11. Europska matematička olimpijada za djevojke, 2022. g.

Ove godine održana je 11. Europska matematička olimpijada za djevojke od 6. do 12. travnja u Egeru, Mađarska. Na temelju rezultata Državnog natjecanja iz matematike održanog 11. svibnja 2021. godine održana je 12. veljače 2022. godine *3. Hrvatska matematička olimpijada za djevojke (HMOD)*, na koju je pozvana 21 učenica. Natjecanje je održano na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu.

Najuspješnije učenice koje su predstavljale Republiku Hrvatsku na HMOD su:

Stella Čolo, 3. r., Gimnazija Franje Petrića, Zadar

Lana Mileni, 1. r., Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka

Petra Grubišić, 2. r., Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

Barbara Kelava, 2. r., Prva gimnazija Varaždina, Varaždin.

Samo natjecanje na European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO) održavalo se 8. i 9. travnja 2022.

Na ovoj Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke od naših je *Stella* osvojila srebrnu, a *Lana, Petra* i *Barbara* dobile su pohvalu. Pregled svih rezultata može se vidjeti na adresi:

`https://www.egmo.org/registration/2022/person?template=scoreboard`

Učenice su, osim njihovih mentora u školi, u okviru službenih priprema, pripremali njihovi voditelji Katja Varjačić i Ivan Novak.

Iduće godine 12. Europska matematička olimpijada za djevojke će se održavati u Portorožu, Slovenija.

Ivan Novak

Zadatci

Prvi dan, petak, 8. travnja 2022.

Zadatak 1. Neka ja ABC šiljastokutan trokut u kojem vrijedi $|BC| < |AB|$ i $|BC| < |CA|$. Točka P leži na dužini $\overline{AB}$ i točka Q leži na dužini $\overline{AC}$ tako da je $P \neq B$, $Q \neq C$ i $|BQ| = |BC| = |CP|$. Neka je T središte kružnice opisane trokutu APQ, H ortocentar trokuta ABC, i S točka presjeka pravaca BQ i CP. Dokaži da su točke T, H i S kolinearne.

Zadatak 2. Neka je $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ skup prirodnih brojeva. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da su za sve prirodne brojeve a i b zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

1) $f(ab) = f(a)f(b)$, i

2) barem dva broja među brojevima $f(a)$, $f(b)$ i $f(a+b)$ su jednaki.

Zadatak 3. Za beskonačan niz prirodnih brojeva a_1, $a_2, \ldots$ kažemo da je *dobar* ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

1) a_1 je kvadrat cijelog broja, i

2) za svaki prirodan broj $n \geq 2$, a_n je najmanji prirodan broj takav da je

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

kvadrat cijelog broja.

Dokaži da za svaki dobar niz a_1, $a_2, \ldots$ postoji prirodan broj k takav da vrijedi $a_n = a_k$ za svaki prirodan broj $n \geq k$.

Drugi dan, subota, 9. travnja 2022.

Zadatak 4. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Odredi najveći prirodan broj N za koji postoji $N+1$ realnih brojeva a_0, $a_1, \ldots, a_N$ takvih da je

1) $a_0 + a_1 = -\dfrac{1}{n}$, i

2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ za $1 \leq k \leq N-1$.

Zadatak 5. Za sve prirodne brojeve n, k neka je $f(n, 2k)$ broj načina na koje je $n \times 2k$ ploču moguće potpuno prekriti s nk domina veličine 2×1. (Na primjer, $f(2,2) = 2$ i $f(3,2) = 3$.) Odredi sve prirodne brojeve n takve da za svaki prirodan broj k vrijedi da je broj $f(n, 2k)$ neparan.

Zadatak 6. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut i neka je O središte njemu opisane kružnice. Simetrale unutarnjih kutova kod vrhova A i B sijeku se u X, simetrale unutarnjih kutova kod vrhova B i C sijeku se u Y, simetrale unutarnjih kutova kod vrhova C i D sijeku se u Z, i simetrale unutarnjih kutova kod vrhova D i A sijeku se u W. Nadalje, neka je P točka presjeka pravaca AC i BD. Pretpostavimo da su sve točke X, Y, Z, W, O i P međusobno različite. Dokaži da točke O, X, Y, Z i W leže na istoj kružnici ako i amo ako točke P, X, Y, Z W leže na istoj kružnici.

Vrijeme pisanja svaki dan 4 sata i 30 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.