



63. Međunarodna matematička olimpijada 2022. g.



Međunarodna matematička olimpijada (MMO) održana je ove godine od 6. do 16. srpnja u Oslu, a zemlja domaćin bila je Norveška. Hrvatsku su ove godine na natjecanju predstavljali *Bernard Inkret* (4. r.), *Dorijan Lendvaj* (4. r.), *Patrick Pavić* (4. r.), *Janko Bušelić* (3. r.) i *Namik Agić* (3. r.) iz XV. gimnazije u Zagrebu, te *Matej Vojvodić* (4. r.) iz Gimnazije Lucijana Vranjanina u Zagrebu.

Voditelji ekipe bili su *Matija Bašić* (Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu) i *Vlatko Crnković* (Fakultet elektrotehnike i računarstva u Zagrebu).

Budući da su prethodne dvije godine putovanja i okupljanja bila onemogućena zbog epidemije COVID-19, veliko nam je zadovoljstvo bilo ponovno sudjelovanje uživo u Olimpijadi. Put u Norvešku je bio ugodan, te smo odmah po slijetanju u Oslo upoznali i neke druge ekipe. Smještaj je bio ugodan i bilo je raznih prigoda za druženje s drugim natjecateljima. Vrijeme smo kratili i šetnjama Oslom u koje nas je vodila naša domaćica Vedrana. Ona je inače iz Splita, ali je u Oslu završila srednju školu te sada tamo studira inženjerstvo obnovljivih izvora energije, te se o nama u Norveškoj brinula kao lokalni vodič.

Poseban naglasak bio je na samim danima natjecanja, 11. i 12. srpnja. Svaki dan smo tijekom četiri i pola sata rješavali po tri zadatka iz različitih područja matematike. Nakon prvog dana bili smo pomalo iznenađeni težinom drugog zadatka, kojeg smo svi potpuno uspješno riješili, jer smo ipak ovdje očekivali nešto teži zadatak. Tek kasnije smo saznali da smo jedna od desetak ekipa čiji su natjecatelji na tom zadatku osvojili sve bodove. Drugi dan nam je bio nešto lošiji, a kroz razgovor s nekim natjecateljima smo saznali da su mnogi od njih riješili slično nama. Dojam nakon natjecanja bio je da smo svi dobro riješili, no bili smo pomalo pesimistički procijenivši da bi većini nas mogao nedostajati pokoji bod do željene medalje, što se nažalost pokazalo točnim.

Sljedeća dva dana, 13. i 14. srpnja, naši su voditelji koordinirali bodovanje naših rješenja, a učenici su se uglavnom odmarali i zabavljali. Posjetili smo Tehnički muzej i zabavni park nedaleko od Osla, a kasnije i novi Munchov muzej u pratnji naših voditelja. Večere smo kratili u igranju društvenih igara, a veliko nam je zadovoljstvo bilo prisustvovanje večeri s predstavnikom Jane Streeta, Ognjenom Stipetićem, inače bivšim hrvatskim matematičkim olimpijcem.

Na zadnji dan Olimpijade, 15. srpnja, održana je ceremonija zatvaranja na kojoj su objavljeni službeni rezultati. Hrvatska je na MMO 2022. zauzela odlično 34. mjesto od čak 104 zemlje, a pojedinačno smo osvojili jednu srebrnu (*Bernard*), četiri brončane (*Patrik*, *Namik*, *Janko*, *Matej*) medalje, a *Dorijan* je osvojio samo pohvalu jer mu je bronca izmakla za samo jedan bod. Ove godine postignut je naš rekord u broju osvojenih bodova: šest natjecatelja je na šest zadataka po sedam bodova osvojilo čak 157 bodova, a prijašnji najbolji rezultat ostvaren je 2018. kada je ekipa osvojila 145 bodova.



Za kraj, treba zahvaliti organizatorima što su uspjeli od natjecanja napraviti nezaboravno iskustvo, a posebno našoj *gajdici* Vedrani. Sigurno će svim sudionicima ovog natjecanje, događanja, izleti, ali i prijateljstva koja su stvorili ostati u dragom i trajnom sjećanju.

Bodovi hrvatskih učenika na 63. MMO.

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
B. Inkret	7	7	2	7	6	2	31	srebrna
N. Agić	7	0	0	7	6	0	21	brončana
J. Bušelić	7	7	0	7	6	0	27	brončana
P. Pavić	7	7	7	0	5	1	27	brončana
M. Vojvodić	7	7	1	7	1	0	23	brončana
D. Lendvaj	7	7	2	1	1	4	22	pohvala
ekipni rezultat	42	42	12	29	25	7	157	

Matej Vojvodić

Zadaci

Prvi dan, ponedjeljak, 11. srpnja 2022.

Zadatak 1. Banka u Oslu izdaje dvije vrste kovanica: aluminijske (označene slovom A) i brončane (označene slovom B). Vlatko ima n aluminijskih i n brončanih kovanica, poredanih u niz slijeva nadesno u nekom poretku. *Lanac* je bilo koji podniz uzastopnih kovanica iste vrste. Za dani prirodni broj $k \leq 2n$, Vlatko ponavlja sljedeći potez: pronalazi najdulji lanac koji sadrži k -tu kovanicu slijeva i premješta sve kovanice u tom lancu na lijevi kraj niza. Na primjer, ako je $n = 4$ i $k = 4$, proces koji počinje poretkom $AABBBABA$ je

$$AABBBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots$$

Odredi sve parove (n, k) , pri čemu je $1 \leq k \leq 2n$, takve da za svaki početni poredak, u nekom trenutku tijekom procesa, prvih n kovanica na lijevom kraju niza bude iste vrste.

