

UDK 532.53:519.63

# UTJECAJ NUMERIČKE MREŽE NA UČINKOVITOST RAČUNALNE SIMULACIJE

## NUMERICAL MESH IMPACT ON COMPUTATIONAL SIMULATION EFFICIENCY

Lado KRANJČEVIĆ – Zoran ČARIJA – Sanjin FUČAK

**Sažetak:** Analizira se utjecaj numeričke mreže na efikasnost numeričkog modela i na kvalitetu rezultata kroz matematički model plitkih voda u 2D slučaju, odnosno Navier-Stokesov model strujanja fluida u 3D slučaju. U obama slučajevima koristi se implicitna numerička shema koja pretpostavlja rješavanja linearnog sustava u svakom vremenskom koraku. U 2D slučaju predložena je upotreba numeričke mreže konačnih volumena centriranih po ćeliji jer ona daje matricu linearnog sustava pogodne strukture, a u 3D slučaju prednost se daje poliedarskom tipu mreže.

**Ključne riječi:** - numerička mreža,  
- konačni volumeni,  
- dualna mreža,  
- mreža proizvoljnih poliedara

**Summary:** The numerical mesh influence on the efficiency of the numerical model and quality of obtained results is analyzed in a mathematical model of shallow water flow in the 2D case and a Navier-Stokes fluid flow model in the 3D case. Both cases implement an implicit numerical scheme that produces a linear system solution in every time step. In the 2D case, the use of a cell-centered finite volume mesh is suggested because it gives a suitable linear system matrix and in the 3D case, a polyhedral mesh type is preferred.

**Keywords:** - numerical mesh,  
- finite volume,  
- dual mesh,  
- arbitrary polyhedral mesh

### 1. UVOD

Primjena određene numeričke sheme izravno je vezana uz izbor određene numeričke metode i to metode konačnih razlika, konačnih volumena ili konačnih elemenata te različitih bezmrežnih metoda koje su prisutne uglavnom u teorijskoj analizi. Pri diskretizaciji matematičkog modela kao zasebni elementi pojavljuju se prostorna i vremenska (temporalna) diskretizacija. Vremenska diskretizacija provodi se najčešće primjenom metode konačnih razlika. Moguća je eksplicitna ili implicitna vremenska diskretizacija. Bitan čimbenik prostorne diskretizacije jest definicija određenog tipa numeričke mreže. Na Slici 1 prikazani su tipovi dvodimenzijske mreže, ali se navedena podjela podrazumijeva i u trodimenzijskom smislu. U radu se analizira utjecaj numeričke mreže na efikasnost numeričkog modela i na kvalitetu rezultata kroz matematički model plitkih voda u dvodimenzijskom slučaju, odnosno Navier-Stokesov model strujanja fluida u trodimenzijskom slučaju.

### 1. INTRODUCTION

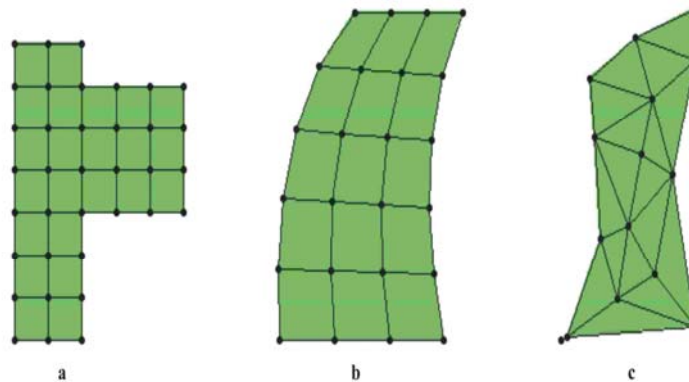
The application of a specific numerical scheme is directly affected by the choice of an appropriate numerical method. The most frequently used methods are the finite difference method, the finite volume method, the finite element method and various meshless methods that are generally present in theoretical analyses. The distinct elements of mathematical model discretization are spatial and temporal discretization. Temporal discretization is commonly performed using the finite difference method. Both explicit and implicit time discretizations are possible. An important factor in spatial discretization is the definition of a specific type of numerical mesh. Figure 1 shows the types of two-dimensional meshes that also have three-dimensional counterparts. In this paper, the numerical mesh influence on the efficiency of the numerical model and quality of the obtained results is analyzed in the shallow water mathematical model for the two-dimensional case and the Navier-Stokes model

Dvodimenzijski numerički model zasniva se na metodi konačnih volumena i zbog potrebe modeliranja realnoga poplavnog terena domena je diskretizirana nestrukturiranim tipovima mreža. U 3D slučaju modelirano je strujanje kroz difuzor turbine te je također upotrijebljena metoda konačnih volumena uz dva tipa nestrukturiranih mreža. Metoda konačnih volumena, koja je i najzastupljenija metoda u računalnoj dinamici fluida danas, zasnovana je na jednadžbama očuvanja u njihovu integralnom obliku.

S obzirom na konzervativno svojstvo, metoda konačnih volumena osobito je preporučljiva za računanje jednadžbi u kojima se javljaju diskontinuiteti. Metodom konačnih volumena domena se segmentira na ćelije na koje se lokalno primjenjuju jednadžbe očuvanja, odnosno jednadžbe odgovarajućega matematičkog modela u konzervativnom obliku. U obama obrađenim slučajevima koristi se implicitna numerička shema koja pretpostavlja rješavanje linearnog sustava u svakom vremenskom koraku.

for the three-dimensional case. The two-dimensional numerical model is based on the finite volume method and the domain is discretized using unstructured mesh types in order to accurately model a real flood terrain. The 3D case models the fluid flow through a turbine draft tube, also using the finite volume method with two types of unstructured meshes. The finite volume method, being the most represented method in today's computational fluid dynamics, is based on conservation laws in their integral form.

Considering its conservative properties, the finite volume method is recommended for computation of equations that exhibit discontinuities. The finite volume method segments the domain into cells onto which the conservation equations, i.e. the equations of the appropriate mathematical model in their conservative form, are applied. In both examined cases an implicit numerical scheme that approximates the linear system solution in every time step is used.



