet nepromijenjene mase, što je slučaj s aerosolima/kapljicama. Kako bi se što potpunije istražilo ponašanje promatranih tijela valja u obzir uzeti sve sile čiji doprinos nije zanemariv.



Slika 2.

Uzgon i aerodinamički otpor

Prilikom gibanja u sredstvu, uz uzgon tijelo mase m nailazi na otpor sredstva koji ovisi o gustoći sredine ρ , kvadratu brzine gibanja tijela v^2 , poprečnom presjeku tijela⁴ A (uzima se najveća površina okomita na smjer gibanja) i koeficijentu sile otpora C_D (ovisi o obliku tijela). Sila otpora smjerom je suprotna smjeru sile teže, tako je:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{G} + \vec{U} + \vec{F}_D, \\ m \frac{dv}{dt} = -mg + \rho_Z V g + \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A,$$

gdje je diferencijalni⁵ član $\frac{dv}{dt}$ mjera promjene brzine u odnosu na promjenu vremena, a predstavlja promjenjivi član ukupne sile.

⁴ Pretpostavljen je sferni kao najbliži oblik.

⁵ Dio infinitezimalnog računa s kojim se učenici susreću u nastavi matematike tek sredinom 4. razreda srednjih škola.

Fizikalni pokusi pokazuju kako je ubrzanje aerosola/kapljice vrlo malo, opadajućeg trenda i vremenom iščezava, što ukazuje da je diferencijalni član približno jednak nuli te se može i izjednačiti s nulom. Ova aproksimacija je opravdana obzirom na fenomenološko promatranje ove fizikalne pojave, a kako će se kasnije vidjeti, i zbog raznih drugih značajnih utjecaja. Iz

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{slijedi} \quad -mg + \rho_Z Vg + \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A = 0.$$

Jednostavnim postupkom za brzinu v dobiva se

$$v = \sqrt{\frac{2g \left(m - \rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \right)}{\rho_Z C_D \left(\frac{d}{2} \right)^2 \pi}},$$

odnosno, slijedom za čestice aerosola/kapljice je

$$\begin{aligned} v_{AS} &= \sqrt{\frac{2g \left(m_{AS} - \rho_Z \cdot \frac{4}{3} r_{AS}^3 \pi \right)}{\rho_Z C_D \left(\frac{d_{AS}}{2} \right)^2 \pi}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \cdot \left(5.236 \cdot 10^{-16} - 1.2041 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{10^{-6}}{2} \right)^3 \cdot \pi \right)}{1.2041 \cdot 0.47 \cdot \left(\frac{10^{-6}}{2} \right)^2 \cdot \pi}} = 0.1519 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ v_{KAP} &= \sqrt{\frac{2g \left(m_{KAP} - \rho_Z \cdot \frac{4}{3} r_{KAP}^3 \pi \right)}{\rho_Z C_D \left(\frac{d_{KAP}}{2} \right)^2 \pi}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \cdot \left(3.686 \cdot 10^{-14} - 1.2041 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-5}}{2} \right)^3 \cdot \pi \right)}{1.2041 \cdot 0.47 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-5}}{2} \right)^2 \cdot \pi}} = 0.0593 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \end{aligned}$$

a vrijeme njihova zadržavanja na putu $h = 1.75$ m bit će

$$\begin{aligned} t_{AS} &= \frac{s}{v} = \frac{h}{v} = \frac{1.75}{0.1519} = 11.52 \text{ s}, \\ t_{KAP} &= \frac{s}{v} = \frac{h}{v} = \frac{1.75}{0.059254} = 29.53 \text{ s}. \end{aligned}$$

Iz dobivenih podataka moguće je saznati i nešto više o samom gibanju aerosola/kapljice u naznačenim uvjetima. Prema veličini Reynoldsovog⁶ broja izvodi se zaključak,

⁶ Radi se o bezdimezijskoj veličini.

radi li se o laminarnom ili turbulentnom strujanju fluida. Za promatrane slučajeve aerosola/kapljice pri $l = h = 1.75$ m je

$$Re_A = \frac{\rho \cdot v_A \cdot l}{\eta} = 17.78,$$

$$Re_K = \frac{\rho \cdot v_K \cdot l}{\eta} = 6.94,$$

gdje je η dinamička viskoznost fluida (za zrak na temperaturi $T = 20$ °C je $\eta = 0.018$). Očito, radi se o izrazito laminarnom gibanju jer je uvjet za ovu vrstu gibanja $Re < 2320$.

U izrazu za silu aerodinamičkog otpora, sila ovisi o kvadratu brzine. Pri malim brzinama, vrijednost sile otpora još je manja te u jednom trenutku može postati toliko mala da je zanemariva. Naravno, sila otpora postoji i u ovom slučaju kada su brzine znatno manje.

Stokesov zakon gibanja čestica u fluidu najbolje opisuje laminarno gibanje malih čestica pri malim brzinama uz mali Reynoldsov broj $Re < 1$ što najviše odgovara uvjetima gibanja aerosola/kapljica. Ipak, za vrijednosti Reynoldsova broja $Re > 1$ potrebno je uvesti korekciju poznatu kao Cunninghamov faktor korekcije

$$C_C = 1 + \frac{2\lambda}{d} \left(1.257 + 0.4e^{-0.55 \frac{d}{\lambda}} \right),$$

koji ovisi o λ , srednjem slobodnom putu⁷ i d , promjeru čestice. Opravdanost uvođenja navedenog korekcijskog faktora potvrđena je rezultatima brojnih pokusa kojima je pokazano kako je upravo omjer $K_n = \frac{\lambda}{d}$, poznat kao Knudsenov broj, bitan u proučavanju mehanike fluida, a za aerosole je $K_n > 100$, odnosno $C_C = 331.96$. Na neki način, Knudsenov broj i Cunninghamova ispravka neizravno upućuju na važnu značajku mikroprirode i čovjekovu intuicijsku slutnju: srednji slobodan put mikročestice znatno je veći od njezine veličine (u ovom slučaju i preko 100 puta) odnosno, većim dijelom plin čini prazan prostor.

