ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2023. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/292.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadatci iz matematike

3889. Za prirodan broj n dokaži nejednakost

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2.$$

3890. Neka su x_1, x_2, x_3, x_4 rješenja jednadžbe

$$x^4+kx^2+121x-2020=0.$$

Ako je $x_1x_2=20$, odredi k.

3891. Ako dva dvoznamenkasta broja napišemo jedan do drugog, dobijemo četveroznamenkasti broj koji je djeljiv njihovim produktom. Nađi sve takve parove brojeva.

3892. Nađi sva rješenja sistema jednadžbi

$$x^3+8y^3=x+2y$$
$$2x^2y+4xy^2=x+2y.$$

3893. Neka su realni brojevi k i k^2 korijeni jednadžbe $x^2+ax+b=0$. Dokaži da je $a\leq 0.25$ i $a^3-3ab+b^2+b=0$.

3894. Dokaži jednakost

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

3895. Za koje x red

$$\ln x+\ln^2 x+\ldots+\ln^n x+\ldots$$

konvergira?

3896. U trokutu ABC je $|BC|=1$, $\sphericalangle ABC=52^\circ 30'$ i $\sphericalangle BCA=90^\circ$. Izračunaj $|AC|$.

3897. U kružnici $k(O,r)$ dane su paralelne tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Ako je $|AB|=46$, $|CD|=18$ i $\sphericalangle AOB=3\sphericalangle COD$, odredi r.

3898. Težišnice t_a i t_b iz vrhova A i B trokuta ABC su okomite. Dokaži nejednakost

$$5(a^2+b^2-c^2)\geq 8ab,$$

gdje su a, b, c stranice trokuta.

3899. B i C su krajnje točke i A je polovište polukružnice. Neka je M točka na stranici $\overline{AC}$, a P i Q nožišta okomica iz A i C na pravac BM. Dokaži $|BP|=|PQ|+|QC|$.

3900. Neka su R i r duljine polumjera opisane i upisane kružnice trokuta ABC. Dokaži nejednakost

$$\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}\geq\frac{2r}{R}.$$

3901. Odredi sumu

$$\binom{100}{0}+\frac{1}{2}\binom{100}{1}+\frac{1}{3}\binom{100}{2}+\ldots+\frac{1}{101}\binom{100}{100}.$$

3902. Neka je a duljina baze i v pripadna visina jednakokračnog trokuta. Odredi polumjer ρ kružnice koja dodiruje bazu, visinu i iznutra opisanu kružnicu tog trokuta. Dokaži da je ρ jednako polumjeru upisane kružnice danog trokuta.

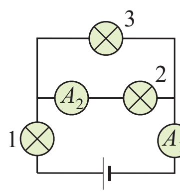
B) Zadatci iz fizike

OŠ – 510. Električno kuhalo ugrije litru vode od 20 °C do 90 °C za 3 minute. Korisnost mu je 90 posto. Kolika struja teče kroz kuhalo? Napon električne gradske mreže je 230 V. Specifični toplinski kapacitet vode je 4200 J/kgK, a njena je gustoća 1000 kg/m^3.

OŠ – 511. Prva široko korištena temperaturna ljestvica bila je ona koju je izumio njemački fizičar Daniel Gabriel Fahrenheit. Ta se ljestvica sada službeno koristi samo u SAD-u, Liberiji i Kajmanskim otocima. Temperatura smrzavanja vode u toj ljestvici iznosi 32 °F, a voda vrije na 212 °F. Koliko stupnjeva Celzija odgovara temperaturi od 0 °F?

OŠ – 512. Vozač je parkirao automobil na nizbrdici i zaboravio povući ručnu kočnicu pa se automobil počeo kretati nizbrdo. Nizbrdica je duga 20 i visoka 4 m, a nakon nje je cesta vodoravna. Automobil se sam zaustavio prešavši 30 m po vodoravnom dijelu ceste. Izračunajte silu trenja između kotača i ceste uz pretpostavku da je ta sila jednaka i na nizbrdici i na vodoravnom dijelu ceste. Koliku je kinetičku energiju imao automobil na početku vodoravnog dijela puta? Masa automobila je 1500 kg.

OŠ – 513. Izračunajte naboj koji prođe kroz treće trošilo za 10 minuta ako prvi ampermetar mjeri struju od 500 mA, a drugi od 400 mA. Napon na prvom trošilu je 10 V, a napon izvora je 24 V. Izračunajte otpore svih trošila.



1798. Kojom brzinom kruži orbiter oko Mjeseca (LRO), ako mu je radijus kruženja 1825 km, a masa Mjeseca je $7.342 \cdot 10^{22}$ kg?

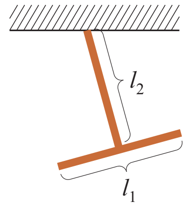
1799. Koliki je indeks loma tanke bikonveksne leće, ako je žarišna daljina 30 cm, a radijusi zakrivljenosti dioptara 25 cm i 20 cm?

1800. Odredi broj protona i broj neutrona u jednom gramu prirodnog bakra (Cu). Bakar ima 2 izotopa, čije su atomske mase i učestalosti u prirodi određene tablicom:

I	M	P
^{63}Cu	62.929601	69.17 %
^{65}Cu	64.927794	30.83 %

1801. Horizontalni domet kosog hica poveća se za 120 m, a vrijeme leta za 0.8 s, ako početnu brzinu povećamo za 10 m/s uz isti kut izbačaja. Odredi početnu brzinu, horizontalni domet i vrijeme leta prije povećanja. Otpor zraka zanemari.

1802. Dva štapa na slici čine fizičko njihalo. Izrazi period malih njihaja pomoću l_1 i l_2, ako su štapovi jednake linijske gustoće.