Slika 1. Neki tipovi dvodimenzijske numeričke mreže: a. regularna ortogonalna; b. neregularna strukturirana; c. nestrukturirana

Figure 1. Some types of two-dimensional numerical meshes: a. regular orthogonal; b. irregular structured; c. unstructured

## 2. NUMERIČKA MREŽA U DVODIMENZIJSKOM MODELU

Dvodimenzijske numeričke mreže mogu se klasificirati prema različitim kriterijima: regularne, neregularne; strukturirane, nestrukturirane; trokutaste, mreže četverokuta, hibridne mreže trokuta i četverokuta te poligonske mreže. Izbor između numeričkih metoda konačnih razlika, volumena ili elemenata usko je vezan s izborom odgovarajuće numeričke mreže. Posebno je u smislu numeričke mreže limitirana metoda konačnih razlika koja zahtijeva numeričku mrežu visokog stupnja regularnosti (Slika 1a), što pri primjeni te numeričke diskretizacijske metode na nepravilne geometrije stvara dodatne poteškoće. Metoda konačnih volumena i metoda konačnih elemenata imaju pozitivno svojstvo da ih je moguće primijeniti na bilo kako strukturiranu mrežu.

## 2. NUMERICAL MESH IN A TWO-DIMENSIONAL MODEL

Two-dimensional numerical meshes can be classified according to different criteria: regular, irregular; structured, unstructured; triangular, rectangular, hybrid triangular and rectangular meshes and polygonal meshes. The choice among finite difference, volume or element methods is closely related to the choice of the appropriate numerical mesh. The finite difference method is especially limited in the choice of numerical meshes as it requires a high degree of regularity (Figure 1a) which creates additional difficulties in its application on irregular geometries. The finite volume and finite element methods have the benefit of being applicable to meshes of any structure.

To pozitivno svojstvo omogućuje lakšu prilagodbu numeričke mreže na realni problem, a što je pogotovo važno u slučaju modeliranja strujanja otvorenih vodotoka. Kompleksna geometrija poplavnog terena i hiperbolička struktura matematičkog modela nameće kao najbolje rješenje upotrebu nestrukturirane mreže konačnih volumena koja je u osnovi neregularna. Tip numeričke mreže, odnosno tip konačnih volumena predodređuje izgled matrice linearnog sustava.

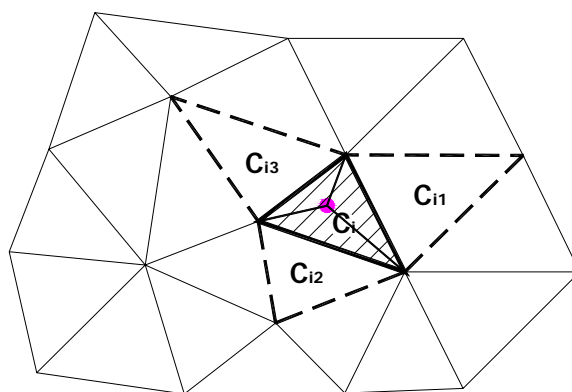
S obzirom na to da je linearni sustav potrebno riješiti u svakom vremenskom koraku numeričke simulacije, efikasnost rješavanja linearnog sustava bitno je vezana uz pravilnost matricne strukture. Na Slikama 1, 2 i 3 prikazane su tri vrste numeričkih mreža konačnih volumena superponirane na primarnu numeričku mrežu. Primarna numerička mreža jest izravan produkt triangulacije. Kod metode konačnih volumena, na osnovi primarne numeričke mreže kreira se proračunska sekundarna numerička mreža. Na jednom se odabranom segmentu numeričke mreže kroz ovaj rad definiraju tri osnovna tipa sekundarne mreže konačnih volumena i oni su predstavljeni u daljnjem tekstu.

Konačni volumeni centrirani po ćeliji nastaju smještanjem središta proračunskoga kontrolnog volumena – sekundarne ćelije ( $C_i$  šrafirano) – u središte ćelije primarne mreže. Primarna i sekundarna mreža se poklapaju (Slika 2). Kod trokutaste mreže svaki konačni volumen ima fiksni broj susjednih volumena ( $C_{ij}$  omeđeni iscrtkanim stranicama) – a to je broj tri. To je povoljna činjenica kod implicitnih numeričkih shema budući da producirani linearni sustav ima fiksni broj elemenata različitih od nule u svakom redu, tj. dijagonalni član i tri izvandijagonalna člana (osim kod rubnih elemenata).

That beneficial attribute enables an easier adaptation of numerical meshes on real problems, which is especially important when modeling open channel flow. The complex flood terrain geometry and the hyperbolic structure of the mathematical model impose the use of unstructured finite volume meshes that are basically irregular. The type of numerical mesh, i.e. the type of finite volumes, predetermines the shape of the linear system matrix.

Since the linear system needs to be solved in every iteration of the numerical simulation, the efficiency of the linear system solution is closely related to the regularity of the matrix structure. Figures 1, 2 and 3 show three types of numerical finite volume meshes superimposed over the primary numerical mesh which is a direct product of triangulation. In the finite volume method, the primary numerical mesh is used to create the computational secondary numerical mesh. One segment of the numerical mesh is selected in this paper in order to define the three basic types of numerical finite volume meshes and they are presented in the following text.

Cell centered finite volumes are created by placing the computational control volume center – the secondary cell ( $C_i$  hatch) – in the center of the primary mesh cell. The primary and secondary meshes coincide (Figure 2). In a triangular mesh, every finite volume has a fixed number of neighboring volumes ( $C_{ij}$  enclosed in dashed edges) – with that number being three. This is a beneficial property in implicit numerical schemes as the resulting linear system has a fixed non-zero number of elements in every row – a diagonal element and three off-diagonal elements (except for the boundary elements).