Uzgon i Stokesova sila

Uz izbor primjerenije sile otpora, primjenu Stokesovog zakona uz Cunninghamov faktor korekcije C_C , jednadžba gibanja ima oblik

$$m \frac{dv_{AS}}{dt} = \frac{3\pi\eta d_{AS}}{C_C} (v_Z - v_{AS}) + mg,$$

gdje je η dinamička viskoznost fluida (za zrak na temperaturi $T = 20$ °C je $\eta = 0.018$), d_{AS} promjer čestice aerosola v_Z brzina fluida, odnosno zraka (u promatranom slučaju jednaka nuli) i v_{AS} brzina čestice (u zadatku aerosol). Brzina aerosola/kapljice u zraku

⁷ Srednja udaljenost koju prijeđe čestica bez promjene smjera gibanja ili energije.

je

$$v_{AS} = \frac{d_{AS}^2 \rho_{AS} C_{CG}}{18\eta} = \frac{(10^{-6})^2 \cdot 10^3 \cdot 331.96 \cdot 9.81}{18 \cdot 1.824 \cdot 10^{-5}} = 9.919 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$
$$v_{KAP} = \frac{d_{KAP}^2 (\rho_{KAP} - \rho) g}{18\eta} = \frac{(2 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (1.1 \cdot 10^3 - 1.2041) \cdot 9.81}{18 \cdot 1.824 \cdot 10^{-5}} = 1.313 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

pa je vrijeme potrebno da aerosol/kapljica padne na zemlju

$$t_{AS} = \frac{s}{v} = \frac{h}{v} = \frac{1.75}{9.919 \cdot 10^{-3}} = 176.43 \text{ s},$$
$$t_{KAP} = \frac{s}{v} = \frac{h}{v} = \frac{1.75}{1.313 \cdot 10^{-2}} = 133.28 \text{ s}$$

ili izraženo, bliže čovjekovu poimanju vremena, u minutama $t_{AS} = 2.94$ min, odnosno $t_{KAP} = 2.22$ min. Usporedbe radi, u poznatom pokusu određivanja elementarnog naboja, znanog i kao Millikanov pokus s kapi ulja, za terminalnu brzinu⁸ kapi ulja dobivene su vrijednosti $3.2 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-1} < v < 1.17 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$. Kap ulja veličine je $d_{ulje} = 2 \mu\text{m} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ i gustoće $\rho_{ulje} = 800 \text{ kg/m}^3$ na sobnoj temperaturi.

Fizička realnost uključuje, prije svega, mnoštvo čestica gdje nije zanemariv doprinos bližih čestica i njihova međusobna interakcija. Pojedini znanstvenici polaze upravo od proučavanja mnoštva čestica i Brownova gibanja pretpostavljajući potpuni kaos među česticama. Ipak, usmjereni oblaci nositelja virusa nastalih disanjem, kašljanjem i kihanjem upućuju na relativno usmjereno, ali vrlo složeno gibanje, mnoštva čestica s početnim brzinama (disanje 1 ms^{-1} , kašljanje 10 ms^{-1} , a kihanje čak 50 ms^{-1}) i smjerom različitim od smjera slobodnog pada. Različiti dinamički modeli uzimaju u obzir i temperaturu, tlak, vanjsko strujanje, elektrostatski utjecaj itd.

Na kraju, valja podsjetiti kako je dobiveni rezultat približan uz značajna ograničenja ili pojednostavnjenja jer predstavlja model gibanja jedne čestice aerosol/kapljica bez početne brzine i raznih vanjskih utjecaja. I takav pojednostavnjen model jasno ukazuje na mehanizam kapljičnog prijenosa i moguće načine suzbijanja zaraze, od kojih npr. distanciranje na udaljenosti 2 m djeluje opravdano. Pokazalo se kako slobodan pad s početka razmatranja i nije baš tako slobodan, najviše zahvaljujući zakonitostima fizike fluida.

Literatura

- [1] KEVIN P. FENNELLY, *Particle sizes of infectious aerosols: implications for infection control*, The Lancet Respiratory Medicine; volume 8, issue 9, p. 914–924, 2020.
- [2] LUIS A. ANCHORDOQUI, EUGENE M. CHUDNOVSKY, *A physicist view of COVID-19 airborne infection through convective airflow in indoor spaces*, <https://arxiv.org/pdf/2003.13689.pdf>
- [3] <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7224694/>
- [4] [https://doi.org/10.1175/1520-0450\(1968\)007%3C0944:FSOAP%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1968)007%3C0944:FSOAP%3E2.0.CO;2)
- [5] https://webpace.clarkson.edu/projects/crcd/public_html/me537/downloads/slides/1_Introduction.pdf
- [6] <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/5.0042952>

⁸ <https://studylib.net/doc/25370448/millikan-s-oil-drop-experiment>