1803. Četiri otpornika otpora 1 Ω, 2 Ω, 3 Ω i 4 Ω spojena su na naponski izvor tako da je njihov ukupni otpor 1 Ω, a struja kroz otpor 3 Ω iznosi 3 A. Kolika struja prolazi kroz otpor 2 Ω? Koliki je napon izvora?

1804. Kuglica matematičkog njihala mase 5 g nakon 0.3 sekunde od prolaska ravnotežnim položajem udaljena se 5.6 cm i udaljava se brzinom od 8 cm/s. Kolika je duljina njihala i ukupna energija njihanja kuglice?

C) Rješenja iz matematike

3861. *Nađi sve međusobno različite pozitivne cijele brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$1 + x_1 + 2x_1x_2 + \ldots + (n-1)x_1x_2\ldots x_{n-1} = x_1x_2\ldots x_n.$$

Rješenje.

$$1 = x_1x_2\ldots x_n - (n-1)x_1x_2\ldots x_{n-1} - \ldots - 2x_1x_2 - x_1,$$

$$x_1 \cdot (x_2\ldots x_n - (n-1)x_2\ldots x_{n-1} - \ldots - 2x_2 - 1) = 1.$$

Kako se radi o prirodnim brojevima mora biti $x_1 = 1$ i

$$x_2 \cdot (x_3\ldots x_n - (n-1)x_3\ldots x_{n-1} - 3x_3 - 2) = 2.$$

Jer je $x_2 \neq x_1$ slijedi da je $x_2 = 2$ i potom:

$$x_3 \cdot (x_4\ldots x_n - (n-1)x_4\ldots x_{n-1} - 4x_4 - 3) = 3.$$

Ponovno, jer je $x_3 \neq x_2$ i $x_3 \neq x_1$ mora biti $x_3 = 3$. Nastavljajući ovaj postupak dobivamo:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3, \ldots,\ x_{n-1} = n-1,$$

i na koncu je:

$$(n-1) \cdot [x_n - (n-1)] = n - 1 \implies x_n = n.$$

Vilim Ivanuš (4),
Prva gimnazija, Varaždin

3862. *Neka su x, y, z realni brojevi, takvi da je $x+y+z=9$ i $xy+yz+zx=24$. Odredi najveći mogući broj z.*

Rješenje. Iz $x+y+z=9$ je $x=9-y-z$, a iz drugog uvjeta imamo:

$$x\cdot(y+z)+yz=24$$
$$(9-y-z)\cdot(y+z)+yz=24$$
$$9y+9z-y^2-yz-yz-z^2+yz=24$$
$$y^2+(z-9)y+z^2-9z+24=0.$$

Posljednju jednakost promatramo kao kvadratnu jednadžbu po nepoznanici y i njezina diskriminanta mora biti nenegativna:

$$D=(z-9)^2-4(z^2-9z+24)$$
$$=-3z^2+18z-15\geqslant 0.$$

Rješavanjem posljednje kvadratne nejednadžbe dobivamo $z\in[1,5]$. Dobili smo $z_{\max}=5$ (dok je $z_{\min}=1$).

Marko Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3863. *Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$(x^2-y^2)^2=1+16y.$$

Rješenje. Kako je lijeva strana potpuni kvadrat, desna strana mora biti nenegativna tj. u ovom slučaju je $y\geqslant 0$. Lijeva strana ne može biti jednaka nuli, pa je $x^2\neq y^2$ i moguća su dva slučaja:

$$|x|\geqslant y+1 \qquad |x|\leqslant y-1$$
$$x^2\geqslant y^2+2y+1 \qquad x^2\leqslant y^2-2y+1$$
$$x^2-y^2\geqslant 2|y|+1 \qquad -x^2+y^2\geqslant 2|y|-1.$$

Vidimo da vrijedi nejednakost:

$$(x^2-y^2)^2\geqslant(2y-1)^2$$
$$1+16y\geqslant(2y-1)^2$$
$$\text{tj.}\quad y\leqslant 5.$$

Desna strana može poprimiti vrijednosti 1, 17, 33, 49, 65, 81. Potpuni kvadrati su samo 1, 49 i 81. Imamo tri slučaja:

1° $y=0$, $(x^2)^2=1$
$y=0$, $x=\pm1$;

2° $y=3$, $(x^2-9)^2=49$
$y=3$, $x=\pm4$;

3° $y=5$, $(x^2-25)^2=81$
$y=5$, $x=\pm4$.

Dakle, ukupno imamo šest cjelobrojnih rješenja dane jednadžbe:

$$(x,y)\in\{(\pm1,0),(\pm4,3),(\pm4,5)\}.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3864. *Odredi najmanji cijeli broj n, $n\geq 2$, takav da je*

$$\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}}$$

cijeli broj.

Prvo rješenje. Stavimo li

$$\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}}=m$$

dobivamo

$$(n+1)(2n+1)=6m^2.$$

Kako $6|(n+1)(2n+1)$ imamo $m\equiv 1$ ili $5 \pmod 6$.

Za $n=6k+5$ imamo:

$$m^2=(k+1)(12k+11).$$

Kako su $(k+1)$ i $(12k+11)$ relativno prosti, oba moraju biti kvadrati. Dakle, postoje pozitivni cijeli brojevi a i b takvi da je $k+1=a^2$ i $12k+11=b^2$. Imamo $12a^2=b^2+1$. No, $12a^2\equiv 0 \pmod 4$ i $b^2+1\equiv 1$ ili $2 \pmod 4$, pa ne mogu postojati cijeli brojevi a i b takvi da je $12a^2=b^2+1$.

Za $n=6k+1$ imamo:

$$m^2=(3k+1)(4k+1).$$

Kako su $(3k+1)$ i $(4k+1)$ relativno prosti, oba moraju biti kvadrati. Dakle, postoje pozitivni cijeli brojevi a i b takvi da je $3k+1=a^2$ i $4k+1=b^2$. Tada je $3b^2=(2a-1)(2a+1)$. Primijetimo da je na lijevoj strani svaki prost faktor različit od 3 parnog stupnja. Dakle, nijedan od brojeva $2a-1$ i $2a+1$ ne može biti prost broj različit od 3.