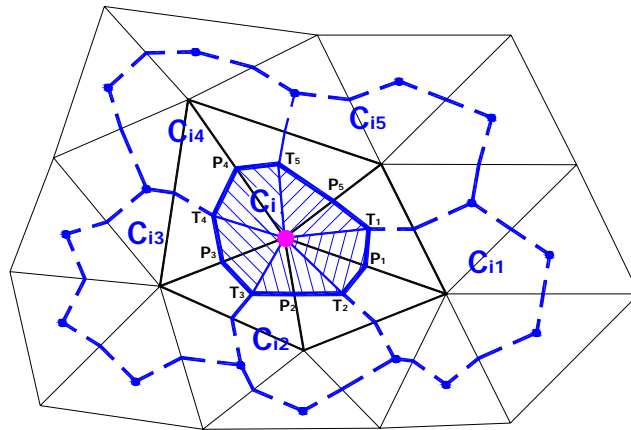
Slika 2. Konačni volumeni s centrom u središtu ćelije  
Figure 2. Cell centered finite volumes

Konačni volumeni centrirani po čvoru nastaju smještanjem središta proračunskoga kontrolnog volumena – sekundarne ćelije ( $C_i$  šrafirano područje na Slici 3) – u čvor primarne mreže. Nastaje dualna mreža koja se sastoji od primarne mreže i sekundarne mreže.

Node centered finite volumes are created by placing the computational control volume center – the secondary cell ( $C_i$  hatch in Figure 3) – on the primary mesh node. A dual mesh consisting of a primary mesh and a secondary mesh is formed.

Stranice sekundarne ćelije (debele crtkane linije) nastaju spajanjem težišta  $T$  i polovišta  $P$  linija ćelija primarne mreže kojima je spomenuti središnji čvor zajednički, kako je prikazano na Slici 3. Prednosti su ovakva tipa mreže u činjenicama da izmjereni podaci (na terenu) najčešće koincidiraju s čvorovima primarne numeričke mreže pa stanje u sekundarnoj ćeliji izravno odgovara izmjerenom podatku te u činjenici da svaka ćelija ima prosječno veći broj susjeda, tj. „komunicira“ s više ćelija čime se pridonosi boljoj „raspršenosti“ podataka po domeni. Kod implicitne numeričke sheme nepovoljna je okolnost, s obzirom na ovakav tip konačnih volumena, u činjenici da sekundarna ćelija ima nedefiniran broj susjednih sekundarnih ćelija što uzrokuje varijaciju broja elemenata različitih od nule po redovima matrice linearnog sustava. Ta činjenica predstavlja određenu otežavajuću okolnost i produžava proračunsko vrijeme pri rješavanju linearnog sustava s obzirom na tip konačnih volumena centriranih po ćeliji.

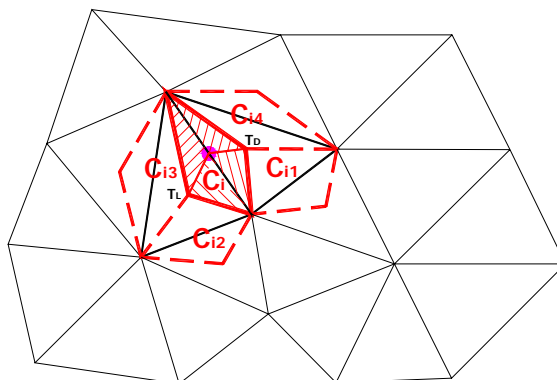
The secondary cell edges (thick dashed lines) are created by joining the centroid  $T$  and the midpoint  $P$  of the primary mesh cell edges that share the aforementioned central node in Figure 3. The advantages of this type of mesh lie in the fact that in-situ measured data usually coincide with primary mesh nodes (so that the state in the secondary numerical mesh directly corresponds to the measured data) and the fact that each cell has, on average, a greater number of direct neighbors, i.e. it “communicates” with more cells leading to greater data “dispersion” throughout the domain. In an implicit numerical scheme, the disadvantage regarding this type of finite volume lies in the fact that the secondary cell has no clearly defined number of neighboring cells which causes a variation in the number of non-zero elements within rows of the linear system matrix. That fact presents a certain difficulty and extends the necessary computational time when solving the linear system compared to the finite volume type that is cell-centered.



Slika 3. Konačni volumeni s centrom u čvoru  
Figure 3. Node-centered finite volumes

Konačni volumeni straničnog tipa nastaju smještanjem centara sekundarnih ćelija na polovišta stranica ćelija primarne mreže (Slika 4). Stranice sekundarne ćelije dobiju se spajanjem težišta lijevo  $T_L$  i težišta desno  $T_D$  s vrhovima stranice na kojoj je smješten centar. Sekundarna ćelija ( $C_i$  šrafirano) ima fiksni broj susjednih ćelija – četiri. Ova metoda konačnih volumena ima porijeklo u metodi konačnih elemenata i njezin je cilj što preciznije postavljanje rubnih uvjeta [1].

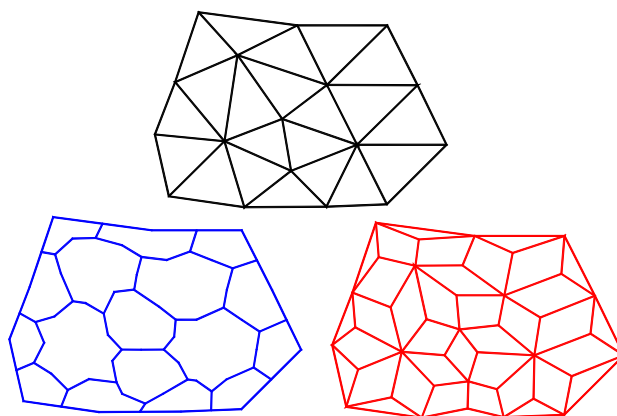
Finite volumes of the edge type are created by placing the secondary cell centers on the midpoints of the primary mesh cell edges (Figure 4). Secondary cell edges are created by connecting the centroid to the left  $T_L$  and the centroid to the right  $T_D$  with the edge vertices on which the center is situated. The secondary cell ( $C_i$  hatch) has a fixed number of neighboring cells – four. This finite volume method has its origins in the finite element method and its intent is to define the boundary conditions as accurately as possible [1].