Zadatak 2. Neka \mathbb{R}^+ označava skup pozitivnih realnih brojeva. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takve da za svaki $x \in \mathbb{R}^+$ postoji točno jedan $y \in \mathbb{R}^+$ za koji vrijedi

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Zadatak 3. Neka je k prirodni broj i neka je S konačan skup neparnih prostih brojeva. Dokaži da postoji najviše jedan raspored (do na rotacije i refleksije) elemenata skupa S ukrug tako da umnožak bilo koja dva susjedna broja ima oblik $x^2 + x + k$ za neki prirodni broj x .

Drugi dan, utorak, 12. srpnja 2022.

Zadatak 4. Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut takav da vrijedi $|BC| = |DE|$, te točka T unutar $ABCDE$ takva da vrijedi $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ i $\sphericalangle ABT = \sphericalangle TEA$. Pravac AB siječe pravce CD i CT u točkama P i Q , redom, pri čemu točke P, B, A, Q leže na pravcu u tom poretku. Pravac AE siječe pravce CD i DT u točkama R i S , redom, pri čemu točke R, E, A, S leže na pravcu u tom poretku. Dokaži da točke P, S, Q, R leže na jednoj kružnici.

Zadatak 5. Odredi sve trojke (a, b, p) prirodnih brojeva takvih da je p prost broj i vrijedi

$$a^p = b! + p.$$

Zadatak 6. Neka je n prirodni broj. *Nordijski kvadrat* je tablica $n \times n$ u čija polja su upisani svi prirodni brojevi od 1 do n^2 tako da svako polje sadrži točno jedan broj. Dva polja smatramo susjednima ako imaju zajedničku stranicu. Svako polje susjedno samo poljima koja sadrže veće brojeve nazivamo *dol*. *Uspón* je niz od jednog ili više polja takav da vrijedi:

- (i) prvo polje u nizu je *dol*,
- (ii) svaka dva uzastopna polja u nizu su susjedna, i
- (iii) brojevi upisani u polja u nizu su u rastućem poretku.

Odredi, u ovisnosti o n , najmanju moguću vrijednost ukupnog broja uspona u nordijskom kvadratu.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Rang-lista

	nagrade			poh.	broj bod.		nagrade			poh.	broj bod.
	I	II	III				I	II	III		
Kina	6				252	Danska	2	4	121		
Južna Koreja	3	3			208	Gruzija	3	3	121		
SAD	4	1	1		207	Filipini	2	4	119		
Vijetnam	2	2	2		196	Austrija	2	4	118		
Rumunjska	2	4			194	Bangladeš	1	5	115		
Tajland	3	2	1		193	Novi Zeland	1	5	108		
Njemačka	1	4	1		192	Tadžikistan	1	5	107		
Iran	3	3			191	Švedska	1	5	106		
Japan	1	4	1		191	Norveška	1	4	103		
Izrael	1	4	1		188	Finska	1	4	101		
Italija	2	2	2		188	Belgija	1	5	94		
Poljska		4	2		183	JAR		6	94		
Ujedinjeno Kraljevstvo	1	3	2		179	Latvija		5	94		
Kanada	2	2	1	1	178	Kostarika	1	4	92		
Tajvan	1	2	3		178	Cipar		5	85		
Bugarska	1	3	1	1	177	Tunis		6	85		
Kazahstan		3	3		174	Irska		5	84		
Ukrajina	1	1	4		174	Maroko		4	82		
Brazil	2	1	2	1	173	Sirijska		1	82		
Hong Kong	1	3	1	1	173	Šlovenija		1	79		
Peru		3	3		173	Šri Lanka		5	77		
Saudijska Arabija		2	4		168	Alžir		1	75		
Meksiko		2	4		167	Kolumbija		1	74		
Indija	1		5		165	Kirgistan		4	73		
Singapur		4	1	1	165	Albanija		3	62		
Armenija		2	4		163	Paragvaj		4	59		
Grčka		2	3	1	163	Bolivija (5)		4	57		
Turska		4	1	1	163	Salvador (3)	1	2	56		
Australija	1		4	1	162	Kosovo		4	55		
Mongolija		2	3	1	162	Pakistan		3	54		
Bjelorusija		2	3	1	160	Island		3	51		
Francuska		3	2	1	158	Mauritanija		4	42		
Mađarska		1	5		158	Panama (4)		3	42		
Azerbajdžan		1	4	1	157	Portoriko		1	40		
Hrvatska		1	4	1	157	Ruanda		1	34		
Bosna i Hercegovina		3	2	1	154	Honduras (4)		2	31		
Srbija		2	2	2	153	Čile (4)		1	27		
Indonezija		1	4	1	151	Ekvador		2	27		
Sjeverna Makedonija		2	2	2	148	Nepal		2	27		
Nizozemska	1		2	3	145	Urugvaj (2)		2	27		
Švicarska			4	2	145	Dominikanska Republika (5)		2	26		
Argentina		1	3	2	139	Luksemburg (5)		1	26		
Španjolska			4	2	139	Crna Gora (4)		1	23		
Malezija	1	1	1	3	137	Oman			19		
Portugal		1	3	2	137	Gana (3)			18		
Slovačka		1	4	1	136	Bocvana			17		
Moldavija		1	2	3	135	Palestina (1)		1	14		
Litva		1	1	4	129	Kuba (2)		1	13		
Makau			3	3	127	Uganda (5)		1	13		
Estonija		1	2	3	124	Lihtenštajn (1)		1	12		
Uzbekistan			1	5	124	UAE		1	10		
Češka		1	2	3	122	Venecuela (2)			7		

Broj u zagradi je broj natjecatelja kada je on manji od 6.