Sada promatrajmo cijeli broj a takav da je ili $2a-1$ ili $2a+1$ jednak 3. Ako je

$a=1$, tada je $b=1$ i $n=1$. Promatrajmo $a \geqslant 2$. Sljedeći najmanji broje $a=13$. Tada je $3b^2 = 25 \cdot 27$ i $b=15$, odakle je $k=56$ i $n=6k+1=337$. Tada je

$$\sqrt{\frac{338 \cdot 675}{6}} = \sqrt{\frac{228\,150}{6}} = \sqrt{38\,025} = 195.$$

Ur.

Drugo rješenje. Najprije uočimo da je n neparan, inače je brojnik razlomka pod korijenom uvijek neparan pa se uopće ne može skratiti sa 6, broj pod korijenom ne bi bio prirodan broj. Neka je $n=2m-1$, pa je iz uvjeta zadatka $\sqrt{\dfrac{m\,(4m-1)}{3}} = k$. Kvadriranjem dobivamo kvadratnu jednadžbu (po nepoznanici m):

$$4m^2 - m - 3k^2 = 0,$$

čija je diskriminanta $D = 1 + 48k^2$. Ona mora biti potpun kvadrat:

$$1 + 48k^2 = p^2$$
$$p^2 - 48k^2 = 1.$$

Dobili smo Pellovu jednadžbu oblika

$$x^2 - dy^2 = 1$$

koja, ukoliko ima fundamentalno rješenje (x_1, y_1), ima beskonačno mnogo rješenja u skupu prirodnih brojeva. Uočimo da je $(p_1, k_1) = (7, 1)$ fundamentalno rješenje naše jednadžbe. Ostala rješenja dobivamo po formulama:

$$p_n = \frac{1}{2}[(p_1 + k_1\sqrt{d})^n + (p_1 - k_1\sqrt{d})^n],$$
$$k_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}[(p_1 + k_1\sqrt{d})^n - (p_1 - k_1\sqrt{d})^n].$$

1° Provjerimo fundamentalno rješenje $(p_1, k_1) = (7, 1) \implies 4m^2 - m - 3 = 0$. Njezino prirodno rješenje je $m=1$, a odavde je $n=1$. No, to rješenje otpada zbog uvjeta zadatka $n \geqslant 2$.

2° Prema gore navedenim formulama računamo:

$$p_2 = \frac{1}{2}[(7+\sqrt{48})^2 + (7-\sqrt{48})^2] = 97,$$
$$k_2 = \frac{1}{2\sqrt{48}}[(7+\sqrt{48})^2 - (7-\sqrt{48})^2] = 14.$$

Slijedi kvadratna jednadžba $4m^2 - m - 588 = 0$, koja nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

3° Analogno, prema gornjim formulama računamo:

$$p_3 = \frac{1}{2}[(7+\sqrt{48})^3 + (7-\sqrt{48})^3] = 1351,$$
$$k_3 = \frac{1}{2\sqrt{48}}[(7+\sqrt{48})^3 - (7-\sqrt{48})^3] = 195.$$

Pripadna kvadratna jednadžba je $4m^2 - m - 114\,075 = 0$ čije je jedino prirodno rješenje $m = 169$. Sada je $n = 2m - 1 = 337$.

Dakle, najmanji prirodan broj n, $n \geqslant 2$ koji zadovoljava uvjete zadatka je $n = 337$.

Marko Dodig (3), Zagreb

3865. *Odredi najveću i najmanju vrijednost izraza*

$$\frac{1}{\sin^2 x + \cos^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x + \cos^2 x}.$$

Rješenje. Najprije uočimo:

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^4 x &= \sin^2 x + \cos^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)\\ &= \sin^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) + \cos^2 x\\ &= \sin^4 x + \cos^2 x.\end{aligned}$$

Znači, treba odrediti najveću i najmanju vrijednost izraza:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sin^4 x + \cos^2 x}\\ &= \frac{2}{\sin^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) + \cos^2 x}\\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{4} \cdot \sin^2(2x)} = \frac{8}{4 - \sin^2(2x)}.\end{aligned}$$

Za svaki realan broj α je $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$, odnosno $0 \leqslant \sin^2\alpha \leqslant 1 \implies 3 \leqslant 4 - \sin^2(2\alpha) \leqslant 4$, za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$. Zaključujemo da je najmanja vrijednost danog izraza jednaka 2 i postiže se kada je $\sin^2(2x) = 0$, tj. za $x = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Najveća vrijednost izraza I je $\dfrac{8}{3}$ i postiže se kada je $\sin^2(2x) = 1$, tj. za $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Marko Dodig (3), Zagreb

3866. *Za brojeve $a \geq 2$, $b \geq 6$, $c \geq 12$ nađi najveću vrijednost izraza*

$$\frac{bc\sqrt{a-2} + ca\sqrt[3]{b-6} + ab\sqrt[4]{c-12}}{abc}.$$

Rješenje. Dani izraz zapišimo na način:

$$I = \frac{bc\sqrt{a-2} + ca\sqrt[3]{b-6} + ab\sqrt[4]{c-12}}{abc}$$
$$= \frac{\sqrt{a-2}}{a} + \frac{\sqrt[3]{b-6}}{b} + \frac{\sqrt[4]{c-12}}{c}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{a}\left(1-\frac{2}{a}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}\left(1-\frac{6}{b}\right)}$$
$$+ \sqrt[4]{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c}\left(1-\frac{12}{c}\right)}.$$

Sada koristimo A-G nejednakost za svaki od gornja tri pribrojnika.