Slika 4. Konačni volumeni s centrom na polovištu stranice  
Figure 4. Finite volumes centered on the edge midpoint

Na Slici 5 moguće je usporediti oblike triju vrsta mreža konačnih volumena. Mreže konačnih volumena centrirane po čvoru i straničnoga tipa jesu dualni tip numeričkih mreža u kojem primarna mreža nastala triangulacijom upravo ima oblik prikazan na Slici 5, (gore), a sekundarne (proračunske) mreže na kojima se provode simulacije su oblika prikazanih na donjem dijelu slike. Kod dualnih numeričkih mreža prije (ili tijekom) provođenja simulacije potrebno je na osnovi primarne mreže konstruirati sekundarnu mrežu na kojoj će se provoditi simulacije. Nakon završene simulacije numerički rezultati opet se prilagođavaju na primarnu mrežu na kojoj se i prikazuju. Kod konačnih volumena centriranih po ćeliji postoji jedinstvena numerička mreža tj. mreža proizašla iz simulacije, a to je ona na kojoj se i provodi numerička simulacija. Za primjer prikazanih segmenata mreže (Slika 5) sastavljena je Tablica 1 s podacima o broju ćelija, broju stranica, tj. broju ćelija i njihovih susjeda budući da ti podaci mogu ukazati na proračunski napor za svaki pojedini tip mreže, odnosno definiraju veličinu i strukturu matrice sustava (kod implicitne sheme).

Figure 5 allows us to compare the three types of finite volume meshes. Cell-centered finite volume meshes and edge type meshes are dual-type meshes in that the primary mesh formed by triangulation has the shape as shown in Figure 5 (above) whereas the secondary (computational) meshes used in the simulation are shaped as shown in the lower part of the figure. In dual numerical meshes it is necessary to construct before (or during the simulation) a secondary mesh, based on the primary mesh, on which the simulation will be performed. After the finished simulation, the results are again adapted to the primary mesh on which they are also represented. With cell-centered finite volumes, there is a unique numerical mesh – the mesh resulting from the simulation is the same as the one used in the numerical simulation. Table 1 is formed for the represented mesh segments shown in this example (Figure 5) containing data on the number of cells, number of edges; i.e. the number of cells and their neighbors since this information can indicate the computational effort for each individual type of mesh and size and structure of the system matrix (for implicit schemes).



Slika 5. Usporedba segmenata mreža konačnih volumena:  
centrirana po ćeliji (gore), centrirana po čvoru (dolje lijevo) i straničnog tipa (dolje desno)  
Figure 5. Comparison of finite volume mesh segments:  
cell-centered (above), node-centered (below, left) and edge type (below, right)

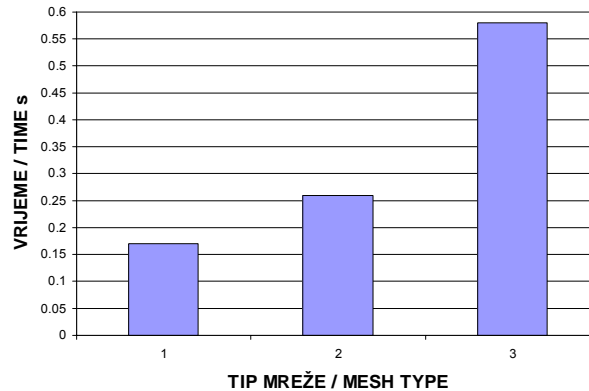
Tablica 1. Odnos ukupnog broja ćelija (NEL), broja stranica (NEDG), reda matrice sustava  $N$  i broja elemenata matrice sustava različitih od 0 (NNZ) za primjere mreža konačnih volumena prikazanih na Slici 5

Table 1. The relation between the total number of cells (NEL), number of edges (NEDG), system matrix order  $N$  and non-zero matrix elements (NNZ) for the finite volume mesh examples shown in Figure 5

Vrsta konačnih volumena Finite volume type (FV)	NEL	NEDG	N	NNZ
FV (centrirani po ćeliji / cell centered)	21	37	63	657
FV (centrirani po čvoru / node centered)	17	48	51	819
FV (straničnog tipa / edge type)	37	74	111	1467

Proveden je test na svim trima predstavljenim oblicima konačnih volumena kako bi se odredio njihov utjecaj na dužinu trajanja proračuna, odnosno efikasnost numeričkoga modela plitkih voda. Na histogramu Slika 6 pokazano je vrijeme trajanja proračuna za 1000 iteracija na svakom tipu mreže za zadani segment mreže. U računalnom kodu primijenjen je numerički efikasan GMRES linearni rješavač s odgovarajućim ILUT pretkondicionarom [2, 3].

A test case was run on all introduced finite volume shapes in order to determine their influence on the length of computational time, i.e. the efficiency of the shallow water numerical model. The histogram in Figure 6 shows the time necessary to perform 1000 iterations on each mesh type for the given mesh segment. The computational code uses the numerically efficient linear solver with the appropriate ILUT preconditioner [2, 3].



Slika 6. Usporedba trajanja 1000 iteracija za različite tipove mreže:

1 – centriranu po ćeliji; 2 – centriranu po čvoru, 3 – straničnog tipa

Figure 6. Comparison of time elapsed for 1000 iterations with different mesh types:

1 – cell centered; 2 – node centered, 3 – edge type

Uočljivo je da je izvan konkurencije najneefikasniji treći slučaj, a kao najefikasniji izbor nameće se mreža konačnih volumena centriranih po ćeliji iako je red njezine matrice sustava 23% veći od slučaja broj dva. Ipak, broj je elemenata matrice različitih od nule najmanji u prvom slučaju, a i struktura matrice povoljnija je budući da je poznat maksimalan broj elemenata različitih od nule u jednom redu, a što je znatno povoljnije u GMRES algoritmu nego kada je taj broj nepoznat kao u slučaju konačnih volumena centriranih po čvoru.

It is immediately apparent that the third case is without a doubt the most inefficient and that the most efficient choice lies with the cell centered finite volume mesh, in spite of its matrix order being 23% greater than that of the second case. Nevertheless, the number of non-zero elements is the smallest in the first case and the matrix structure is more suitable since the maximum number of non-zero elements within a row is known from the start, which is significantly more suitable for the GMRES algorithm than is the case with node-centered finite volumes where that number is unknown

### 3D PROBLEM

Utjecaj oblika ćelija numeričke mreže ispitan je na primjeru strujanja fluida kroz difuzor Francisove turbine HE Senj.

#### Opis problema

Ispitana turbina radi s korisnim neto padom od  $H_n=410$  m i protokom od  $20 \text{ m}^3/\text{s}$  proizvodeći snagu od 72.5 MW. Postrojenje se sastoji od triju turbinskih jedinica koje završavaju difuzorom koljenastoga tipa kojima se voda odvodi u zajednički odvodni kanal. Difuzor turbine uređaj je kojim se voda usporava nizvodno od rotora turbine pretvarajući kinetičku energiju vode u statički tlak na izlazu iz difuzora turbine povećavajući ukupnu korisnost turbine.

Turbulentno strujanje vode unutar difuzora vrlo je kompleksno s više vrtložnih strujanja u ravnim i zakrivljenim dijelovima difuzorske cijevi te područjima s nepovoljnim gradijentima tlaka koja mogu dovesti do neželjenog odvajanja struje fluida od stijenke.

#### Geometrija

Geometrija ispitanog difuzora prikazana je na Slikama 7 a i 7 b. Ravni dijelovi difuzora, vertikalni ulazni dio koničnog oblika te horizontalni dio međusobno su spojeni koljenom difuzora. Horizontalni dio difuzora promjenjivoga je pravokutnoga poprečnog presjeka sa skošenjima u kutovima poprečnog presjeka.

#### Numerička mreža

Simulacije strujanja fluida kroz difuzor provedene su na numeričkim mrežama različitog oblika ćelije, tetraedarskoga i poliedarskoga tipa (Slika 8 a i 8 b). U obama slučajevima ispitano je više mreža različite veličine ćelije odnosno različitog broja volumnih ćelija, a numerička mreža prosječne veličine ćelije od 200 mm prikazana je na Slikama 7a i 7b.

Sekundarne poliedarske mreže [6, 7] izrađene su od primarnih tetraedarskih mreža iste veličine ćelije. Tip mreže, broj volumnih ćelija, ploha i čvorova svake ispitane mreže prikazani su u Tablici 2.

Za razlučivanje turbulentnoga graničnog sloja uz čvrstu stijenku difuzora korištena su četiri sloja prizmatičnih ćelija [8, 9] ukupne debljine 30 mm. Prizmatične ćelije tetraedarske mreže sastoje se od 6 čvorova dok su kod mreža s proizvoljnim poliedarskim ćelijama uza zid složene tanke ćelije nepravilnog oblika.

### 3D PROBLEM

The influence of the numerical mesh cells shape was examined in the example of fluid flow through the draft tube of the HE Senj Francis turbine.

#### Problem description

The examined turbine operates with a useful net head of  $H_n=410$  m and a flow rate of  $20 \text{ m}^3/\text{s}$  with a power output of 72.5 MW. The facility consists of three turbine units ending in elbow type draft tubes which funnel the water into a single drainage channel. The draft tube slows the water flow downstream from the turbine runner converting the kinetic energy of the water into static pressure, thus increasing the total efficiency of the turbine.

The turbulent flow inside the draft tube is very complex with multiple turbulent streams in the straight and curved tube sections as well as areas of adverse pressure gradients that can lead to unwanted stream separation from the walls.

#### Geometry

The geometry of the examined draft tube is as shown in Figures 7 a and 7 b. The straight sections – the vertical conical inlet and the horizontal section – are joined by the elbow. The horizontal section of the draft tube has a rectangular cross-section of increasing size, with chamfered edges.

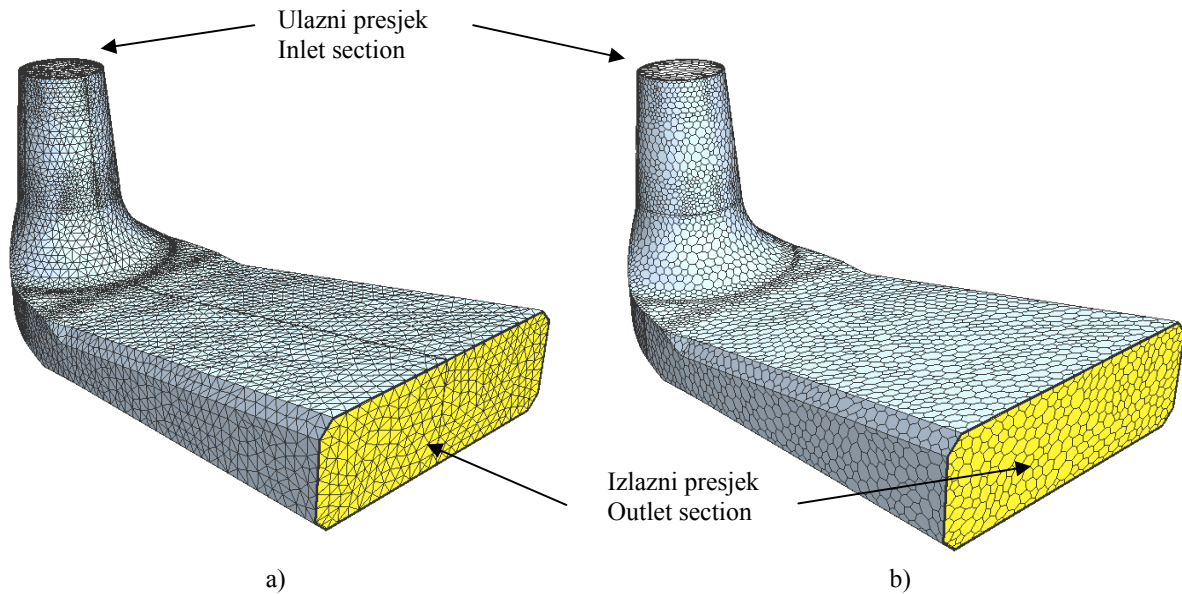
#### Numerical mesh

Fluid flow simulations are performed using numerical meshes of different cell types: the tetrahedral and polyhedral (Figure 8 a and 8 b). In either case scenario, multiple meshes of various cell sizes (i.e. number of cells) were examined and the mesh with a 200 mm average cell size is shown in Figures 7a and 7b.