$$\sqrt{\frac{1}{a}\left(1-\frac{2}{a}\right)} \leqslant \frac{\frac{1}{a}+\left(1-\frac{2}{a}\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a},$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}\left(1-\frac{6}{b}\right)} \leqslant \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\left(1-\frac{6}{b}\right)}{3} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3b},$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c}\left(1-\frac{12}{c}\right)} \leqslant \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\left(1-\frac{12}{c}\right)}{4} = \frac{1}{4} - \frac{9}{4c}.$$

Zbrajanjem gornjih nejednakosti imamo:

$$I \leqslant \frac{13}{12} - \frac{1}{2a} - \frac{4}{3b} - \frac{9}{4c}.$$

Gledamo slučajeve kada se u gornjim nejednakostima postižu jednakosti, pa je redom:

$$\frac{1}{a} = 1 - \frac{2}{a} \implies a = 3,$$
$$\frac{1}{b} = 1 - \frac{6}{b} \implies b = 7,$$
$$\frac{1}{c} = 1 - \frac{12}{c} \implies c = 13.$$

Konačno je:

$$I_{\max} = \frac{13}{12} - \frac{1}{6} - \frac{4}{21} - \frac{9}{52} = \frac{151}{273}.$$

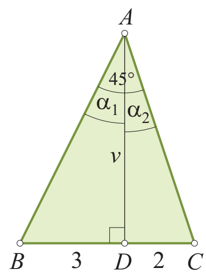
Marko Dodig (3), Zagreb

3867. *U trokutu ABC je $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Točka D je na stranici $\overline{BC}$ tako da je $AD \perp BC$. Ako je $|BD| = 3$ cm i $|DC| = 2$ cm, odredi površinu $\triangle ABC$.*

Prvo rješenje.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 45^\circ$$

$$P_{ABC} = P_{ABD} + P_{ADC} = \frac{(3+2)\cdot v}{2} = \frac{5v}{2}.$$



$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{3}{v}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2}{v}$$
$$v = \frac{3}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha_2}$$
$$3\operatorname{tg}\alpha_2 = 2\operatorname{tg}\alpha_1$$
$$3\operatorname{tg}\alpha_2 = 2\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha_2)$$
$$3\operatorname{tg}\alpha_2 = 2\cdot\frac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha_2}$$
$$3\operatorname{tg}\alpha_2 = 2\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_2} \Big/ \cdot(1+\operatorname{tg}\alpha_2)$$
$$3\operatorname{tg}\alpha_2(1+\operatorname{tg}\alpha_2) = 2 - 2\operatorname{tg}\alpha_2$$
$$3\operatorname{tg}^2\alpha_2 + 5\operatorname{tg}\alpha_2 - 2 = 0.$$

Supstitucija $x = \operatorname{tg}\alpha_2$:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

tj.

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -2.$$

Prihvatljivo rješenje je $x = \frac{1}{3}$ pa je

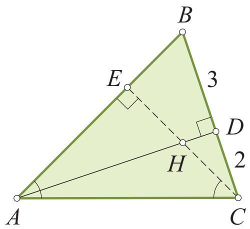
$$v = \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha_2} = 6 \text{ cm}.$$

Dakle

$$P_{ABC} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15 \text{ cm}^2.$$

Vilim Ivanuš (4), Varaždin

Drugo rješenje. Neka je $E \in \overline{AB}$ tako da je $EC \perp AB$. Kako je $\sphericalangle BAC = 45^\circ$ imamo $|AE| = |CE|$. Dakle, $\triangle AEH$ je sukladan s pravokutnim $\triangle CEB$. Dakle, $|AH| = |CB| = 5$.



$\triangle ADB$ je sličan $\triangle CDH$, pa je

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|HD|}{|CD|} = \frac{|AD| - |AH|}{|CD|}$$

tj.

$$\frac{3}{|AD|} = \frac{|AD| - 5}{2},$$

odakle je $|AD|^2 - 5|AD| - 6 = 0$.

Kako je $|AD| \geqslant 0$, jedino rješenje je $|AD| = 6$.

Površina trokuta ABC je

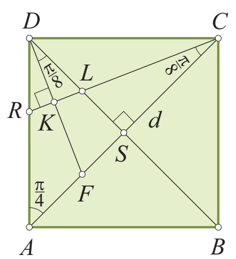
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BC| = 15 \text{ cm}^2.$$

Ur.

3868. *Dan je kvadrat $ABCD$. Simetrala kuta $\sphericalangle BDA$ siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki F. Neka je $R \in \overline{AD}$ tako da je $CR \perp DF$ i $DF \cap CR = K$, $BD \cap CR = L$. Dokaži $|AR| = 2|LS|$, gdje je S sjecište dijagonala.*

Prvo rješenje. Iz $\triangle CLS$ je

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{|LS|}{\frac{d}{2}} = \frac{2|LS|}{d}.$$



Sa slike vidimo

$$\sphericalangle ARK = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}.$$

Poučak o sinusima za $\triangle ACR$ daje:

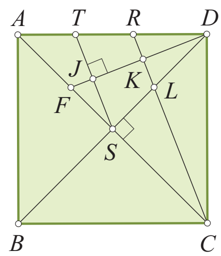
$$\frac{d}{\sin \frac{5\pi}{8}} = \frac{|AR|}{\sin \frac{\pi}{8}}$$

$$d \sin \frac{\pi}{8} = |AR| \sin \frac{5\pi}{8} = |AR| \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\Longrightarrow |AR| = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \cdot d \Longrightarrow |AR| = 2|LS|.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

Drugo rješenje. Neka je $T \in \overline{AD}$ tako da je $ST \| CR$ i $DF \cap ST = J$. Kako je $CR \perp DF$ imamo $ST \perp DF$. Trokuti DLK i DRK su sukladni, pa je $|DR| = |DL|$.



Analogno, trokuti DTJ i DSJ su sukladni, radi čega je $|DT| = |DS|$. Dakle, $|TR| = |SL|$. Kako se dijagonale kvadrata raspolavljaju, S je polovište od $|AC|$. Dakle, T je polovište od $\overline{AR}$. Stoga je $|AR| = 2|TR| = 2|SL|$.

Ur.

3869. *Točka D je polovište dužine $\overline{AB}$. Ako su AM, BN, DE tangente na kružnicu, dokaži*

$$|AM|^2 + |BN|^2 = 2(|AD|^2 + |DE|^2).$$

Rješenje. Iz pravokutnih trokuta AMC i BNC imamo

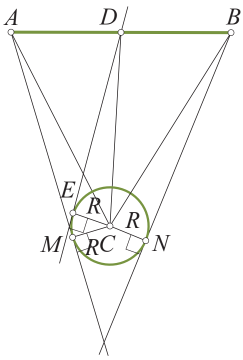
$$|AM|^2 = |AC|^2 - R^2$$
$$|BN|^2 = |BC|^2 - R^2,$$

pa je

$$|AM|^2 + |BN|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2R^2. \quad (1)$$

Nadalje, iz $\triangle DEC$ je

$$|DE|^2 = |DC|^2 - R^2.$$



Iz Stewartovog teorema za trokut ABC i točku $D \in \overline{AB}$ dobivamo

$$|AC|^2 \cdot |BD| + |BC|^2 \cdot |AD|$$
$$= |AB|(|CD|^2 + |AD| \cdot |BD|)$$

tj.

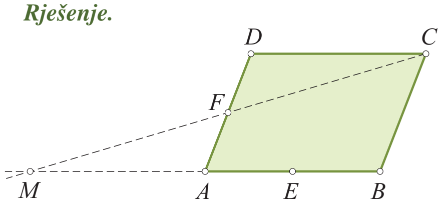
$$|AC|^2 \cdot \frac{1}{2}|AB| + |BC|^2 \cdot \frac{1}{2}|AB|$$
$$= |AB|(|CD|^2 + \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{1}{2}|AB|)$$
$$|AC|^2 + |BC|^2 = 2|CD|^2 + \frac{1}{2}|AB|^2$$
$$= 2|CD|^2 + 2|AD|^2$$
$$= 2(|DE|^2 + R^2) + 2|AD|^2. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi nejednakost.

Ur.

3870. *Polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{AB}$ paralelograma $ABCD$ su F i E, tim redom. Pravci CF i AB sijeku se u točki M. Dokaži $|AB|^2 = |BE| \cdot |BM|$.*

Rješenje.



Iz sličnosti trokuta MAF i MBC imamo redom:

$$|AM| : |BM| = |AF| : |BC|$$
$$|AM| : |BM| = 1 : 2$$
$$|BM| = 2|AM|$$
$$|AB| + |AM| = 2|AM|$$
$$|AB| = |AM|$$
$$2|AB| = 2|AM|$$
$$2|AB| = |BM|$$
$$2|AB| \cdot |BE| = |BE| \cdot |BM|$$
$$2|AB| \cdot \frac{1}{2}|AB| = |BE| \cdot |BM|$$
$$|AB|^2 = |BE| \cdot |BM|.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3871. *Odredi najmanju moguću vrijednost funkcije*

$$f(x) = \frac{9}{1 + \cos 2x} + \frac{25}{1 - \cos 2x},$$

za koju je ona definirana.

Rješenje. Za sve x za koje je funkcija definirana imamo

$$f(x) = \frac{9}{1 + \cos 2x} + \frac{25}{1 - \cos 2x}$$
$$= \frac{9}{2\cos^2 x} + \frac{25}{2\sin^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}(9\operatorname{tg}^2 x + 9) + \frac{1}{2}(25\operatorname{ctg}^2 x + 25)$$
$$= 17 + \frac{1}{2}(9\operatorname{tg}^2 x + 25\operatorname{ctg}^2 x)$$
$$\geqslant 17 + \frac{1}{2}(2\sqrt{9\operatorname{tg}^2 x \cdot 25\operatorname{ctg}^2 x})$$
$$= 17 + \frac{1}{2}(2\sqrt{9 \cdot 25}) = 32.$$

Za $f\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 32$. Dakle, najmanja vrijednost se postiže za $x = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Ur.

3872. *Odredi sumu*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}{k}.$$

Rješenje. Najprije ćemo matematičkom indukcijom dokazati, da za sve prirodne brojeve k vrijedi

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Baza. Za $k = 1$ jednakost očito vrijedi.

Pretpostavka. Neka za sve prirodne brojeve od 1 do k vrijedi:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Korak. Dokažimo da tada, također vrijedi jednakost:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Koristeći pretpostavku računamo

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\
&=\frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6}\\
&=\frac{(k+1)[2k(k+2)+3(k+2)]}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.
\end{aligned}$$

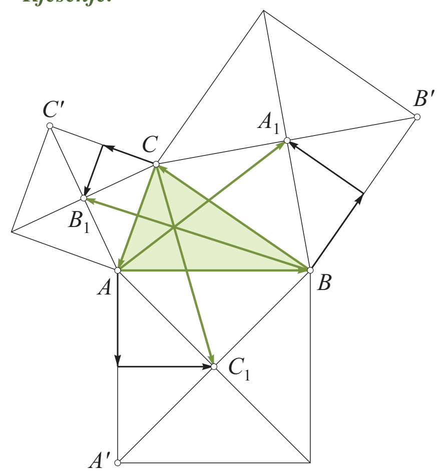
Ovime smo dokaz matematičkom indukcijom završili. Dalje, računamo danu sumu koristeći dokazanu formulu:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1^2+2^2+\ldots+k^2}{k}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(2k+1)}{6}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+3k+1}{6}\\
&=\frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{6}\cdot\sum_{k=1}^{n}1\\
&=\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&\quad+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{6}n\\
&=\frac{n(4n^2+15n+17)}{36}.
\end{aligned}$$

Marko Dodig (3), Zagreb

3873. *Neka su A_1, B_1, C_1 središta kvadrata konstruiranih izvana nad stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC. Dokaži jednakost $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.*

Rješenje.