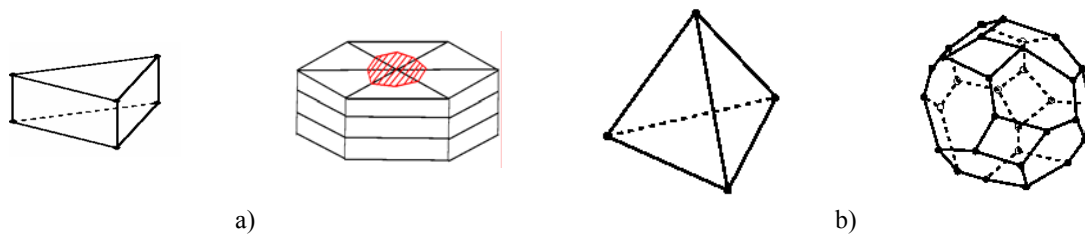
The secondary polyhedral meshes are made up of primary tetrahedral meshes of equal cell sizes. The mesh type, number of volume cells, faces and nodes of each examined mesh are shown in Table 2.

Four layers of prismatic cells [8, 9] were used to distinguish the turbulent boundary layer near the draft tube wall making it 30 mm thick. The prismatic cells of the tetrahedral mesh consist of six nodes while the arbitrary polyhedral mesh has thin cells of irregular shape near the wall.





Slika 7. Difuzor vodne turbine diskretiziran: a) tetraedarskim volumenima b) poliedarskim volumenima  
 Figure 7. Water turbine draft tube discretization by: a) tetrahedral volumes b) polyhedral volumes



Slika 8. Korišteni oblici volumnih ćelija: a) prizmatične ćelije uz čvrstu stijenku; b) osnovne volumne ćelije  
 Figure 8. 3D cells' shapes used: a) near wall prismatic cells; b) basic 3D cells

### Granični uvjeti

Svi proračuni izvedeni su za protok od  $20 \text{ m}^3/\text{s}$  bez ulaznog vrtloga na ulaznom presjeku difuzora, dok je na izlaznom presjeku postavljen slobodan izlaz (*outflow*), a čvrste stijenke difuzora osiguravaju nepromočivost.

### Kriterij konvergencije

Simulacije strujanja fluida, u svim ispitanim slučajevima, provedene su iteriranjem s ciljem dostizanja konačnoga nepromjenjivog rješenja. Ustanovljeno je da je 400 iteracija dovoljno za uspostavljanje rješenja u svim ispitanim slučajevima. Kao kriterij konvergencije korišteni su nepromjenjivost ostataka (mjera netočnosti rješenja diskretizirane jednadžbe; kod perfektno konvergirano g slučaja jednaka je pogrešci zaokruživanja računala) te nepromjenjivost razlike totalnog tlaka ulaznog i izlaznog presjeka difuzora, osrednjenog po masenom protoku daljnjim iteriranjem. Tipična promjena razlike totalnog tlaka tijekom računanja prikazana je na Slici 9b.

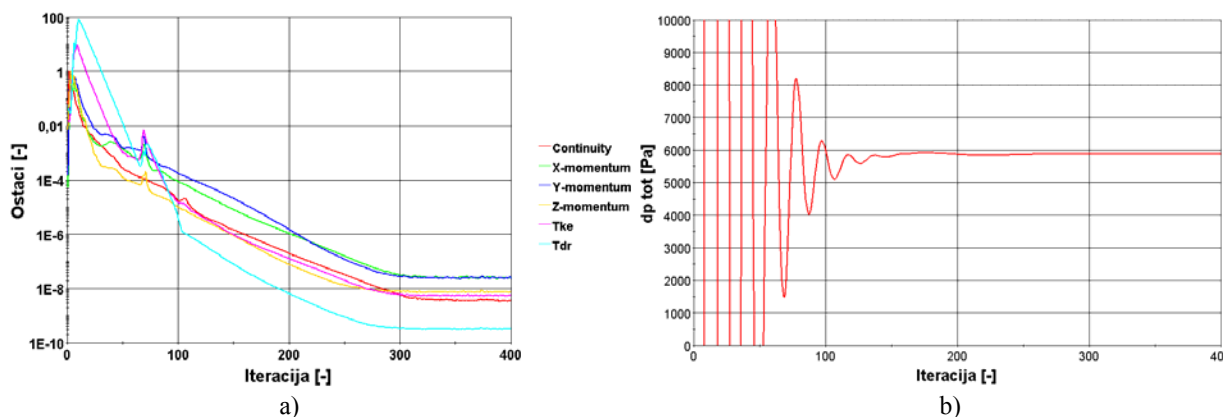
### Boundary conditions

All computations were performed for a flow rate of  $20 \text{ m}^3/\text{s}$  with non-permeable walls of the draft tube and without vorticity at the draft tube inlet, while the outlet was defined as a free exit outflow.

### Convergence criteria

Fluid flow simulations in all examined cases were performed iterating towards a final stable solution. It was observed that 400 iterations were sufficient to obtain the solution in all examined cases. The convergence criteria used were residuals (a measure of discretisation equation solution inaccuracy; a perfectly converged case would approach a measure equal to the computer round-off error) and negligible change through further iteration in the mass averaged total pressure difference between the draft tube inlet and the outlet. A typical total pressure change during computation is shown in Figure 9b.





Slika 9. Promjena ostataka i razlike totalnog tlaka tijekom računanja  
 Figure 9. Residual and total pressure difference during calculation

Iz Slike 9a vidljivo je da se nakon 350 iteracija daljnjim računanjem rješenje problema ne popravlja.

Figure 9a shows there is no improvement in the solution through further computation beyond 350 iterations.

**Analiza rješenja**

Uspostavom konvergencije pojedine mreže moguće je usporediti mreže na osnovi izračunate razlike totalnoga tlaka ulaznoga i izlaznoga presjeka difuzora te utrošenim vremenom za provođenje 400 iteracija (Tablica 2).

**Solution analysis**

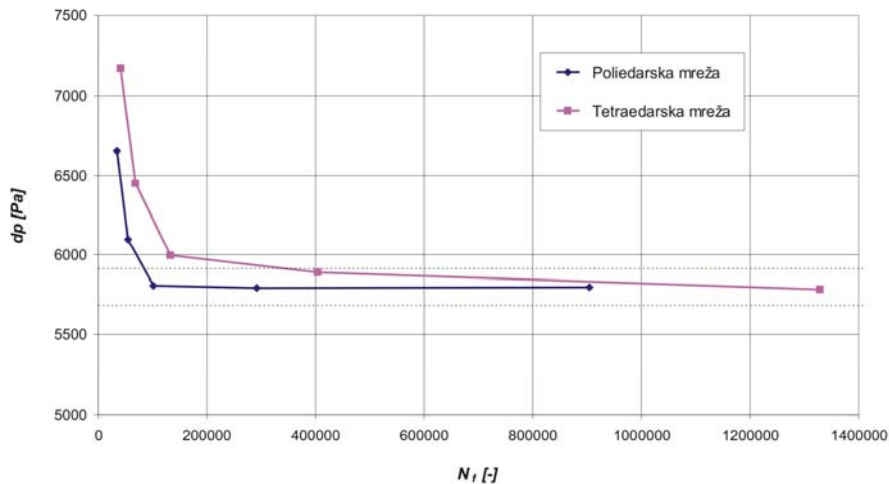
Upon achieving convergence, it is possible to compare meshes regarding the obtained total pressure difference and time needed to perform 400 iterations, as shown in Table 2.

Tablica 2. Karakteristike ispitanih numeričkih mreža s pripadajućim rezultatima  
 Table 2. Properties of examined numerical meshes with respective results

Broj	Osnovna veličina [mm]	Broj volumnih ćelija	Broj ploha	Broj čvorova	Utrošeno vrijeme [s]	Razlika tlaka $dp_{tot}$ [Pa]
Number	Base size [mm]	Number of cells	Number of faces	Number of nodes	Time elapsed [s]	Pressure difference $dp_{tot}$ [Pa]
Poliedarska mreža / Polyhedral mesh						
1	800	7704	34039	22497	392	6650
2	600	12029	55058	37256	506	6097
3	400	21257	101641	70873	857	5807
4	200	57299	291623	211198	2197	5792
5	100	165347	904425	683268	5572	5800
Tetraedarska mreža / Tetrahedral mesh						
1	800	18696	40651	6799	447	7165
2	600	31786	68548	10817	592	6446
3	400	62206	132837	19625	1120	5995
4	200	191623	404432	54471	3148	5891
5	100	637850	1328342	160790	9938	5786

Promjena razlike totalnog tlaka s brojem volumnih ćelija numeričke mreže prikazana je na Slici 10 gdje je horizontalnim crtkanim linijama označen interval točnosti  $\pm 2.0\%$  s obzirom na rješenje najfinije poliedarske mreže.

The change in total pressure difference when using meshes of different sizes is shown in Figure 10. The dashed horizontal lines represent the area of  $\pm 2.0\%$  accuracy with regard to the solution obtained with the most refined polyhedral mesh.



Slika 10. Izračunani totalni tlak u ovisnosti o broju volumnih ćelija  
Figure 10. Computed total pressure related to the number of volume cells

Na Slici 10 jasno je vidljiva osjetljivost rješenja na broj volumnih ćelija tetraedarske mreže. Rješenje na poliedarskim mrežama neovisno je o daljnjem povećanju veličine numeričke mreže dostizanjem kritične veličine numeričke mreže koja u ovom slučaju iznosi otprilike 21000 volumnih elemenata.

Rješenje unutar zahtijevanog intervala točnosti ( $\pm 2.0\%$ ) postiže se poliedarskim mrežama 3, 4 i 5 te tetraedarskim mrežama 4 i 5 (Tablica 2).

Izračunate razlike tlakova triju najfinijih poliedarskih mreža (3, 4 i 5) vrlo su bliske, međusobno se razlikuju manje od 0.3%, a rješenje takve kvalitete moguće je postići samo najfinijom tetraedarskom mrežom.

Poliedarskim mrežama rješenje je unutar zahtijevanog intervala točnosti moguće postići već s 21000 volumnih ćelija, za razliku od tetraedarske mreže kod koje se rješenje unutar zahtijevanog intervala točnosti dostiže sa 192000 volumnih elemenata. Broj ploha numeričke mreže također je bitno manji kod poliedarskih mreža (101641 ploha) nego što je to slučaj kod tetraedarskih mreža (404432 ploha) za dostizanje rješenja jednake kvalitete.

Analiza utrošenog vremena pokazuje 14%-tno (mreže broj 1) odnosno 78%-tno (mreže broj 5) povećanje utrošenog vremena za izvođenje 400 iteracija na primarnoj (tetraedarskoj) mreži u odnosu na sekundarnu (poliedarsku) mrežu iste veličine ćelije.

Figure 10 clearly shows the sensitivity of the solution towards the number of 3D cells in the tetrahedral mesh. The solution in polyhedral meshes is unaffected by further increases in the number of cells beyond the critical mesh size which, in this case, equals about 21000 3D cells.

The solution within the required accuracy interval ( $\pm 2.0\%$ ) was obtained in polyhedral meshes 3, 4 and 5 and tetrahedral meshes 4 and 5 (Table 2).

The computed pressure differences in the three most refined polyhedral meshes (3, 4 and 5) are very close, differing by no more than 0.3%, while only the most refined tetrahedral mesh was able to achieve that level of accuracy.