Imamo:

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \qquad (3)$$

I sad zbrojimo (1), (2) i (3):

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\\
&=\frac{3}{2}\underbrace{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})}_{\vec{0}}+\frac{1}{2}\underbrace{(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'})}_{\vec{0}\text{ jer su to rotirane stranice trokuta za }90^\circ}\\
&=\vec{0}.
\end{aligned}$$

Vilim Ivanuš (4), Varaždin

3874. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$7^x+x^4+47=y^2,$$

u skupu pozitivnih cijelih brojeva.

Rješenje. Ako je x neparan broj, onda je $7^x+x^4+47\equiv 3 \pmod 4$, a kako nema potpunog kvadrata ovog oblika, u ovom slučaju nema rješenja.

Neka je sada $x = 2k$, za neki pozitivan cijeli broj k. Za $k \geqslant 4$ imamo

$$(7^k)^2 < 7^{2k} + (2k)^4 + 47 < (7^k + 1)^2.$$

Lijeva strana očito vrijedi, a desna je ekvivalentna s $8k^4 + 23 < 7^k$, što se provjeri matematičkom indukcijom.

Preostaje provjeriti za $k \in \{1, 2, 3\}$. Lako se vidi da zadovoljava samo $k = 2$. Tada je $x = 4$, $y = 52$.

Vilim Ivanuš (4), Varaždin

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 502. *Osam istraživača žele prijeći rijeku u prašumi pomoću drvene splavi dugačke 5 m, široke 4 m i visoke 20 cm. Njihova oprema sadrži instrumente koji ne smiju doći u dodir s vodom. Procijenili su da je gustoća drva od kojeg je splav napravljen oko 600 kg/m³. Ukupna masa svih ljudi je 800 kg, a njihove opreme 120 kg. Ako se svi ukrcaju na splav koliko će njegov gornji rub biti udaljen od vode? Gustoća vode je 1000 kg/m³.*

Rješenje.

$a = 5\ \mathrm{m}$

$b = 4\ \mathrm{m}$

$c = 20\ \mathrm{cm} = 0.2\ \mathrm{m}$

$\rho_{\mathrm{d}} = 600\ \mathrm{kg/m^3}$

$m_{\mathrm{lj}} = 640\ \mathrm{kg}$

$m_{\mathrm{o}} = 120\ \mathrm{kg}$

$\rho_{\mathrm{v}} = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$

$\Delta c = ?$

$m_{\mathrm{s}} = V\rho$

$V = abc = 5\ \mathrm{m} \cdot 4\ \mathrm{m} \cdot 0.2\ \mathrm{m} = 4\ \mathrm{m^3}$

$m_{\mathrm{s}} = 4\ \mathrm{m^3} \cdot 600\ \mathrm{kg/m^3} = 2400\ \mathrm{kg}$

$m_{\mathrm{ukupna}} = m_{\mathrm{lj}} + m_{\mathrm{o}} + m_{\mathrm{s}} = 3160\ \mathrm{kg}$

$G = mg = 31\,600\ \mathrm{N}$

$F_{\mathrm{uzgon}} = G = 31\,600\ \mathrm{N}$

$F_{\mathrm{uzgon}} = \rho_v g V'$

$$V' = \frac{F_{\mathrm{uzgon}}}{\rho_v g} = \frac{31\,600\ \mathrm{N}}{1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 3.16\ \mathrm{m^3}$$

$$c' = \frac{V'}{ab} = \frac{3.16\ \mathrm{m^3}}{5\ \mathrm{m} \cdot 4\ \mathrm{m}} = 0.158\ \mathrm{m}$$

$$\Delta c = c - c' = 0.2\ \mathrm{m} - 0.158\ \mathrm{m} = 0.042\ \mathrm{m} = 4.2\ \mathrm{cm}.$$

Gregor Klarić (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 503. *Kovanice od 50 lipa imaju čeličnu jezgru obloženu slitinom željeza i nikla. Učenik želi odrediti postotak nikla u njima. Izvagao je 11 kovanica i utvrdio da im je masa 40.2 g. Kad ih je stavio u menzuru s 50 cm³ vode razina se vode podigla na 54.9 cm³. Gustoća čelika je približno jednaka gustoći željeza, iznosi oko 7870 kg/m³, dok je gustoća nikla 8908 kg/m³. Koliki je postotak nikla u kovanici od 50 lipa?*

Rješenje.

$m = 40.2\ \mathrm{g}$

$V = 4.9\ \mathrm{cm^3}$

$\rho_{\text{željezo}} = 7870\ \mathrm{kg/m^3}$

$\rho_{\text{nikal}} = 8908\ \mathrm{kg/m^3}$

$$\rho_{\text{kovanica}} = \frac{m}{V} = \frac{40.2\ \mathrm{g}}{4.9\ \mathrm{cm^3}} = 8.204\ \mathrm{g/cm^3} = 8204\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\rho_{\text{kovanica}} = x\rho_{\text{nikal}} + (1-x)\rho_{\text{željezo}} = x\rho_{\text{nikal}} + \rho_{\text{željezo}} - x\rho_{\text{željezo}}$$

$$\rho_{\text{kovanica}} - \rho_{\text{željezo}} = x(\rho_{\text{nikal}} - \rho_{\text{željezo}})$$

$$x = \frac{\rho_{\text{kovanica}} - \rho_{\text{željezo}}}{\rho_{\text{nikal}} - \rho_{\text{željezo}}} = \frac{8204\ \mathrm{kg/m^3} - 7870\ \mathrm{kg/m^3}}{8908\ \mathrm{kg/m^3} - 7870\ \mathrm{kg/m^3}} = 0.322 = 32.2\ \%.$$

Marta Radulović (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 504. *Četiri trošila, kojima se otpori odnose kao 1 : 2 : 3 : 4, spojena su tako da im je ukupni otpor jednak najmanjem od njihovih otpora. Kolika struja teče kroz ostala trošila* *ako je struja kroz trošilo najmanjeg otpora 200 mA? Koliko iznose ti otpori ako je napon izvora na koji su ta trošila spojena 12 V?*

Rješenje.