Polyhedral meshes can achieve the solution within the required accuracy interval using only 21000 3D cells, as opposed to the tetrahedral meshes that require 192000 3D cells to achieve the same level of accuracy. The number of faces is also notably smaller in polyhedral meshes (101641 faces) than in tetrahedral meshes (404432 faces) for a similar level of accuracy.

The analysis of elapsed computation time shows a 14% increase in mesh no. 1 and a 78% increase in mesh no. 5 for the time necessary to perform 400 iterations when using tetrahedral instead of polyhedral meshes of the same cell size.

#### 4. ZAKLJUČAK

U radu je analiziran utjecaj numeričke mreže kroz dvodimenzijски i trodimenzijски primjer na efikasnost numeričkoga proračuna i kvalitetu rezultata. Moguće je zaključiti da je i sama fizika problema bitan faktor pri izboru određene numeričke mreže.

U dvodimenzijском slučaju pokazano je da kod upotrebe implicitne numeričke sheme izbor određenoga tipa konačnih volumena znatno utječe na vrijeme izvođenja numeričkih simulacija. Predložena je upotreba numeričke mreže konačnih volumena centriranih po ćeliji jer za posljedicu ima matricu linearnoga sustava pogodne strukture tako da ju je moguće efikasno riješiti bilo serijskim bilo paralelnim rješavačem. U trodimenzijском primjeru kroz usporedbu tetraedarske i poliedarske mreže na stacionarnom testnom slučaju naglašena je kvaliteta trodimenzijске mreže. Prema rezultatima testa prednost se daje tipu mreže s proizvoljnim poliedrima jer ona već s malim brojem volumnih ćelija daje dovoljno točno rješenje te je trajanje jednoga ciklusa računanja bitno kraće u odnosu na tetraedarsku mrežu iste veličine sastavljenu od osnovnih ćelija.

Kvaliteta dvodimenzijске mreže konačnih volumena centriranih po ćeliji kod modeliranja strujanja vode sa slobodnom površinom pokazana je u [4] dajući dobra slaganja s izmjerenim podacima i realno vrijeme propagacije poplavnoga vala. Osim nestrukturirane mreže konačnih volumena trokutastoga tipa, pokazuje se pogodnim koristiti miješanu nestrukturiranu mrežu trokuta i četverokuta [5], ali bi njezinu implementaciju na implicitnu shemu još trebalo istražiti.

U trodimenzijском se slučaju kao najbolje rješenje nameće poliedarska mreža, što se potvrđuje i njezinim uvođenjem u glavne komercijalne programe iz računalne mehanike fluida.

#### 5. POPIS OZNAKA

Ćelija $i$	$C_i$
Težište	$T$
Polovište	$P$
Broj ćelija	$N_C$
Broj stranica	$NEDG$
Broj ćelija	$NEL$
Broj elemenata matrice sustava različitih od nule	$NNZ$
Razlika totalnih tlakova	$dp_{tot}$
Neto pozitivni pad	$H_n$

#### 4. CONCLUSION

This paper analyses the numerical mesh influence on numerical calculation efficiency and the ensuing quality results through a 2D and a 3D test case. The apparent conclusion is that the very physics of the problem is an important factor in the choice of the numerical mesh type. In the 2D case it is shown that the choice of appropriate finite volume type has a considerable influence on numerical simulation duration for an implicit numerical scheme. The cell centered finite volume scheme is suggested because it gives a suitable linear system matrix and is thus efficiently solvable with a serial or parallel solver. The mesh quality is emphasized through the comparison of tetrahedral and polyhedral meshes in the 3D steady test case. According to test results, the arbitrary polyhedral type mesh is preferred because it gives a sufficiently accurate result even with a relatively small number of volumes and the computing cycle time is considerably shorter than for the tetrahedral mesh of the same base cell size.

The quality of the 2D cell centered finite mesh is demonstrated in [4] providing results that agree with the measured data and the real time of flood wave propagation. Besides the unstructured triangular finite volume mesh, the hybrid triangular-quadrilateral mesh [5] proved to be suitable but its implementation in implicit numerical schemes still needs to be investigated.

In the 3D case, the best solution proved to be the polyhedral mesh and that fact is confirmed by its implementation in major CFD commercial applications.

#### 5. LIST OF SYMBOLS

$i^{\text{th}}$ cell
Centroid
Midpoint
Number of cells
Number of edges
Number of cells
Number of matrix non-zero elements
Difference in total pressure
Net positive head

**LITERATURA  
REFERENCES**

- [1] Bermudez, A., Vazquez, M.E., *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, Computers and Fluids, 23:1049-1071, 1994.
- [2] Kranjčević Lado, Analiza učinkovitosti numeričkih shema za plitke vode, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, doktorska disertacija, 2006.
- [3] Saad, Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Copyright 2000 by Y. Saad, 2000.
- [4] Kranjčević, Lado: Numeričke simulacije širenja poplavnog vala po suhom području primjenom implicitne sheme, STROJARSTVO, 48(3-4), 2006.
- [5] Nujić, M., Efficient Implementation of Non-oscillatory Schemes for the Computation of Free-Surface Flows II, Institute of Hydrosciences, Federal Armed Forces University Munich, 1995
- [6] Peric, M., Flow simulation using control volumes of arbitrary polyhedral shape, ERCOFTAC Bulletin, No. 62, September 2004.
- [7] Demirdzic I., Muzaferija S., Numerical method for coupled fluid flow, heat transfer and stress analysis using unstructured moving meshes with cells of arbitrary topology, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 125, Issues 1-4, September 1995.
- [8] Michel D., Liu Y., *Quadratic reconstruction finite volume schemes on 3D arbitrary unstructured polyhedral grids*, Computational Fluid Dynamics Conference, 14th, Norfolk, June, 1999.
- [9] Jasak H., Weller H.G., Gosman A.D., *High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Volume 31, Issue 2.

Izvorno znanstveni članak

Original scientific paper

Adresa autora / Authors' address:  
Dr.sc. Lado Kranjčević, dipl. ing.  
Dr.sc. Zoran Čarija, dipl. ing.  
Sanjin Fućak, dipl. ing.  
Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet  
Vukovarska 58  
HR-51000 RIJEKA, Hrvatska