$R_1 = R$

$R_2 = 2R$

$R_3 = 3R$

$R_4 = 4R$

$R_{\text{ukupni}} = R$

$I_1 = 200\ \text{mA}$

$\underline{U = 12\ \text{V}}$

$I_2,\ I_3,\ I_4 = ?$

$R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4 = ?$

Jedina kombinacija koja daje zadani ukupni otpor je paralela u kojoj je u jednoj grani R_2, u drugoj R_4, a u trećoj su serijski spojeni R_1 i R_3:

$$\frac{1}{R_{\text{ukupni}}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} + \frac{1}{R+3R} = \frac{2+1+1}{4R} = \frac{1}{R}$$

$R_{\text{ukupni}} = R$

$I_3 = I_4 = I_1 = 200\ \text{mA},$

jer je otpor te dvije grane jednak,

$I_2 = 2I_1 = 400\ \text{mA},$

jer je u toj grani otpor dvostruko manji

$$R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{12\ \text{V}}{0.4\ \text{A}} = 30\ \Omega$$

$R_1 = 15\ \Omega,\ R_3 = 45\ \Omega,\ R_4 = 60\ \Omega.$

Marija Miloš (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 505. *Koeficijent linearnog toplinskog širenja α opisuje promjenu duljine tijela pri promjeni temperature. Za željezo on iznosi $12 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$. To znači da se željezni štap duljine 1 m produlji za 0.012 mm kad se ugrije za 1 K. Na koju temperaturu treba zagrijati željezni obruč koji treba staviti na drvenu bačvu vanjskog promjera 60 cm ako je promjer obruča 4 mm manji od promjera bačve? Početna temperatura obruča i bačve je $20\,^\circ C$.*

Rješenje.

$\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$

$d_\text{b} = 60\ \text{cm}$

$\Delta d = 4\ \text{mm} = 0.004\ \text{m}$

$d_\text{o} = 59.6\ \text{cm} = 0.596\ \text{m}$

$\underline{t_1 = 20\,^\circ\text{C}}$

$t_2 = ?$

$\Delta d = \alpha d_\text{o} \Delta T$

$$\Delta T = \frac{\Delta d}{\alpha d_\text{o}} = \frac{0.004\ \text{m}}{12 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1} \cdot 0.596\ \text{m}} = 559.3\ \text{K}$$

$\Delta t = 559.3\,^\circ\text{C}$

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 20\,^\circ\text{C} + 559.3\,^\circ\text{C} = 579.3\,^\circ\text{C}.$$

Iva Stijarković (8),
OŠ Horvati, Zagreb

1784. *Kolica se gibaju niz kosinu nagiba 35° ubrzanjem 4 m/s^2. Na dnu kosine nastave se gibati po horizontalnoj podlozi uz isti koeficijent trenja. Koliki su put kolica iz stanja mirovanja prevalila po kosini, ako po horizontalnoj podlozi prevale 2.3 m do zaustavljanja? Kolika je njihova brzina na dnu kosine?*

Rješenje. Niz kosinu ubrzanje je

$$a = g \sin\alpha - \mu g \cos\alpha,$$

odakle uvrštavanjem dobijemo μ:

$$\mu = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} = \frac{9.81 \sin 35^\circ - 4}{9.81 \cos 35^\circ} = 0.2024.$$

Iz zakona očuvanja energije je:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \mu m g s,$$

$$v_1 = \sqrt{2\mu g s} = 3.022\ \text{m/s}.$$

Duljinu puta niz kosinu izračunamo iz

$$v_1^2 = 2al,$$

$$l = \frac{v_1^2}{2a} = 1.141\ \text{m}.$$

Marko Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1785. *Pirit (željezni sulfid, FeS_2) kristalizira u kubičnu rešetku gustoće 5 g/cm^3. Koliku bi masu i duljinu stranice imao monokristal pirita oblika kocke s deset milijuna (10^7) atoma željeza duž svakog brida?*

Rješenje. U kocki kojoj brid sadrži 10^7 atoma željeza ima ukupno

$$N_{\mathrm{Fe}} = 10^{7\cdot 3} = 10^{21}$$

atoma željeza. Atoma sumpora ima dvostruko više, to jest $2 \cdot 10^{21}$. Masu ćemo dobiti množenjem s atomskom težinom i dijeljenjem s Avogadrovom konstantom:

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{Fe}} &= \frac{N_{\mathrm{Fe}}}{N_A} \cdot Ar(\mathrm{Fe}) \\ &= \frac{10^{21}}{6.022 \cdot 10^{23}} \cdot 55.845 = 0.0927 \text{ g}, \\ m_{\mathrm{S}} &= \frac{N_{\mathrm{S}}}{N_A} \cdot Ar(\mathrm{S}) \\ &= \frac{2 \cdot 10^{21}}{6.022 \cdot 10^{23}} \cdot 32.06 = 0.1065 \text{ g}. \end{aligned}$$

Dakle ukupna masa kocke pirita je

$$m = m_{\mathrm{Fe}} + m_{\mathrm{S}} = 0.1992 \text{ g}.$$

Ur.

1786. *Satelit budućnosti u obliku prstena vrti se oko osi tako da napravi puni okret za 90 s, a centrifugalno ubrzanje na prstenu iznosi 80 % Zemljine gravitacije. Koliki je radijus prstena? Kolika je brzina kruženja? Uzeti $g = 9.81$ m/s^2.*

Rješenje. Zadano centripetalno ubrzanje iznosi

$$a = 0.8g = 7.848 \text{ m/s}^2.$$

Izrazimo ga pomoću perioda T:

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}, \\ r &= \frac{aT^2}{4\pi^2} = 1610.2 \text{ m}. \end{aligned}$$

Brzina kruženja je

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 112.41 \text{ m/s}.$$

Ur.

1787. *Jupiterovi sateliti Io i Europa kruže oko Jupitera tako da za svaku orbitu Europe Io napravi dvije orbite. Koliko je postotaka brzina kruženja Ia veća od brzine kruženja Europe? Koliko je postotaka radijus kruženja manji?*

Rješenje. Pomoću trećeg Keplerovog zakona ćemo odrediti omjere radijusa putanja iz omjera ophodnih vremena:

$$\frac{r_I^3}{T_I^2} = \frac{r_E^3}{T_E^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

Kako je u zadatku $T_E = 2T_I$ slijedi

$$\frac{r_I}{r_E} = \left(\frac{T_I}{T_E}\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} = 0.63.$$

Brzinu možemo izraziti pomoću radijusa putanje i ophodnog vremena,

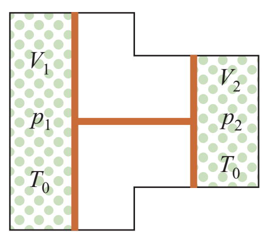
$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

pa je

$$\frac{v_I}{v_E} = \frac{r_I}{r_E} \cdot \frac{T_E}{T_I} = 0.63 \cdot 2 = 1.26.$$

Ur.

1788. *Dvije povezane cilindrične posude različitih presjeka zatvorene su klipovima koji su povezani krutim štapom kao na slici. Cilindrične posude su napunjene idealnim plinovima iste temperature T_0. Između klipova je vakuum, a sustav je u ravnoteži kad su oba klipa jednako udaljena od kraja pripadnog cilindra. Zbog promjene temperature plina u obje posude nova se ravnoteža uspostavi tako da se desni kilp pomakne na polovicu ranije udaljenosti od kraja posude. Odredi omjer novih temperatura plinova.*



Rješenje. Najprije promatramo sustav prije promjene temperature i pomicanja klipova. Neka su S_1 i S_2 površine poprečnih presjeka cilindara. Sustav je u ravnoteži ako je sila na lijevi i desni klip jednaka. Tada imamo:

$$p_1 = \frac{F}{S_1},$$
$$p_2 = \frac{F}{S_2},$$
$$p_1 S_1 = p_2 S_2.$$

Kada se sustav pomakne u novu ravnotežu imamo

$$p_1' S_1 = p_2' S_2.$$

Dijeljenjem dobivenih jednadžbi je

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1'}{p_2'}.$$

Za oba cilindra vrijedi

$$\frac{p_1 V_1}{T_0} = \frac{p_1' V_1'}{T_1},$$
$$\frac{p_2 V_2}{T_0} = \frac{p_2' V_2'}{T_2}.$$

Dijeljenjem ovih jednadžbi je

$$\frac{V_1}{V_1'} T_1 = \frac{V_2}{V_2'} T_2.$$

Sada iskoristimo uvjet zadatka $V_1' = 1.5V_1$ i $V_2' = 0.5V_2$, pa je konačno

$$T_1 : T_2 = 3 : 1.$$

Marko Dodig (3), Zagreb

1789. *Zbog nagiba Zemljine osi vrtnje u odnosu na os putanje od* $23.5°$*, 39.9 % Zemljine površine je u tropskom, 51.8 % u umjerenom, a 8.3 % u polarnom pojasu. Odredi nagib osi planeta na kojemu tropski i umjereni pojas zauzimaju jednaku površinu. Koliki su tada postotci po pojasevima?*

Rješenje. Ako je površina planeta S i nagib osi planeta ϕ, Površina tropskog pojasa bit će

$$P_1 = S \cdot \sin\phi.$$

Površina sjevernog polarnog pojasa (kape) je

$$P_2 = \frac{S(1-\cos\phi)}{2}.$$

Kako imamo dva polarna, dva umjerena i jedan tropski pojas, ukupnu površinu umjerenog pojasa izračunamo oduzimanjem od površine planeta,

$$P_U = S - P_1 - 2P_2.$$

Izjednačavanjem s P_1 imamo

$$S - S\sin\phi - S(1-\cos\phi) = S\sin\phi.$$

Dijeljenjem s S i sređivanjem dobijemo

$$1 - \sin\phi - (1-\cos\phi) = \sin\phi,$$
$$\cos\phi = 2\sin\phi,$$
$$\operatorname{tg}\phi = 0.5.$$

Odakle je $\phi = 26°33'54''$, a postotci po pojasevima su

$$\frac{P_1}{S} = 0.4472 = 44.72\,\%$$
$$\frac{P_U}{S} = 0.4472 = 44.72\,\%$$
$$\frac{2P_2}{S} = 0.1056 = 10.56\,\%.$$

Ur.

1790. *Osobama sa zamućenjem očne leće se kirurški ugrađuje umjetna leća umjesto zamućene. Pritom se gubi mogućnost akomodacije oka na daljinu. Ako neka osoba nakon takve operacije vidi oštru sliku predmeta udaljenog 80 cm od oka, koju bi dioptriju naočala trebala dobiti za pogled u daljinu, a koliku za čitanje na udaljenosti 25 cm?*

Rješenje. Za oštar vid na udaljenosti 25 cm, osobi treba konvergentna (sabirna) leća naočala, čija jačina odgovara razlici recipročnih vrijednosti daljina u metrima, tj.

$$J_2 = \frac{1}{0.25} - \frac{1}{0.8} = +2.75 \text{ dpt}.$$

Za vid na daljinu iskoristimo isti izraz kada prva udaljenost teži u ∞:

$$J_1 = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{0.8} = -1.25 \text{ dpt}.$$

Ur.